

Table des matières

2	Rhéologie	9
2.1	Les différents types de «déformation»	9
2.1.1	Les sources de «déformation»	9
2.1.2	Dilatation thermique	10
2.2	Les briques de base du comportement non linéaire	10
2.3	Plasticité uniaxiale	11
2.3.1	Modèle élastique–parfaitement plastique	11
2.3.2	Modèle de Prager	12
2.3.3	Écriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale	13
2.4	Viscoélasticité uniaxiale	14
2.4.1	Un exemple de modèle rhéologique	14
2.4.2	Étude d'un modèle composé	15
2.5	Viscoplasticité uniaxiale	16
2.5.1	Un exemple de modèle rhéologique	16
2.5.2	Quelques modèles classiques en viscoplasticité	18
2.6	Influence de la température	19

Chapitre 2

Rhéologie

La construction des modèles de comportement non linéaire des matériaux comporte deux volets : l'étude des propriétés rhéologiques et la définition de la forme des équations pour un chargement tridimensionnel. La *rhéologie*, étude des écoulements, permet de relier les contraintes, les déformations, et leurs dérivées, et caractérise la nature des comportements. La caractérisation expérimentale a été évoquée en introduction. Certains comportements fondamentaux ont été identifiés. Chacun va se caractériser ici par une *brique élémentaire*. Les comportements les plus complexes se bâtissent ensuite à partir de celles-ci en formant des assemblages qui sont décrits dans ce chapitre. La conception d'un modèle complet nécessite enfin le choix d'une généralisation qui permette de passer de l'étude sous chargement uniaxial à celle des chargements multiaxiaux. Ce sera l'objet du chapitre suivant, qui décrira les différents *critères* qui autorisent cette généralisation. On commence l'examen des différentes classes de modèle par quelques remarques sur les types de déformation que peut subir la matière.

2.1 Les différents types de «déformation»

2.1.1 Les sources de «déformation»

Pour les lois de comportement les plus simples (élasticité, viscosité pure) un seul tenseur de déformation permet de caractériser les changements de forme de l'élément de volume. De nombreuses situations pratiques font au contraire intervenir d'autres types de déformations. Avant d'aborder cette description, on fait le bilan des éléments nécessaires à la construction d'une loi de comportement.

Un cadre devenu classique, et qui est présenté dans le cours de MMC [1] (chapitre 5) suppose que l'on définisse un certain nombre de *variables d'état* qui représentent à l'instant t le résultat de toute l'histoire du matériau. La déformation élastique est l'exemple d'une telle variable. Il faut ensuite introduire des coefficients, ou *paramètres matériau*, qui vont porter sur ces variables et définir les grandeurs associées (l'approche thermodynamique parle de «forces» thermodynamiques) qu'elles génèrent. Ainsi, le tenseur des modules d'élasticité permet-il de calculer le tenseur des contraintes. Un matériau est également soumis à l'action de *paramètres extérieurs*, qui vont créer en son sein des distorsions ou des variations de volume.

Le fait de solliciter le matériau dans des conditions extrêmes (fortes charges par exemple) fait apparaître des irréversibilités dans le processus de déformation, qui devront être caractérisées par de nouvelles variables d'état. On entamera au paragraphe suivant l'étude de ce type de déformation. Il faut auparavant citer le cas des *déformations paramétriques*. On regroupe derrière cette dénomination les modes de déformations additionnels, qui sont pilotés par des paramètres extérieurs. En toute rigueur les distorsions et dilatations produites *ne conduisent pas* à un tenseur de déformation, parce qu'elles ne vérifient pas forcément les équations de compatibilité. L'usage a néanmoins consacré l'abus de notation, et on utilise par exemple ε^{th} pour désigner la dilatation thermique ; on accepte même parfois de parler de déformation thermique. Parmi les autres paramètres extérieurs qui fournissent des déformations

additionnelles, on peut citer par exemple :

- l'irradiation d'un matériau, qui provoque dans certaines gammes de température la germination et la croissance de cavités, ce qui produit un changement de volume ;
- le changement de phase ; les métaux et alliages, mais aussi les roches, peuvent changer de réseau cristallin en fonction de la température et de la pression. Ces phénomènes doivent bien entendu être décrits à l'aide de variables d'état, mais, dans la mesure où une quantité donnée d'atomes n'occupera pas le même volume en fonction de sa phase cristallographique (cubique, hexagonale,...), un changement de volume spécifique accompagnera de façon systématique le changement de phase.

2.1.2 Dilatation thermique

La dilatation thermique est proportionnelle à la variation de température pour une petite variation de celle-ci autour d'un point de fonctionnement considéré. Ceci permet donc d'introduire un tenseur de dilatation thermique. Sur une large gamme de température, l'expérience montre que les termes de ce tenseur dépendent de la température. Comme par ailleurs on peut choisir la température à laquelle on prend la dilatation thermique nulle, il faut introduire deux températures particulières dans la définition, T_0 température à laquelle $\underline{\underline{\xi}}^{th}$ est nul, et T_r , température de référence à partir de laquelle est mesuré $\underline{\underline{\alpha}}$. La forme complète est alors :

$$\begin{aligned} & \text{– pour le cas anisotrope} & \underline{\underline{\xi}}^{th} &= \underline{\underline{\alpha}}(T)(T - T_r) - \underline{\underline{\alpha}}(T_0)(T_0 - T_r) \\ & \text{– pour le cas isotrope} & \underline{\underline{\xi}}^{th} &= \underline{\underline{\alpha}}(T)(T - T_r)\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\alpha}}(T_0)(T_0 - T_r)\underline{\underline{\mathbf{I}}} \\ & \text{soit} & \underline{\underline{\xi}}_{ij}^{th} &= \underline{\underline{\alpha}}(T)(T - T_r)\delta_{ij} - \underline{\underline{\alpha}}(T_0)(T_0 - T_r)\delta_{ij} \end{aligned}$$

Dans une telle définition, $\underline{\underline{\alpha}}(T)$ (dépendant de la température) est le *coefficient de dilatation sécant*. C'est lui qui est ordinairement tabulé dans les bases de données.

