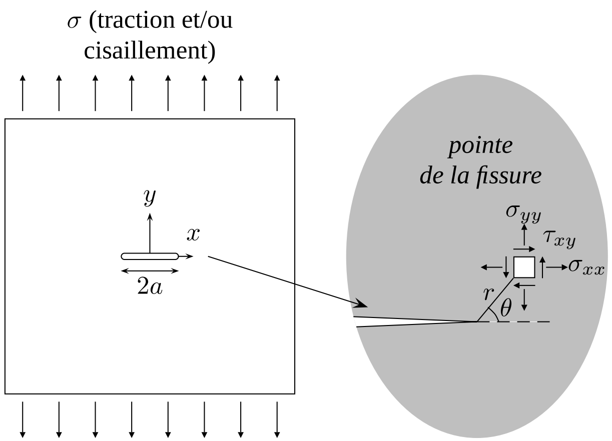
ENSMP 1ère année, Mécanique des matériaux solides Critère, bifurcation et interaction de fissures.

Le but de ce mini-projet est d'explorer analytiquement et expérimentalement le. Pour cela, vous étudierez les équations donnant les contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure pour identifier l'effet de la taille et de l'orientation d'une fissure. La dépendence en taille et les angles de propagation prédits par cette description analytique seront comparés avec des valeurs obtenues expérimentalement sur du papier. Dans une dernière phase plus exploratoire, vous vous intéresserez à des situations plus complexes où plusieurs fissures interagissent. *NB : dans cet énoncé, on considère la notion de facteur d'intensité des contraintes comme acquise, se reporter au cas échéant au chapitre 10 du cours de MMS.*

1 Théorie

On considère une plaque contenant une fissure centrée, de longueur $2a$. Le matériau qui la constitue est élastique, homogène et isotrope, de module de Young E et de coefficient de Poisson ν. Les forces volumiques sont négligées.



Pour une telle fissure, on peut calculer un développement asymptotique du champ de contrainte en un point situé à une distance r de la pointe de la fissure. On obtient pour le mode I :

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 + \sin\frac{\theta}{2} sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}$$

et pour le mode II :

$$\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \left(2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)$$

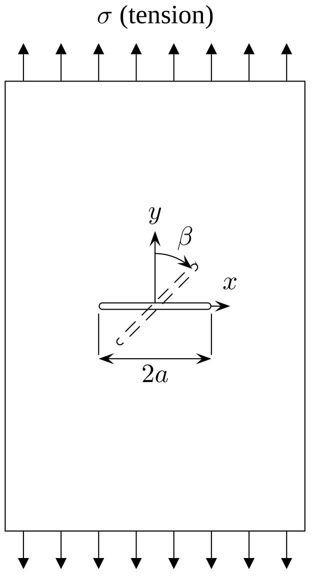
$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} cos\frac{3\theta}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

Plutôt que de considérer une plaque contenant une fissure horizontale soumise à un chargement quelquonque, il est judicieux d'étudier le système constitué d'une plaque en traction contenant une fissure inclinée d'un angle β par rapport à l'axe de traction comme illustré sur la figure suivante. Les équations précédentes sont toujours valables mais on a alors :

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\sin^2\beta$$

$$K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a}\sin\beta\cos\beta$$



1.1 Etude du champ de contrainte autour d'une fissure et mise en place d'un critère de rupture

Q1 Ecrire l'expression des trois composantes du tenseur des contraintes au voisinage de la pointe de fissure en coordonnées cylindriques (r, θ).

Q2 Dans le cas plus simple $\beta = \pi/2$ *(chargement en ouverture appelé mode I), tracez l'évolution des composantes du tenseur des contraintes en fonction de la distance à la pointe de fissure r, le long de l'axe de la fissure, à* $\pi/4$ *et* $\pi/2$ *par rapport à l'axe de la fissure.*

Q3 Commentez la prédiction faite pour $r \to 0$. *Expliquez la limite de validité de cette prédiction.*

Q4 Pour mieux comprendre comment sont distribuées les contraintes autour d'une fissure, tracez des lignes d'isocontrainte $\sigma_{\theta\theta}$ *et* σ_{rr}.

