Introduction à la théorie de stabilité des systèmes conservatifs

David Ryckelynck

Centre des Matériaux, Mines ParisTech
David.Ryckelynck@mines-paristech.fr

Bibliographie : Stabilité et mécanique non linéaire, Quoc-Son Nguyen, Etudes en mécanique des matériaux et des structures, Hermes, 2000

20 mars 2012

Evolution et stabilité

Avec le cours sur l'analyse de bifurcation nous avons vu que la stationnarité d'une énergie potentielle pouvait conduire à plusieurs points d'équilibre dans un diagramme ($\underline{u} \in \mathcal{V},\ \lambda$).

En réalité, certaines configurations d'équilibre ne sont pas observables, on pourrait dire qu'elle n'existent pas physiquement, du fait qu'elles sont instables.

Nous abordons le problème de stabilité en étudiant les systèmes dynamiques conservatifs (élasticité sans frottement). L'équilibre est vu comme un cas particulier de solution des équations de la dynamique du système, en régime stationnaire (en oubliant l'effet des conditions initiales).

On suppose que l'énergie potentielle $\mathcal{F}$ est différentiable.

Pour analyser les états hors équilibre en mécanique des milieux continus, nous devons utiliser le principe fondamental de la dynamique. Nous le faisons ici sous la forme du principe des travaux virtuels. Il faut alors introduire le travail virtuel des termes d'accélération W_a^*.

Le déplacement en tout point de Ω est une fonction du temps : $(\underline{x} \in \Omega,\ t) \rightarrow \underline{u}$, avec $t \geqslant 0$.

$$\boxed{W_a^* = \int_\Omega \rho\, \underline{\ddot{u}}\, \underline{u}^*\, d\Omega, \quad \underline{u} \in \mathcal{V}, \quad \underline{u}^* \in \mathcal{V}} \tag{1}$$

Principe fondamental de la dynamique

$$\boxed{W_a^* = W_{int}^* + W_{ext}^* \quad \forall\, \underline{u}^* \in \mathcal{V}} \tag{2}$$

Propriété des systèmes conservatifs :

$$\boxed{W_{int}^* + W_{ext}^* = -\mathcal{F}_{,u}(\underline{u})[\underline{u}^*] \quad \forall\, \underline{u}^* \in \mathcal{V}} \tag{3}$$

Hypothèse : l'énergie potentielle $\mathcal{F}$ est indépendante du temps.

Equation de mouvement : Trouver $\underline{u} \in \mathcal{V}$ tel que

$$\int_\Omega \rho\, \ddot{\underline{u}}\, \underline{u}^*\, d\Omega + \mathcal{F}_{,u}(\underline{u})[\underline{u}^*] = 0 \quad \forall\, \underline{u}^* \in \mathcal{V} \tag{4}$$

$$\underline{u}(\underline{x},\ t=0) = \underline{u}_{ini}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \tag{5}$$

$$\dot{\underline{u}}(\underline{x},\ t=0) = \underline{v}_{ini}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \tag{6}$$

Une position d'équilibre $\underline{u}_e$ est indépendante du temps. Elle vérifie nécessairement :

$$\boxed{\mathcal{F}_{,u}(\underline{u}_e)[\underline{u}^*] = 0 \quad \forall\, \underline{u}^* \in \mathcal{V}} \tag{7}$$

Une position d'équilibre $\underline{u}_e$ est stable si une petite perturbation des données initiales ($\underline{u}_{t=0} = \underline{u}_e,\ \dot{\underline{u}}_{t=0} = 0$) n'entraine qu'une faible évolution dynamique autour de l'équilibre.

Supposons que l'on connaisse une mesure de la distance entre $\underline{u}_e$ et le déplacement pertubé $\underline{u}$. Notons $d(t)$ cette distance.

Définition : Une position d'équilibre $\underline{u}_e$ est stable si et seulement si,

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \text{il existe} \quad \alpha \quad \text{tel que} \quad d(0) < \alpha \Rightarrow \quad d(t) < \epsilon \quad \forall t > 0.} \tag{8}$$

Il est possible de choisir une perturbation initiale pour qu'à chaque instant l'effet de cette perturbation soit borné par une borne donnée, quelle que soit sa valeur.

La notion de stabilité dépend de la définition de d.

Equation de mouvement linéarisée

La perturbation initiale étant supposée petite, nous considérons un développement de Taylor au premier ordre de l'équation de mouvement autour de la position d'équilibre $\underline{u}_e$. On introduit la différence $\underline{\phi} = \underline{u} - \underline{u}_e$.