La déformation totale s'écrit comme une somme de la part élastique et de la part thermique :

$$\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^e + \underline{\underline{\xi}}^{th}$$

Lorsque le champ de température dans une pièce n'est pas uniforme, la dilatation varie d'un point à l'autre. Si le champ appliqué permet de vérifier les conditions de compatibilité, et s'il peut se développer une *dilatation libre*, il n'y a pas de contrainte, dans le cas contraire (champ de température trop complexe ou restrictions cinématiques), ceci conduit au développement de contraintes thermomécaniques.

2.2 Les briques de base du comportement non linéaire

L'allure qualitative de la réponse des matériaux à quelques essais simples permet de les ranger dans des classes bien définies. Ces comportements «de base», qui peuvent être représentés par des systèmes mécaniques élémentaires, sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité. Les éléments les plus courants sont, en figure 2.1 :

1. Le ressort, qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation (figure 2.1a).
2. L'amortisseur, qui schématise la viscosité, linéaire (figure 2.1b) ou non-linéaire (figure 2.1c). La viscosité est dite pure s'il existe une relation biunivoque entre la charge et la vitesse de chargement. Si cette relation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton.
3. Le patin, qui modélise l'apparition de déformations permanentes lorsque la charge est suffisante (figure 2.1d). Si le seuil d'apparition de la déformation permanente n'évolue pas avec le chargement, le comportement est dit plastique parfait. Si, de plus, la déformation avant écoulement est négligée, le modèle est rigide-parfaitement plastique.

Ces éléments peuvent être combinés entre eux pour former des modèles rhéologiques. Ceux-ci représentent des systèmes mécaniques qui servent de support dans la définition des modèles. Il ne faut en

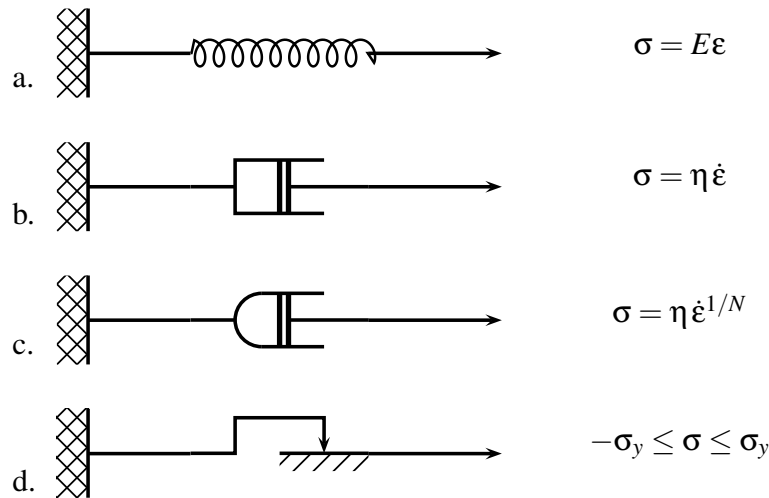


FIG. 2.1 – Les « briques de base » pour la représentation des comportements

aucun cas leur accorder un trop grand crédit pour ce qui concerne la représentation des phénomènes physiques qui sont à la base des déformations. Ils sont néanmoins brièvement présentés ici, car ils permettent de comprendre la nature des relations à introduire pour chaque type de comportement, en pratiquant par exemple l'exercice qui consiste à combiner deux à deux les modèles élémentaires. C'est aussi l'occasion d'introduire l'ensemble du vocabulaire qui sera utile dans le cas général des chargements tridimensionnels.

La réponse de ces systèmes peut être jugée dans 3 plans différents, qui permettent d'illustrer le comportement lors d'essais de type :

- *écrouissage*, ou augmentation monotone de la charge ou de la déformation, (plan déformation–contrainte, ϵ – σ) ;
- *fluage*, ou maintien de la charge (plan temps–déformation, t – ϵ) ;
- *relaxation*, ou maintien de la déformation (plan temps–contrainte, t – σ).

2.3 Plasticité uniaxiale

2.3.1 Modèle élastique–parfaitement plastique

L'association d'un ressort et d'un patin en série (figure 2.2 a) produit un comportement *élastique parfaitement plastique*, modélisé en figure 2.2 c. Le système ne peut pas supporter une contrainte dont la valeur absolue est plus grande que σ_y .

Pour caractériser ce modèle, il faut considérer une *fonction de charge* f dépendant de la seule variable σ , et définie par :

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \quad (2.1)$$

Le domaine d'élasticité correspond aux valeurs négatives de f , et le comportement du système se résume alors aux équations suivantes :

$$\text{— domaine d'élasticité si : } f < 0 \quad (\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e = \dot{\sigma}/E) \quad (2.2)$$

$$\text{— décharge élastique si : } f = 0 \quad \text{et } \dot{f} < 0 \quad (\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e = \dot{\sigma}/E) \quad (2.3)$$

$$\text{— écoulement plastique si : } f = 0 \quad \text{et } \dot{f} = 0 \quad (\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^p) \quad (2.4)$$

En régime élastique, la vitesse de déformation plastique est bien entendu nulle, la vitesse de déformation élastique devenant à son tour nulle pendant l'écoulement plastique. Ceci implique que l'expression de la vitesse de déformation plastique ne peut pas se faire à l'aide de la contrainte. C'est au contraire la vitesse de déformation qui doit être choisie comme pilote.

