

# Table des matières

<b>7</b>	<b>Éléments de théorie des poutres planes</b>	<b>61</b>
7.1	Définitions . . . . .	61
7.1.1	Modélisation géométrique . . . . .	61
7.1.2	Principe de Saint-Venant . . . . .	62
7.1.3	Modélisation des actions mécaniques . . . . .	63
7.2	Solution de Saint-Venant . . . . .	64
7.2.1	Contraintes . . . . .	64
7.2.2	Déplacements . . . . .	65
7.2.3	Discussion . . . . .	66
7.3	Approche par le principe des travaux virtuels . . . . .	67
7.3.1	Rappel : le principe des travaux virtuels . . . . .	67
7.3.2	Cinématique de la poutre de Timoshenko . . . . .	68
7.3.3	Traitement des équations . . . . .	68
7.3.4	Caractérisation de l'équilibre . . . . .	70
7.3.5	Lois de comportement . . . . .	71
7.3.6	Remarques . . . . .	72
7.4	Poutre sandwich . . . . .	73
7.4.1	Evaluation des efforts intérieurs . . . . .	74
7.4.2	Forme générale . . . . .	75



# Chapitre 7

## Eléments de théorie des poutres planes

La théorie des poutres s'applique sur des «solides élancés». De façon traditionnelle, le calcul de poutres fait partie du domaine de la *résistance des matériaux (RDM)*. Cette discipline, longtemps enseignée en tant que telle, a permis pendant longtemps de calculer de façon analytique des treillis complexes, des ponts, des ouvrages d'art divers. Les mêmes calculs sont maintenant effectués numériquement, au moyen de codes de calcul par éléments finis. On abordera ici deux approches de la théorie des poutres :

- au travers d'une brève revue du problème de Saint-Venant, solution analytique tridimensionnelle sur un tronçon de poutre,
- au moyen du principe des puissances virtuelles, qui permet d'évaluer des solutions approchées.

### 7.1 Définitions

#### 7.1.1 Modélisation géométrique

Les poutres ne sont pas forcément des prismes. Le modèle géométrique qui est employé se résume à :

- une *ligne moyenne*  $C$ , de point courant  $G$ , avec  $s$ , abscisse curviligne à partir de  $O$ . On définit le long de cette ligne  $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$ , trièdre de Fresnet orthonormé, où  $R$  est le *rayon de courbure*. On rappelle les égalités suivantes :

$$\underline{t} = \frac{OG}{ds} \quad \underline{n} = R \frac{d\underline{t}}{ds} \quad \underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{n} \quad (7.1)$$

- une section droite,  $S$  de la poutre, dans le plan  $(\underline{n}, \underline{b})$ , de contour  $\Gamma$

Pour que la théorie soit applicable, il est nécessaire que les sections droites soient lentement variables ou constantes en fonction de  $s$ , et que la plus grande dimension de la section droite soit petite devant  $R$ , et devant la longueur de la poutre. Ces hypothèses permettent d'assimiler localement la poutre à un tronçon de prisme. On considère dans la suite une théorie en petites déformations et petits déplacements. Les actions mécaniques, charges et actions de liaison, s'appliquent sur la géométrie simplifiée. Elles sont représentées par des torseurs (un vecteur résultant et un moment résultant), que l'on définit donc sur la ligne moyenne. On construira également une cinématique simplifiée, permettant de reconstruire les déplacements approchés du milieu continu à partir de translations et de rotations d'un point de la ligne moyenne.

Le but de la théorie des poutres est de remplacer la solution tridimensionnelle par une solution *globale*, dans laquelle on écrira des *équations d'équilibre* entre les quantités moyennes qui définissent les efforts, une *cinématique* définissant les déplacements sur la structure simplifiée, et des *lois de comportement* qui relient les deux. Il s'agit de trouver une solution acceptable pour un problème qui est, en toute rigueur, incomplet, puisqu'on ne spécifiera pas de façon précise les efforts extérieurs sur la

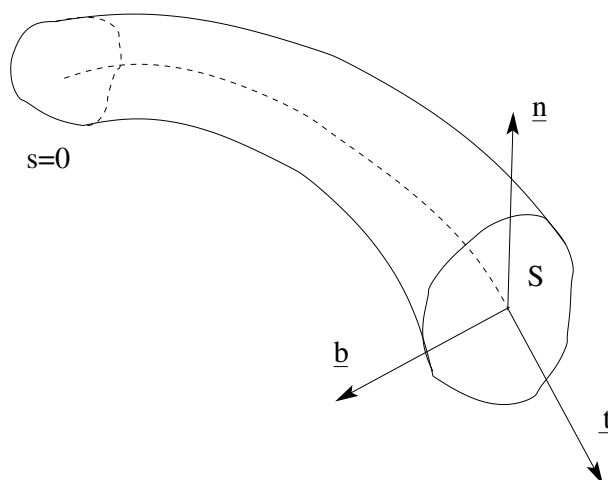


FIG. 7.1 – Représentation géométrique d'une poutre

géométrie tridimensionnelle. On ne cherchera à représenter que les moyennes, en termes de résultantes et de moments.