On obtient l'équation linéarisée suivante :

$$\boxed{\int_\Omega \rho\, \underline{\ddot{\phi}}\, \underline{u}^*\, d\Omega + \mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{u}^*,\, \underline{\phi}] = 0 \quad \forall\, \underline{u}^* \in \mathcal{V}} \tag{9}$$

C'est une équation différentielle en temps "à coefficients" constants. On cherche $\underline{\phi}$ à l'aide d'une méthode de séparation des variables d'espace et de temps :

$$\underline{\phi}(\underline{x},\ t) = e^{s\,t}\, \underline{\psi}(\underline{x}) \tag{10}$$

On obtient le problème aux valeurs propres suivant : Trouver les solutions $(\underline{\psi},\ s)$ tel que,

$$s^2 \int_\Omega \rho\, \underline{\psi}\, \underline{u}^*\ d\Omega + \mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{u}^*,\ \underline{\psi}] = 0 \quad \forall\ \underline{u}^* \in \mathcal{V} \tag{11}$$

$$\Downarrow$$

$$s^2 = -\frac{\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi},\ \underline{\psi}]}{\int_\Omega \rho\, \underline{\psi}\, \underline{\psi}\ d\Omega} \tag{12}$$

Il y a une suite indénombrable de solutions $(\underline{\psi}_k,\ s_k)$. $\underline{\psi}_k$ est appelé mode propre du système. Les modes propres forment une base orthogonale de $\mathcal{V}$.

Ce problème est un problème de vibrations libres qui se distingue du problème usuel car il s'agit de vibrations libres autour d'un état qui n'est pas l'état naturel.

Théorème de Lyapunov

$$\underline{u} - \underline{u}_e = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, e^{s_k \, t} \, \underline{\psi}_k(\underline{x}) \qquad \text{pour le problème linéarisé}$$

- Si $\Re(s_k) < 0$ pour tout k, l'équilibre est asymptotiquement stable.
- S'il existe un indice k tel que $\Re(s_k) > 0$ alors l'équilibre est instable.
- Si $\Re(s_k) \leqslant 0$ pour tout k et s'il existe au moins un indice k tel que $\Re(s_k) = 0$ alors on ne sait pas conclure.

En mécanique, le premier cas n'est possible qu'en présence de dissipation mécanique, ce qui n'est pas le cas des systèmes conservatifs.

Cas d'une énergie potentielle strictement convexe localement

$$s_k^2 = -\frac{\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}_k, \underline{\psi}_k]}{\int_\Omega \rho\, \underline{\psi}_k\, \underline{\psi}_k\, d\Omega} \tag{13}$$

L'énergie potentielle est strictement convexe localement en $\underline{u}_e$, si et seulement s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_e$ de ce point tel que :

$$\boxed{\forall\, \underline{u}' \in \mathcal{V}_e \quad \mathcal{F}(\underline{u}') - \mathcal{F}(\underline{u}_e) - \mathcal{F}_{,u}(\underline{u}_e)[\underline{u}' - \underline{u}_e] > 0} \tag{14}$$

En utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2, avec $\underline{u}' = \underline{u}_e + \alpha\, \underline{\psi}$, on obtient :

$$\forall \underline{\psi} \quad \mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}, \underline{\psi}] > 0$$

Donc si lénergie potentielle est strictement convexe localement, alors $\Re(s_k) = 0$ pour tout k et on ne sait pas conclure au sujet de la stabilité, à l'aide du théorème de Lyapunov.

Théorème de Leujeune-Dirichlet

Théorème de Lejeune-Dirichlet : L'équilibre est stable,

- s'il correspond à un minimum local de l'énergie potentielle,

$$\boxed{\forall\, \underline{u}' \in \mathcal{V}_e, \quad \underline{u}' \neq \underline{u}_e, \quad \mathcal{F}(\underline{u}') > \mathcal{F}(\underline{u}_e)} \tag{15}$$

- si l'énergie potentielle est différentiable jusqu'au deuxième ordre,

$$\boxed{\forall\, \underline{u}' \in \mathcal{V}_e \quad \mathcal{F}(\underline{u}') - \mathcal{F}(\underline{u}_e) = \mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{u}' - \underline{u}_e, \underline{u}' - \underline{u}_e] + o(\left\|\underline{u}' - \underline{u}_e\right\|^2)} \tag{16}$$

- si la seconde variation est coercive dans $\mathcal{V}$,

$$\boxed{\forall\, \underline{\psi} \in \mathcal{V}_e \quad \mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}, \underline{\psi}] > a \left\|\underline{\psi}\right\|^2} \tag{17}$$

- si les déplacements perturbés sont suffisamment réguliers.