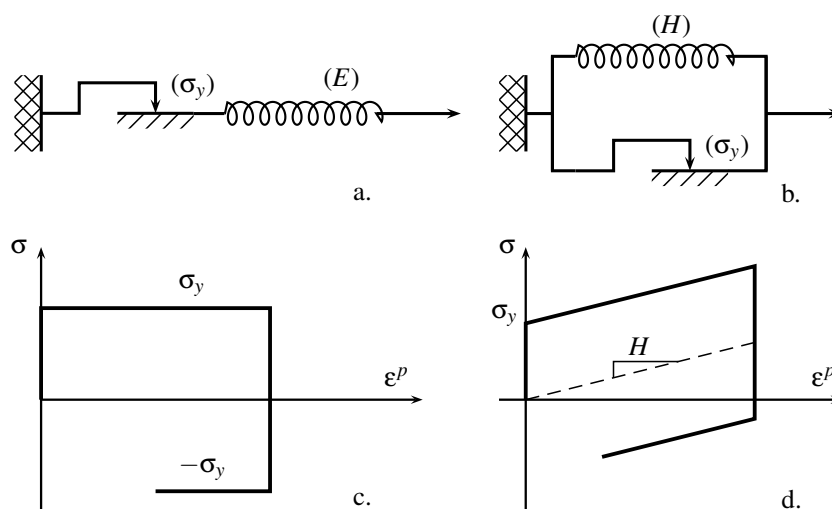


FIG. 2.2 – Associations en série ou parallèle de patin et ressort

Le modèle est *sans écrouissage*, puisque le niveau de contrainte ne varie plus au sortir du domaine d'élasticité. Il n'y a pas d'énergie stockée au cours de la déformation, et la dissipation en chaleur est égale à la puissance plastique. Le modèle est susceptible d'atteindre des déformations infinies sous charge constante, conduisant à la ruine du système par déformation excessive.

2.3.2 Modèle de Prager

L'association en parallèle de la figure 2.2b correspond au comportement illustré en figure 2.2d. Dans ce cas, l'écrouissage est linéaire [2]. Il est dit *cinématique*, car dépendant de la valeur actuelle de la déformation plastique. Sous cette forme, le modèle est rigide-plastique. Il devient élasto-plastique si l'on rajoute un ressort en série. La forme de la courbe dans le plan $\sigma - \varepsilon^p$ est due au fait que, lors de l'écoulement plastique, la contrainte qui s'établit dans le ressort vaut $X = H\varepsilon^p$. Par ailleurs, cet écoulement ne se produit que si la valeur absolue de la contrainte dans le patin, soit $|\sigma - H\varepsilon^p|$, est égale à σ_y . Pour une déformation donnée, cette contrainte X est une *contrainte interne* qui caractérise le nouvel état neutre du matériau.

Ce deuxième exemple offre l'occasion d'écrire un modèle plus complet que précédemment. La fonction de charge dépend maintenant de la contrainte appliquée et de la contrainte interne. Elle s'écrit :

$$f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y \quad (2.5)$$

Il n'y aura présence d'écoulement plastique que si on vérifie à la fois $f = 0$ et $\dot{f} = 0$. Ceci conduit à la condition suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial X} \dot{X} = 0 \quad (2.6)$$

D'où :

$$\text{signe}(\sigma - X) \dot{\sigma} + \text{signe}(\sigma - X) \dot{X} = 0 \quad (2.7)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{X}, \text{ et finalement : } \dot{\varepsilon}^p = \dot{\sigma}/H \quad (2.8)$$

Dans ce cas, la contrainte évolue au cours de l'écoulement plastique, si bien qu'elle peut servir de variable de contrôle. Mais il est aussi toujours possible d'exprimer la vitesse d'écoulement plastique en fonction de la vitesse de déformation totale, en utilisant la décomposition de la déformation combinée

avec l'expression de la vitesse de déformation plastique, le cas où $H = 0$ redonnant bien entendu le cas du matériau parfaitement plastique :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{E + H} \dot{\varepsilon} \quad (2.9)$$

Il est remarquable de noter que le calcul de l'énergie dissipée au cours d'un cycle produit exactement le même résultat que pour le premier montage, ce qui indique que, pour ce type de comportement, une partie de l'énergie est *temporairement* stockée dans le matériau (ici, dans le ressort), et *entièrement* restituée à la décharge. Ceci donne une illustration physique de la notion d'écrouissage *renversible*, alors que d'autres règles d'écrouissage cinématique, non-linéaire, qui ne seront pas considérées dans le cadre de ce cours, sont accompagnées d'une dissipation d'énergie.

2.3.3 Écriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale

Dans le cas général, les conditions de «charge-décharge» s'expriment donc :

$$\text{– domaine d'élasticité si : } f(\sigma, A_i) < 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E) \quad (2.10)$$

$$\text{– décharge élastique si : } f(\sigma, A_i) = 0 \quad \text{et } \dot{f}(\sigma, A_i) < 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E) \quad (2.11)$$

$$\text{– écoulement plastique si : } f(\sigma, A_i) = 0 \quad \text{et } \dot{f}(\sigma, A_i) = 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \dot{\varepsilon}^p) \quad (2.12)$$

Dans le cas général, le module H dépend de la déformation et/ou des variables d'écrouissage. La valeur du module plastique au point (σ, A_i) s'obtient en écrivant que le point représentatif du chargement reste sur la limite du domaine d'élasticité au cours de l'écoulement. L'équation qui en découle s'appelle la *condition de cohérence* :

$$\dot{f}(\sigma, A_i) = 0 \quad (2.13)$$

Ce formalisme peut paraître un peu lourd dans le cadre d'un chargement uniaxial, mais il est utile de le mettre en place, car ce sont les mêmes outils qui seront ensuite utilisés dans le cas plus complexe des chargements multiaxiaux. Dans les deux exemples qui ont été décrits, le domaine d'élasticité est soit fixe, soit mobile, sa taille étant conservée. Le premier cas ne nécessite bien entendu aucune variable d'écrouissage, le second fait intervenir une variable X qui dépend de la valeur actuelle de la déformation plastique. Cette variable deviendra tensorielle dans le cas général. Le type d'écrouissage correspondant s'appelle écoulement cinématique (figure 2.3b).