La figure 7.1 montre la forme générale d'une poutre. Dans chaque section droite, on définit le centre de gravité par :

$$\int_S \underline{GM} dS = 0 \quad (7.2)$$

On définit le *moment quadratique* par rapport à une droite  $\Delta$  de la section droite, en introduisant  $H$ , projection de  $M \in S$  sur  $\Delta$

$$I(S, \Delta) = \int_S ||\underline{HM}||^2 dS \quad (7.3)$$

Cette grandeur présente une analogie avec le moment d'inertie d'un solide autour d'une droite, mais dans le cas présent, le solide est plan et la masse surfacique est de 1. Il reste qu'on parle de moment d'inertie de la surface  $S$  autour de  $\Delta$ . On peut donc construire un tenseur d'inertie, qui est du second ordre, défini positif :

$$(I) = \begin{pmatrix} I_{22} = \int_S x_3^2 dS & I_{23} = - \int_S x_2 x_3 dS \\ I_{32} = - \int_S x_2 x_3 dS & I_{33} = \int_S x_2^2 dS \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Ce tenseur est diagonalisable. Il existe donc des *directions centrales principales*, pour lesquelles on définit les *moments quadratiques centraux principaux*

$$(I) = \begin{pmatrix} I_2 = \int_S x_3^2 dS & 0 \\ 0 & I_3 = \int_S x_2^2 dS \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Pour la suite du chapitre, on travaillera dans les axes ainsi définis. Dans le cas où la section présente deux axes de symétrie, ceux-ci correspondent bien entendu aux directions principales.

### 7.1.2 Principe de Saint-Venant

Le traitement de la théorie des poutres s'appuie sur le principe de Saint-Venant. Celui-ci considère le cas où, ayant résolu un problème de mécanique des milieux continus tridimensionnels, on évalue à l'aide de la solution obtenue les torseurs des efforts extérieurs dans une section quelconque. Si ceux-ci sont effectivement égaux à ceux qui sont appliqués, le principe de Saint-Venant indique que, même si

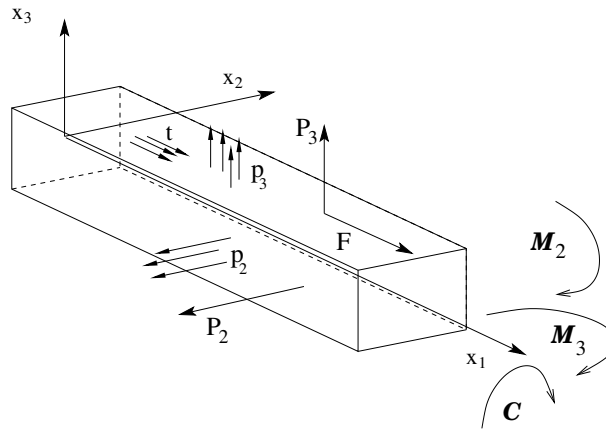


FIG. 7.2 – Bilan des efforts extérieurs

la répartition des contraintes n'est pas la même dans les deux cas, la solution trouvée sera valable, si on se place «suffisamment loin» du point d'application des charges. En d'autres termes, la perturbation n'est que locale. Dans la pratique, la solution est valide lorsqu'on a parcouru sur la ligne moyenne une distance qui est de l'ordre de deux à trois diamètres, si bien que la schématisation de type poutre est en général acceptée à partir d'un rapport 10 à 15 entre la longueur et la plus grande dimension de la section droite.

### 7.1.3 Modélisation des actions mécaniques

La figure 7.2 définit la manière dont on prend en considération les efforts extérieurs. Dans la mesure où la géométrie se résume en fait à une ligne et des sections droites, la représentation de la section elle-même n'est présente que de façon indicative. On prend en compte des forces et des moments, selon les trois directions de l'espace, et sous forme répartie ou ponctuelle. On définit donc :

- des forces concentrées  $F$  selon  $x_1$ ,  $P_2$  selon  $x_2$ ,  $P_3$  selon  $x_3$
- des forces surfaciques  $t$  selon  $x_1$ ,  $p_2$  selon  $x_2$ ,  $p_3$  selon  $x_3$
- des moments de flexion  $\mathcal{M}_2$  autour de  $x_2$ ,  $\mathcal{M}_3$  autour de  $x_3$
- un couple de torsion autour de  $x_1$ ,  $C$ .