Ce théorème vient compléter le théorème de Liapunov.

Pour la démonstration de ce théorème, nous devons introduire l'énergie totale du système, noté $\mathcal{E}_T$, et la propriété de conservation de cette énergie pour les systèmes conservatifs.

Conservation de l'énergie totale

Définition : L'énergie totale du système mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

$$\boxed{\mathcal{E}_T(\underline{u},\ \underline{\dot{u}}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\, \underline{\dot{u}}\, \underline{\dot{u}}\, d\Omega + \mathcal{F}(\underline{u})} \tag{18}$$

Propriété : Pour les systèmes conservatifs, l'énergie totale est constante au cours du temps.

$$\mathcal{E}_T(\underline{u},\ \underline{\dot{u}}) = \mathcal{E}_T(\underline{u}_{ini},\ \underline{\dot{u}}_{ini}) \quad \forall t \geq 0 \tag{19}$$

$$\mathcal{E}_T(\underline{u},\ \underline{\dot{u}}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\, \underline{\dot{u}}\, \underline{\dot{u}}\, d\Omega + \mathcal{F}(\underline{u})$$

avec

$$\int_\Omega \rho\, \underline{\ddot{u}}\, \underline{u}^*\, d\Omega + \mathcal{F}_{,u}(\underline{u})[\underline{u}^*] = 0 \quad \forall\, \underline{u}^* \in \mathcal{V}$$

Calcul de la dérivée en temps de l'énergie totale.

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_T(\underline{u},\ \underline{\dot{u}}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(\rho\, \underline{\dot{u}}\, \underline{\dot{u}}) + (\rho\, \underline{\dot{u}}\, \underline{\dot{u}})\,\mathrm{div}(\underline{\dot{u}})\, d\Omega + \mathcal{F}_{,u}(\underline{u})[\underline{\dot{u}}] \tag{20}$$

Or, il y a conservation de la masse : $\frac{d}{dt}\rho + \rho\,\mathrm{div}(\underline{\dot{u}}) = 0$, donc :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_T(\underline{u},\ \underline{\dot{u}}) = \int_\Omega \rho\, \underline{\ddot{u}}\, \underline{\dot{u}}\, d\Omega + \mathcal{F}_{,u}(\underline{u})[\underline{\dot{u}}] \tag{21}$$

Or $\underline{\dot{u}} \in \mathcal{V}$, donc du fait que l'équation de mouvement est vérifiée on obtient :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_T(\underline{u},\ \underline{\dot{u}}) = 0 \tag{22}$$

Eléments de démonstration du théorème de Lejeune Dirichlet

Si l'on admet que l'énergie potentielle est différentiable jusqu'au deuxième ordre, alors dans un voisinage de $\underline{u}_e$ on a :

$$\forall \underline{u}_e \in \mathcal{V}_e \quad \mathcal{E}_T(\underline{u}, \dot{\underline{u}}) - \mathcal{E}_T(\underline{u}_e, \dot{\underline{u}}_e = 0) = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho(\dot{\underline{u}} - \dot{\underline{u}}_e)^2 d\Omega + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{u} - \underline{u}_e, \underline{u} - \underline{u}_e] + o(\left\|\underline{u} - \underline{u}_e\right\|^2)$$

Si la seconde variation est coercive dans $\mathcal{V}$:

$$\forall \underline{u}_e \in \mathcal{V}_e \quad d(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\,(\dot{\underline{u}} - \dot{\underline{u}}_e)^2 + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{u} - \underline{u}_e, \underline{u} - \underline{u}_e] > 0$$

et $d(t) = 0$ si et seulement si $\underline{u} = \underline{u}_e$.

Si l'on suppose $o(\left\|\underline{u}' - \underline{u}_e\right\|^2)$ négligeable, alors la conservation de l'énergie totale donne :

$$d(t) = d(0)$$

Donc pour avoir $d(t) < \epsilon \quad \forall t > 0$, il suffit de prendre $d(0) < \epsilon$ pour tout ϵ. Donc l'équilibre est stable.

Il existe des démonstrations rigoureuses ne reposant pas sur un développement de Taylor à l'ordre 2.

Critère de seconde variation

Si les conditions 1 et 2 du théorème de Lejeune Dirichlet sont vérifiées on obtient :
le critère de seconde variation : Si,

$$\boxed{\forall\, \underline{\psi} \in \mathcal{V},\ \underline{\psi} \neq 0 \quad \mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}, \underline{\psi}] > 0} \tag{23}$$

alors l'équilibre est stable.

Rappel, si $\exists \underline{\psi} \neq 0,\ \underline{\psi} \in \mathcal{V} \quad \mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}, \underline{\psi}] = 0$ alors la condition de bifurcation est vérifiée.