Une autre évolution élémentaire que peut subir le domaine d'élasticité est l'expansion. Cet autre cas (figure 2.3a) correspond à un matériau dont le domaine d'élasticité voit sa taille augmenter, mais qui reste centré sur l'origine : il s'agit d'un écoulement isotrope [3]. La variable d'écrouissage qui intervient dans f est la dimension du domaine d'élasticité, notée R :

$$f(\sigma, X, R) = |\sigma| - R - \sigma_y \quad (2.14)$$

L'évolution de cette variable est la même quel que soit le signe de la vitesse de déformation plastique. Elle s'exprimera donc en fonction de la *déformation plastique cumulée*, p , variable dont la dérivée est égale à la valeur absolue de la vitesse de la déformation plastique : $\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^p|$. Bien entendu, il n'y a pas de différence entre p et ε^p tant que le chargement est monotone croissant. Dans ce cas, vérifier la condition de cohérence revient tout simplement à exprimer que la valeur actuelle de la contrainte est sur la frontière du domaine d'élasticité. Pour l'écrouissage cinématique, cela s'écrit $\sigma = X + \sigma_y$, et pour l'écrouissage isotrope $\sigma = R + \sigma_y$. Cela signifie donc que c'est la loi d'évolution de la variable d'écrouissage qui détermine exactement la forme de la courbe de traction. Les deux modèles rhéologiques invoqués donnent des courbes linéaires, avec des modules plastiques nul ou constant. Il est souvent plus réaliste de considérer une courbe qui se sature en fonction de la déformation, soit par exemple une fonction puissance (loi de Ramberg-Osgood, avec deux coefficients matériaux K et m) ou une exponentielle,

cette dernière formulation offrant l'avantage d'introduire une contrainte ultime σ_u supportable par le matériau (deux coefficients matériau, σ_u et b en plus de σ_y) :

$$\sigma = \sigma_y + K(\varepsilon^p)^m \quad (2.15)$$

$$\sigma = \sigma_u + (\sigma_y - \sigma_u) \exp(-b\varepsilon^p) \quad (2.16)$$

Dans bien des cas, les utilisateurs ne prennent pas la peine de définir une forme explicite de la loi de comportement, et décrivent la courbe de traction point par point. Cela revient implicitement à considérer un écrouissage isotrope. Ce type d'écrouissage est prédominant pour les déformations importantes (au-delà de 10%). Cependant, l'écrouissage cinématique continue de jouer un rôle important lors de décharges, même pour les grandes déformations, et c'est lui qui est prépondérant pour les faibles déformations et les chargements cycliques. Il permet en particulier de simuler correctement l'effet Bauschinger, c'est-à-dire le fait que la contrainte d'élasticité en compression décroît par rapport à la contrainte initiale à la suite d'un précrouissage en traction. Il est néanmoins moins souvent utilisé que l'écrouissage isotrope, car son traitement numérique est plus délicat.

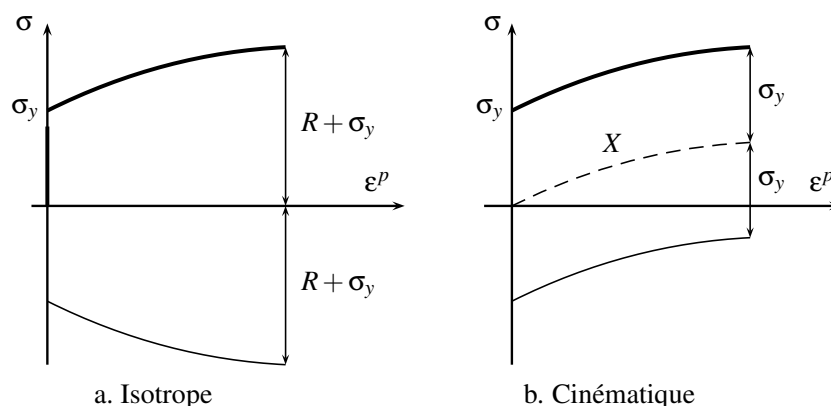


FIG. 2.3 – Illustration des deux principaux types d'écrouissage

2.4 Viscoélasticité uniaxiale

2.4.1 Un exemple de modèle rhéologique

Le modèle de Maxwell regroupe un amortisseur et un ressort en série (figure 2.4a), celui de Voigt un amortisseur et un ressort en parallèle (figure 2.4b). Leurs équations respectives sont :

$$\text{–Maxwell : } \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E_0 + \sigma/\eta \quad (2.17)$$

$$\text{–Voigt : } \sigma = H\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad \text{ou encore : } \dot{\varepsilon} = (\sigma - H\varepsilon)/\eta \quad (2.18)$$

La particularité du modèle de Voigt est de ne pas présenter d'élasticité instantanée. Ceci entraîne que sa fonction de relaxation n'est pas continue et dérivable par morceaux, avec un saut fini à l'origine : l'application d'un saut de déformation en $t = 0$ produit une contrainte infinie. Ce modèle n'est donc pas utilisable en relaxation, sauf si la mise en charge est progressive, et sera pour cette raison associé à un ressort en série pour effectuer des calculs de structure (modèle de Kelvin–Voigt du paragraphe suivant). Sous l'effet d'une contrainte σ_0 constante en fonction du temps, la déformation tend vers la valeur asymptotique σ_0/H , le fluage est donc limité (figure 2.4c). Par ailleurs, si, après une mise en charge lente, la déformation est fixée à une valeur ε_0 , la contrainte asymptotique sera $H\varepsilon_0$. Il n'y a donc pas dans ce dernier cas disparition complète de la contrainte. Au contraire, dans le cas du modèle de Maxwell, la vitesse de fluage est constante (figure 2.4c), et la disparition de contrainte au cours d'une expérience de relaxation est totale (figure 2.4d).