1.2 Etude de la bifurcation de fissure

Selon les matériaux, les mécanismes de rupture peuvent être gouvernés par différents type de sollicitation (traction, cisaillement). Pour définir des critères d'amorçage et de propagation, vous ferez ici les hypothèses suivantes :

- Amorçage : la fissure s'amorce dès que le facteur d'intensité des contraintes en mode I K_I atteint une valeur critique K_c (tenacité).
- Propagation : la fissure se propage dans le plan où la contrainte de traction $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale. On appellera θ_0 l'angle entre formé entre l'axe initial de la fissure et sa direction de propagation.

Q5 Exprimez puis calculez θ_0 *dans le cas d'un chargement par ouverture (mode I)* $(\beta = \pi/2)$.

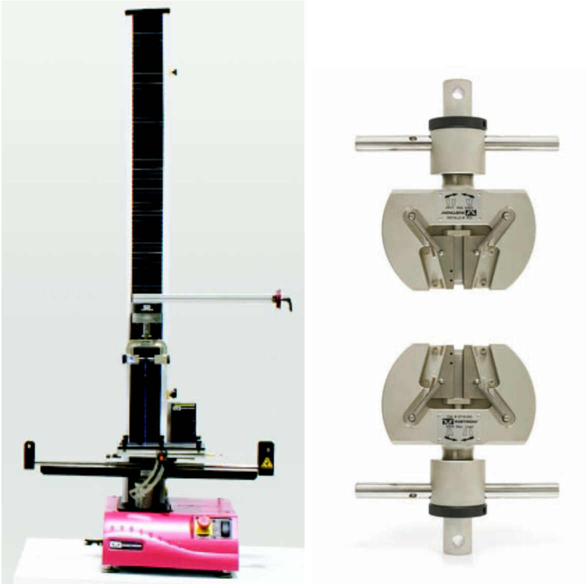
Q6 Exprimez puis calculez θ_0 *dans le cas d'un chargement par cisaillement pur (mode II)* $(K_I = 0$ *et* $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a})$.

On suppose maintenant que l'on est dans le cas général (mode mixte). En utilisant les relations $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\sin^2\beta$ et $K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a}\sin\beta\cos\beta$.

Q5 Etablir la relation liant K_I, K_{II} *et* θ_0. *En déduire* θ_0 *en fonction de l'angle* β. *Quelle est l'influence des paramètres d'élasticité du matériau ? Tracer la courbe* $\theta_0 = f(\beta)$.

2 Expériences

Vous disposez de feuilles de papier calque millimétrées dans lesquelles vous pourrez découper des bandes de la largeur des mors de traction ($2.5cm$). Dans ces bandes vous pourrez effectuer soigneusement des fissures ayant la longueur et l'orientation que vous souhaitez. Vous réaliserez des essais de traction sur la machine INSTRON® 3300 avec ces éprouvettes de manière à faire propager la fissure.



La manipulation d'une machine de traction implique des risques pour vous et pour ceux qui vous entourent, respectez les consignes de sécurité et ne manipulez jamais en l'absence du personnel encadrant.

La réalisation des essais comportera les étapes suivantes :

- créer le programme qui servira à réaliser les essais de traction à l'aide du logiciel BlueHill®
- mettre en place l'éprouvette de façon à bien respecter l'alignement
- positionner les limites du canal *déplacement de la traverse*
- lancer l'essai jusqu'à rupture
- démonter l'éprouvette et analyser l'éprouvette

Q5 Faites une première série d'essais en chargement mode I avec 4 fissures de longueurs différentes (2, 4, 9 et 15mm par exemple). Tracez les courbes force-déplacement. Vérifiez si l'on retrouve la dépendence en taille donnée par le critère d'amorçage ($K_I = K_c$). Quelle serait la valeur de la ténacité K_c pour votre matériau ?

Q6 Faites une seconde série d'essais avec des fissures ayant différents angles β (0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ par exemple). Mesurez les angles initiaux de propagation β. Tracez les résultats expérimentaux $\theta_{exp} = f(\beta)$ et comparez avec les prédictions théoriques.

2.1 Etude des intéractions entre fissures

Selon le temps disponible, vous pourrez vous intéresser au cas où plusieurs fissures sont présentes.

Q5 Considérez le cas où deux fissures collinéaires sont chargées en mode I. Proposez une trajectoire de propagation.

Q6 Faites l'essai correspondant où deux fissures de 5mm se font face à chaque bord d'une bande de papier. Observez attentivement les trajectoires de propagation et comparez à vos prédictions.