Pour les sollicitations quasistatiques, avec un chargement évolutif, le passage d'un point de bifurcation peut générer un changement de stabilité de l'équilibre.

Synthèse

L'étude de la seconde variation de l'énergie potentielle permet les conclusions suivantes :

- si $\forall \underline{\psi}_k \in \mathcal{V} \quad \mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}, \ \underline{\psi}] > 0$ le théorème de Lejeune Dirichlet nous permet d'affirmer que la position d'équilibre $\underline{u}_e$ est stable ;
- s'il existe $\underline{\psi}_k \in \mathcal{V}$ tel que $\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}, \ \underline{\psi}] = 0$ alors il peut y avoir bifurcation de la courbe d'équilibre,
- s'il existe $\underline{\psi}_k \in \mathcal{V}$ tel que $\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}, \ \underline{\psi}] < 0$ alors the théorème de Lyapunov nous permet d'affirmer que la position d'équilibre est instable.

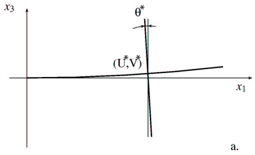

FIGURE: Description du champ de déplacement.

$$\underline{u} = u_1(x_1,\ x_3)\ \underline{x}_1 + u_3(x_1,\ x_3)\ \underline{x}_3 \quad \forall(x_1,\ x_2,\ x_3) \in \Omega \tag{24}$$

$$u_1 = U(x_1) + \theta(x_1)x_3 \qquad u_3 = V(x_1) \quad V_{,1} + \theta = 0 \tag{25}$$

$$(\varepsilon_{..}) = \begin{pmatrix} U_{,1} - V_{,11}x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$(q_{..}) = \begin{pmatrix} (U_{,1} - V_{,1}\ x_3)^2 + V_{,1}^2 & 0 & U_{,1}\ V_{,1} \\ 0 & 0 & 0 \\ U_{,1}\ V_{,1} & 0 & V_{,1}^2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Analyse de bifurcation pour le flambage

On suppose que les déformations longitudinales sont faibles ($U_{,1}$) et que l'effet du pincement de la poutre (q_{33}) est négligeable. Le terme en x_3^2 de $\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}$ est supposé négligeable (poutre mince). On obtient la forme classique suivante pour les termes non linéaires de $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$:

$$(q_{..}) = \begin{pmatrix} V_{,1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Après intégration dans les sections droites S on obtient :

$$\mathcal{F}(\underline{u}) = \int_{\mathcal{C}_0} (\frac{1}{2} E\, S\, (U_{,1} + \frac{1}{2} V_{,1}^2)^2 + \frac{1}{2}\, E\, I\, V_{,11}^2)\, dx_1 - W_{ext}(\underline{u},\, \lambda) \tag{29}$$

Suite de l'analyse de bifurcation pour le flambage

Soit une poutre droite de section S et de longueur L, soumise à une force de compression $\lambda > 0$ en $x_1 = L$, en appui simple en $x_1 = 0$ et $x_1 = L$.
On a : $W_{ext} = -\lambda\, U(L)$, $U(0) = 0$, $V(0) = 0$, $V(L) = 0$.
On obtient donc :

$$\mathcal{F}(\underline{u},\, \lambda) = \int_{\mathcal{C}_0} (\frac{1}{2} E\, S\, (U_{,1} + \frac{1}{2} V_{,1}^2)^2 + \frac{1}{2}\, E\, I\, V_{,11}^2)\, dx_1 + \lambda\, U(L) \tag{30}$$

L'équation d'équilibre est donnée par :

$$\int_0^L (E\, S\, (U_{,1} + \frac{1}{2} V_{,1}^2)\, (\delta U_{,1} + \delta V_{,1}\; V_{,1}) + \; E\, I\, \delta V_{,11}\; V_{,11})\, dx_1 + \lambda\, \delta U(L) = 0 \quad \forall \delta U\, \delta V \tag{31}$$

Avec par définition des efforts intérieurs :

$$N = \int_S \sigma_{11}\, dS = E\, S\, (U_{,1} + \frac{1}{2} V_{,1}^2), \quad M = \int_S x_3\, \sigma_{11}\, dS = -E\, I\, V_{,11}$$

On obtient :

$$\int_0^L (N\, (\delta U_{,1} + \delta V_{,1}\; V_{,1}) - M\, \delta V_{,11})\, dx_1 + \lambda\, \delta U(L) = 0 \quad \forall \delta U\, \delta V \tag{32}$$

Première intégration par partie :

$$N(L)\delta U(L) - M(L)\delta V_{,1}(L) + M(0)\delta V_{,1}(0) - \int_0^L N_{,1}\delta U dx_1 + \int_0^L N V_{,1}\delta V_{,1} + M_{,1}\delta V_{,1} dx_1 + \lambda\delta U(L) = 0 \tag{33}$$

Suite de l'analyse de bifurcation pour le flambage

On pose $Q = N\, V_{,1} + M_{,1}$.