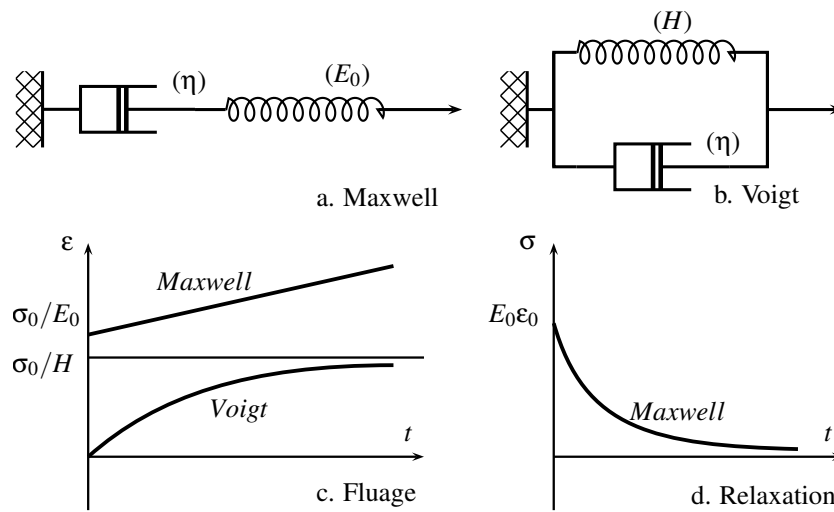


FIG. 2.4 – Fonctionnement des modèles de Maxwell et Voigt

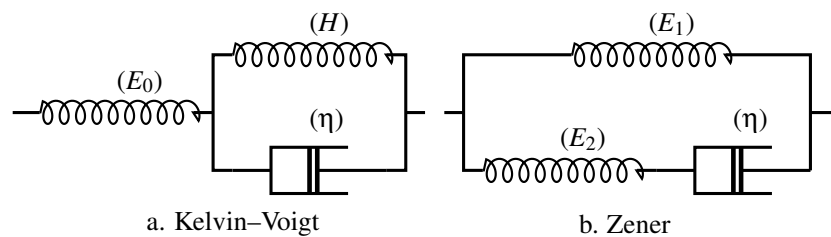


FIG. 2.5 – Exemple de modèles composés

Dans le cas de modèles et de chargement aussi simples, la réponse est obtenue instantanément par intégration directe des équations différentielles. Les formules obtenues sont respectivement, pour le modèle de Maxwell :

$$\text{–fluage sous une contrainte } \sigma_0 : \quad \varepsilon = \sigma_0/E_0 + \sigma_0 t / \eta \tag{2.19}$$

$$\text{–relaxation à la déformation } \varepsilon_0 : \quad \sigma = E_0 \varepsilon_0 \exp[-t/\tau] \tag{2.20}$$

et pour le modèle de Voigt :

$$\text{–fluage sous une contrainte } \sigma_0 : \quad \varepsilon = (\sigma_0/H)(1 - \exp[-t/\tau']) \tag{2.21}$$

Les constantes $\tau = \eta/E_0$ et $\tau' = \eta/H$ sont homogènes à un temps, τ désignant le *temps de relaxation* du modèle de Maxwell.

2.4.2 Étude d'un modèle composé

Le modèle de Kelvin–Voigt (figure 2.5a) présente respectivement les réponses suivantes, pour $t > 0$, en fluage sous une contrainte σ_0 , en posant $\tau_f = \eta/H$, et en relaxation pour une déformation ε_0 , en posant

$\tau_r = \eta/(H + E_0)$:

$$\varepsilon(t) = C(t) \sigma_0 = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{H} (1 - \exp[-t/\tau_f]) \right) \sigma_0 \quad (2.22)$$

$$\sigma(t) = E(t) \varepsilon_0 = \left(\frac{H}{H + E_0} + \frac{E_0}{H + E_0} \exp[-t/\tau_r] \right) E_0 \varepsilon_0 \quad (2.23)$$

Le temps caractéristique en relaxation, τ_r , est plus court que le temps correspondant en fluage, τ_f . Le matériau évolue donc plus vite vers son état asymptotique en relaxation qu'en fluage.

Le modèle de Zener (figure 2.5b) peut se ramener au modèle de Kelvin–Voigt, à l'aide du double changement de variable $1/E_1 = 1/E_0 + 1/H$, et $E_2 = E_0 + H$, ce qui prouve que les deux modèles sont en fait identiques. La même observation peut être faite en fluage. Ce modèle correspond au comportement du béton frais. Les modèles indiqués peuvent être encore améliorés :

- le *modèle de Kelvin–Voigt généralisé* est obtenu en ajoutant en série d'autres modules amortisseur-ressort (H, η) dans le cas du premier modèle ; ce modèle représente en général correctement le comportement des polymères fortement réticulés ;
- le *modèle de Maxwell généralisé* est obtenu en ajoutant en parallèle d'autres modules amortisseur-ressort (E_2, η) au second modèle ; ce modèle représente qualitativement le comportement des polymères thermoplastiques.

2.5 Viscoplasticité uniaxiale

2.5.1 Un exemple de modèle rhéologique

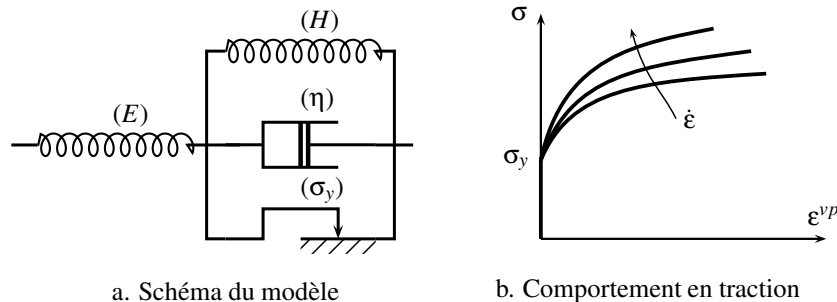


FIG. 2.6 – Modèle de Bingham généralisé

La figure 2.6a indique comment, en rajoutant un simple amortisseur, il est possible de passer très simplement d'un modèle ayant un comportement plastique indépendant du temps à un modèle viscoplastique : le modèle obtenu est le modèle de Bingham généralisé. On retrouverait l'original de ce modèle en enlevant le ressort en série ($E \rightarrow \infty$, pas d'élasticité instantanée, on obtient alors un modèle *rigide viscoplastique*, et en supprimant le ressort en parallèle, $H = 0$, pas d'écroutissage). La déformation élastique se lit aux bornes du ressort de caractéristique E , la déformation viscoplastique, que l'on nommera ε^{vp} , aux bornes de l'assemblage en parallèle. La détermination des équations de ce modèle s'effectue en considérant les équations de comportement individuelles de chacun des éléments :

$$X = H\varepsilon^{vp} \quad \sigma_v = \eta \dot{\varepsilon}^{vp} \quad \sigma_p \leq \sigma_y \quad (2.24)$$

où X , σ_v et σ_p sont respectivement les contraintes dans le ressort de caractéristique H , dans l'amortisseur et dans le patin, et :

$$\sigma = X + \sigma_v + \sigma_p \quad (2.25)$$

Il y a donc comme pour le modèle plastique un domaine d'élasticité, dont la frontière est atteinte lorsque $|\sigma_p| = \sigma_y$. On distingue alors trois régimes de fonctionnement, selon que la vitesse de déformation viscoplastique est nulle, positive ou négative :

$$(a) \quad \dot{\epsilon}^{vp} = 0 \quad |\sigma_p| = |\sigma - H\epsilon^{vp}| \leq \sigma_y \quad (2.26)$$

$$(b) \quad \dot{\epsilon}^{vp} > 0 \quad \sigma_p = \sigma - H\epsilon^{vp} - \eta\dot{\epsilon}^{vp} = \sigma_y \quad (2.27)$$

$$(c) \quad \dot{\epsilon}^{vp} < 0 \quad \sigma_p = \sigma - H\epsilon^{vp} - \eta\dot{\epsilon}^{vp} = -\sigma_y \quad (2.28)$$

Le cas (a) correspond à l'intérieur du domaine d'élasticité ($|\sigma_p| < \sigma_y$) ou à un état de décharge élastique ($|\sigma_p| = \sigma_y$ et $|\dot{\sigma}_p| \leq 0$), les deux autres cas à de l'écoulement ($|\sigma_p| = \sigma_y$ et $|\dot{\sigma}_p| = 0$). En posant $\langle x \rangle = \max(x, 0)$, les trois cas peuvent se résumer par une seule expression :

$$\eta\dot{\epsilon}^{vp} = \langle |\sigma - X| - \sigma_y \rangle \text{signe}(\sigma - X) \quad (2.29)$$

ou encore :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\langle f \rangle}{\eta} \text{signe}(\sigma - X) \quad \text{avec} \quad f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y \quad (2.30)$$

La nature du modèle a maintenant complètement changé, puisque le point représentatif de l'état de contrainte courant peut se trouver dans la zone $f > 0$, et que la vitesse d'écoulement est maintenant régie par le temps : elle peut être non nulle sans qu'il y ait d'incrément de contrainte ou de déformation. Ceci explique qu'en figure 2.6b la courbe de traction ne soit plus unique (plus la vitesse est grande, plus la contrainte visqueuse σ_v sera élevée, et plus la courbe de traction sera haute), et que, lors d'une décharge, le point de fonctionnement ne pénètre pas immédiatement dans le domaine d'élasticité (on peut donc avoir un écoulement positif à contrainte décroissante). Par ailleurs, il est possible de simuler des expériences de fluage ou de relaxation.

En fluage (figure 2.7), en supposant qu'on applique un échelon de contrainte (de 0 à $\sigma_o > \sigma_y$) à partir d'un état de référence où toutes les déformations sont nulles, le modèle prévoit que la déformation viscoplastique est une exponentielle en fonction du temps t , avec un temps caractéristique $\tau_f = \eta/H$ (figure 2.7a) :

$$\epsilon^{vp} = \frac{\sigma_o - \sigma_y}{H} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right) \quad (2.31)$$

La figure 2.7b montre, dans le plan contrainte-déformation viscoplastique, les évolutions respectives de la contrainte interne X et du seuil $X + \sigma_y$. Lorsque ce dernier rejoint la contrainte appliquée σ_o , la vitesse de déformation viscoplastique s'annule.