Deuxième intégration par partie :

$$N(L)\delta U(L) - M(L)\delta V_{,1}(L) + M(0)\delta V_{,1}(0) + Q(L)\, V_{,1}(L) - \int_0^L N_{,1}\delta U dx_1 - \int_0^L Q_{,1}\delta V_{,1} dx_1 + \lambda\delta U(L) = 0 \tag{34}$$

Donc :

$$N_{,1} = 0, \quad Q_{,1} = 0, \quad N(L) = -\lambda, \quad M(0) = 0, \quad M(L) = 0$$

Solution triviale : état de compression avec de faibles déformations linéaires $U_e = -\frac{\lambda}{E\,S}\, x_1$, $V_e = 0$.

Suite de l'analyse de bifurcation pour le flambage

Rappel :

$$\mathcal{F}_{,u}(\underline{u},\ \lambda)[\delta \underline{u}] = \int_0^L (E\,S\,(U_{,1} + \frac{1}{2} V_{,1}^2)\,(\delta U_{,1} + \delta V_{,1}\ V_{,1}) + \ E\,I\,\delta V_{,11}\ V_{,11})\,dx_1 + \lambda\,\delta U(L) \quad (35)$$

Calcul de la seconde variation de l'énergie potentielle, avec $\underline{\phi} = (U_\phi,\ V_\phi)$:

$$\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u},\ \lambda)[\delta \underline{u},\ \underline{\phi}] = \int_0^L (E\,S\,(U_{\phi,1} + V_{\phi,1}\ V_{,1})\,(\delta U_{,1} + \delta V_{,1}\ V_{,1}) \quad (36)$$

$$+ E\,S\,(U_{,1} + \frac{1}{2} V_{,1}^2)\,\delta V_{,1}\ V_{\phi,1} \quad (37)$$

$$+\ E\,I\,\delta V_{,11}\ V_{\phi,11})\,dx_1 \quad (38)$$

Au point d'équilibre $\underline{u}_e(\lambda) = (-\frac{\lambda}{E\,S}\,x_1,\ 0)$ on a :

$$\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e,\ \lambda)[\delta \underline{u},\ \underline{\phi}] = \int_0^L (E\,S\,U_{\phi,1}\,\delta U_{,1} \quad (39)$$

$$-\ \lambda\,\delta V_{,1}\ V_{\phi,1} \quad (40)$$

$$+\ E\,I\,\delta V_{,11}\ V_{\phi,11})\,dx_1 \quad (41)$$

Le mode de bifurcation est donné par :

$$\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e,\ \lambda_c)[\delta \underline{u},\ \underline{\psi}] = 0 \quad \forall\,\delta U\,\delta V \quad (42)$$

On trouve : $\lambda_c = \frac{\pi^2}{L^2}\,E\,I$, $U_\psi = 0$, $V_\psi = B\,\sin(\pi\,\frac{x_1}{L})$

Analyse de stabilité du flambage, critère de seconde variation

On obtient alors :

$$\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e,\ \lambda)[\underline{\psi},\ \underline{\psi}] = \int_0^L \Big(\frac{\lambda_c^2}{E\,I}\,B^2\ \sin^2(\pi\frac{x_1}{L}) \tag{43}$$

$$-\,\lambda\,\frac{\lambda_c}{E\,I}\,B^2\ \cos^2(\pi\frac{x_1}{L})\Big)\,dx_1 \tag{44}$$

$$\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e,\ \lambda)[\underline{\psi},\ \underline{\psi}] = \frac{\lambda_c}{E\,I}\,B^2\,\frac{L}{2}\,(\lambda_c - \lambda) \tag{45}$$

Pour $\lambda < \lambda_c$, $\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e,\ \lambda)[\underline{\psi}, \underline{\psi}] > 0$, l'équilibre est stable (Théorème de Lejeune Dirichlet).
Pour $\lambda = \lambda_c$, $\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e,\ \lambda)[\underline{\psi}, \underline{\psi}] = 0$, il y a bifurcation.
Pour $\lambda > \lambda_c$, $\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e,\ \lambda)[\underline{\psi}, \underline{\psi}] < 0$, l'équilibre est instable (Théorème de Lyapunov).