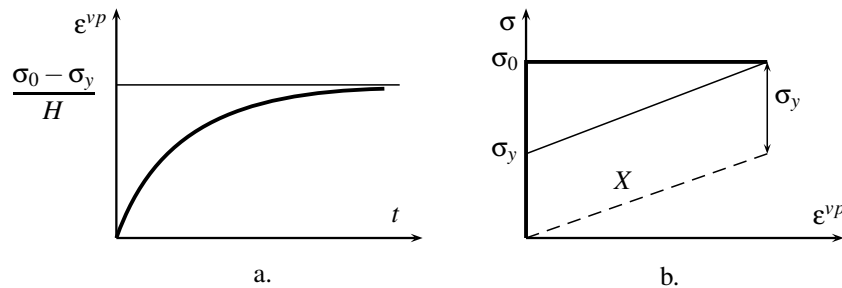


FIG. 2.7 – Fluage avec le modèle de Bingham

En relaxation, la réponse à un échelon de déformation (de 0 à ϵ_o tel que $E\epsilon_o > \sigma_y$) fait cette fois intervenir un temps caractéristique de relaxation $\tau_r = \eta/(E + H)$:

$$\sigma = \sigma_y \frac{E}{E + H} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \right) + \frac{E\epsilon_o}{E + H} \left(H + E \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \right) \quad (2.32)$$

La figure 2.8a montre le trajet parcouru par le point représentatif de l'état de contrainte au cours de la relaxation (pente $-E$ puisque $\dot{\epsilon}^{vp} + \sigma/E = 0$). La figure 2.8b représente quant à elle le trajet caractéristique au cours d'une expérience d'*effacement*, ou encore de *recouvrance*. En fonction du niveau de chargement initial, on peut rencontrer après décharge une vitesse d'écoulement négative ou nulle, mais en aucun cas on ne pourra ramener la déformation viscoplastique à zéro, sauf dans le cas particulier où la contrainte σ_y est nulle. Il n'y a alors plus de seuil initial, et on conçoit bien qu'il n'est plus nécessaire dans ce cas de définir une décomposition de la déformation : on retrouve d'ailleurs le modèle de Kelvin–Voigt, donc une approche viscoélastique.

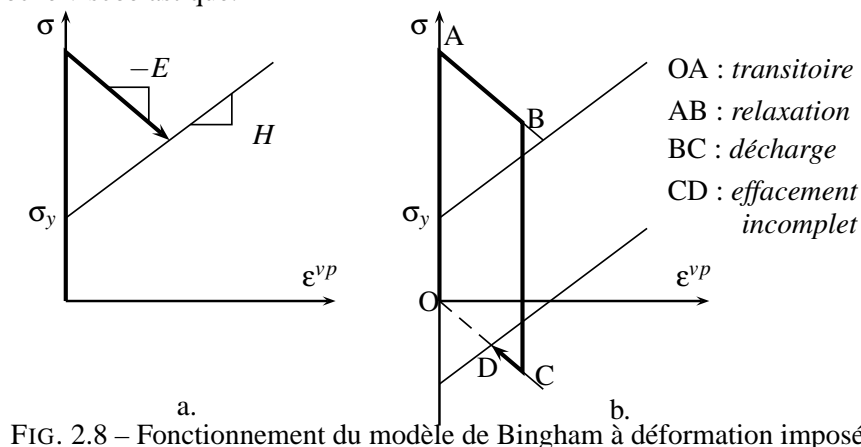


FIG. 2.8 – Fonctionnement du modèle de Bingham à déformation imposée

2.5.2 Quelques modèles classiques en viscoplasticité

Dans l'exemple précédent, la vitesse de déformation viscoplastique est proportionnelle à une certaine contrainte efficace, différence entre la contrainte appliquée et le seuil, qui représente la distance entre le point de fonctionnement actuel et la frontière du domaine d'élasticité, qui n'est rien d'autre que la valeur de la fonction f au point de fonctionnement courant. La relation linéaire peut être remplacée par une forme plus générale, en introduisant une fonction de viscosité, ϕ , qui fournit alors en traction simple :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \phi(f) \quad (2.33)$$

Pour un modèle qui comporterait à la fois de l'écrouissage isotrope et cinématique, cette relation s'inverse sous la forme suivante, toujours en traction simple :

$$\sigma = \sigma_y + X + R + \phi^{-1}(\dot{\epsilon}^{vp}) = \sigma_y + X + R + \sigma_v \quad (2.34)$$

La courbe de traction est déterminée par l'évolution du seuil, exactement comme dans le cas d'un modèle de plasticité (au travers de X et R), mais également par la fonction de viscosité, qui pilote la valeur de la contrainte visqueuse σ_v . Pour des raisons physiques évidentes, on considère que $\phi(0) = 0$, et on suppose également que ϕ est une fonction monotone croissante. Dans le cas où σ_v s'annule, le modèle reproduit un comportement plastique indépendant du temps. Par ailleurs, plus la vitesse de sollicitation augmente, et plus la contrainte atteinte pour une déformation donnée sera élevée.

Dans le cadre d'un modèle viscoplastique, il y a donc deux possibilités pour introduire de l'écrouissage. On conserve les possibilités d'action sur des variables de type X et R , et on peut également jouer sur la forme de la contrainte visqueuse. On appelle classiquement modèles à écrouissage additif ceux qui jouent sur les variables de type plasticité et modèles à écrouissage multiplicatif ceux qui jouent sur la contrainte visqueuse, une approche où les deux mécanismes sont présents étant bien entendu également envisageable. Par ailleurs, contrairement au cas de la plasticité, on peut ici considérer un modèle dans lequel le domaine d'élasticité se réduit à l'origine ($\sigma = 0$), et qui ne possède pas

d'écrouissage. Ainsi le modèle le plus courant est-il le modèle de Norton (avec deux coefficients matériau K et n) :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left(\frac{|\sigma|}{K} \right)^n \text{signe}(\sigma) \quad (2.35)$$

On peut le généraliser pour en faire un modèle à seuil sans écrouissage, ou réintroduire X et R aux côtés de σ_y , ce qui conduit à un modèle à écrouissage additif.

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left\langle \frac{|\sigma| - \sigma_y}{K} \right\rangle^n \text{signe}(\sigma) \quad (2.36)$$

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left\langle \frac{|\sigma - X| - R - \sigma_y}{K} \right\rangle^n \text{signe}(\sigma - X) \quad (2.37)$$

Il y a également une grande liberté pour choisir d'autres formes que la fonction puissance, ainsi un sinus hyperbolique dans le modèle de Sellars et Teggart (loi sans écrouissage, coefficients A et K) :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = A \sinh \left(\frac{|\sigma|}{K} \right) \text{signe}(\sigma) \quad (2.38)$$

Pour obtenir des lois à écrouissage multiplicatif, il faut admettre que la fonction ϕ ne dépend pas uniquement de f , ainsi la loi de Lemaitre (coefficients matériau K , m et n positifs) :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left(\frac{|\sigma|}{K} \right)^n p^{-n/m} \text{signe}(\sigma) \quad \text{avec} \quad \dot{p} = |\dot{\varepsilon}^{vp}| \quad (2.39)$$

2.6 Influence de la température

Tous les coefficients caractéristiques qui ont été définis ci-dessus sont susceptibles de dépendre de la température. Les dépendances se définissent en général par des tables, après examen du comportement isotherme. Dans certains cas, lorsque les mécanismes physiques sont bien définis, il est possible de préciser explicitement l'influence de la température. La loi la plus couramment utilisée pour cela est la loi d'Arrhenius. Elle est valide en fluage. Elle introduit une énergie d'activation thermique Q , et R , constante des gaz parfaits (le rapport Q/R est homogène à une température), et indique que plus la température est élevée pour une charge donnée, plus la vitesse de déformation est grande :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\varepsilon}_o \exp(-Q/RT) \quad (2.40)$$

Ceci permet de construire des équivalences temps-température, et, en menant en laboratoire des essais à température plus élevée que la température de fonctionnement visée dans les applications, d'obtenir en un temps limité des informations sur le comportement à long terme. Cette approche doit bien entendu être manipulée avec précaution dans le cas de matériaux vieillissants, et elle ne peut être étendue à de trop grandes plages de température.

Résumé

Les équations très générales qui ont été écrites pour le moment mettent en évidence la nature des modèles de viscoélasticité, de plasticité et de viscoplasticité. Ces deux derniers ont en commun l'existence d'un domaine d'élasticité (éventuellement réduit à l'origine pour le modèle viscoplastique) et de variables d'écrouissage. Par contre, il faut aussi retenir que l'écoulement plastique est *instantané*, alors que l'écoulement viscoplastique est *retardé* :

$$d\varepsilon^p = g(\sigma, \dots) d\sigma \quad d\varepsilon^{vp} = g(\sigma, \dots) dt \quad (2.41)$$

Ceci aura des conséquences importantes pour l'écriture du comportement élasto-(visco)-plastique tangent.

On ne considère dans ce cours que des formes très naïves d'écrouissage, dans la mesure où l'objectif est avant tout de mettre en place les structures des théories. La description de formes plus réalistes nécessiterait bien plus de temps. On retiendra pour mémoire les effets des chargements cycliques, des trajets de chargement multiaxiaux non proportionnels, des changements de phase, le vieillissement, les interactions avec l'environnement, etc... La plupart de ces effets sont maintenant bien documentés, et font l'objet de modélisations spécifiques.

En l'absence de déformations paramétriques, les principales équations sont donc les suivantes (en adoptant à partir de maintenant la même notation, ε^p , pour la déformation viscoplastique comme pour la déformation plastique) :

- Viscoélasticité ; le modèle est une combinaison des déformations, des contraintes, et de leurs vitesses :

$$\text{--Maxwell : } \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E_0 + \sigma/\eta$$

$$\text{--Voigt : } \sigma = H\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad \text{ou encore : } \dot{\varepsilon} = (\sigma - H\varepsilon)/\eta$$

- Plasticité et viscoplasticité :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

- Plasticité :

$$\text{-- domaine d'élasticité si : } f(\sigma, A_i) < 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E)$$

$$\text{-- décharge élastique si : } f(\sigma, A_i) = 0 \quad \text{et } \dot{f}(\sigma, A_i) < 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E)$$

$$\text{-- écoulement plastique si : } f(\sigma, A_i) = 0 \quad \text{et } \dot{f}(\sigma, A_i) = 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \dot{\varepsilon}^p)$$

En traction à contrainte imposée :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{\sigma}}{H}$$

En traction à déformation imposée :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{\varepsilon}}{E + H}$$

- Viscoplasticité :

$$\text{-- domaine d'élasticité si : } f(\sigma, A_i) \leq 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E)$$

$$\text{-- écoulement plastique si : } f(\sigma, A_i) > 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \dot{\varepsilon}^p)$$

En traction à contrainte et à déformation imposée, une forme possible est :

$$\dot{\varepsilon}^p = \left(\frac{\sigma - \sigma_y}{K} \right)^n$$

Bibliographie

- [1] S. Forest, M. Amestoy, G. Damamme, and S. Kruch. *Mécanique des milieux continus*. Cours 1ère année, Ecole des Mines de Paris, 2004.
- [2] W. Prager. The theory of plasticity : a survey of recent achievements. *Inst. Mech. Eng. London*, 169 :41–57, 1955.
- [3] G.I. Taylor and M.A. Quinney. The Plastic Distorsion of Metals. *Phil. Trans. Royal Society, A*, 230 :323–362, 1931.