On introduit les efforts intérieurs correspondants. Ils sont définis de manière globale sur une section courante. Les notations seront les suivantes :

- une résultante  $N$  selon  $x_1$ ,  $T_2$  selon  $x_2$ ,  $T_3$  selon  $x_3$  ;  $N$  est l'effort normal,  $T_2$  et  $T_3$  les composantes de l'effort tranchant
- un Moment de flexion  $M_2$  autour de  $x_2$ ,  $M_3$  autour de  $x_3$
- un Couple de torsion autour de  $x_1$ ,  $M_1$ .

On définit ainsi un torseur, qui est obtenu en intégrant les composantes suivantes du tenseur de contrainte :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad T_2 = \int_S \sigma_{12} dS \quad T_3 = \int_S \sigma_{13} dS \quad (7.6)$$

$$C = \int_S (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) dS \quad M_2 = \int_S x_3 \sigma_{11} dS \quad M_3 = - \int_S x_2 \sigma_{11} dS \quad (7.7)$$

Il n'est donc pas utile de connaître les composantes  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$  pour calculer les efforts résultants. Ceci va inspirer la solution de Saint-Venant qui est exposée en section suivante. Il faut noter également qu'il est possible de construire une infinité de champs de contraintes qui redonnent le torseur indiqué. Dans la pratique, la théorie des poutres ne précise pas la manière dont sont distribués les efforts (en application du principe de Saint-Venant).

## 7.2 Solution de Saint-Venant

### 7.2.1 Contraintes

L'hypothèse de Saint-Venant consiste à chercher la solution d'un tronçon de poutre droite sous la forme d'un état de contrainte contenant uniquement deux cisaillements et un terme de contrainte axiale :

$$(\sigma_{..}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

Chaque composante dépend pour le moment de la position  $(x_1, x_2, x_3)$  d'un point courant au sein de la poutre. On cherche à résoudre le problème à l'aide d'une formulation en contraintes. Le tenseur recherché doit vérifier :

- les équations d'équilibre

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \quad (7.9)$$

$$\sigma_{21,1} = 0 \quad (7.10)$$

$$\sigma_{31,1} = 0 \quad (7.11)$$

$$(7.12)$$

- les équations de Beltrami

$$-\Delta\sigma_{11} - \sigma_{11,11} = 0 \quad (7.13)$$

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{12} + \sigma_{11,12} = 0 \quad (7.14)$$

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{13} + \sigma_{11,13} = 0 \quad (7.15)$$

$$-\sigma_{11,22} + \nu\Delta\sigma_{11} = 0 \quad (7.16)$$

$$-\sigma_{11,23} = 0 \quad (7.17)$$

$$-\sigma_{11,33} + \nu\Delta\sigma_{11} = 0 \quad (7.18)$$

$$(7.19)$$

On déduit des équations précédentes la forme générale de la solution, dans laquelle on a introduit une fonction  $\phi$  dépendant de  $x_2$  et  $x_3$ , telle que  $\Delta\phi = 0$  :

$$\sigma_{11} = a_0 + a_1x_1 + (b_0 + b_1x_1)x_2 + (c_0 + c_1x_1)x_3 \quad (7.20)$$

$$\sigma_{12} = \phi_{,3} - \frac{a_1}{2}x_2 - c_1x_2x_3 - \frac{b_1}{1+\nu} \frac{x_3^2}{2} \quad (7.21)$$

$$\sigma_{13} = -\phi_{,2} - \frac{a_1}{2}x_3 - b_1x_2x_3 - \frac{c_1}{1+\nu} \frac{x_2^2}{2} \quad (7.22)$$

$$(7.23)$$

Lors du calcul des intégrales sur la section droite, un certain nombre de termes sont nuls, dans la mesure où les axes  $x_2$  et  $x_3$  sont des axes principaux. C'est le cas de  $\int_S x_2 dS$ ,  $\int_S x_3 dS$ ,  $\int_S x_2x_3 dS$ . On voit par ailleurs apparaître les moments quadratiques principaux. La forme finale de la solution en contrainte est :

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} + \frac{M_2}{I_2}x_3 - \frac{M_3}{I_3}x_2 \quad (7.24)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{T_3}{I_2}x_2x_3 - \frac{1}{1+\nu} \frac{T_2}{I_3} \frac{x_3^2}{2} \quad (7.25)$$

$$\sigma_{13} = -\frac{T_2}{I_3}x_2x_3 - \frac{1}{1+\nu} \frac{T_3}{I_2} \frac{x_2^2}{2} \quad (7.26)$$

$$(7.27)$$

La fonction  $\phi$  est solution de  $\Delta\phi = A$ , équation différentielle qu'il faut résoudre en prenant en compte respectivement une condition aux limites sur le contour de la section droite, et l'expression du moment de torsion :

$$d\phi = \left( -\frac{T_2}{I_3}x_2x_3 - \frac{T_3}{2(1+\nu)I_2}x_2^2 \right) dx_2 + \left( -\frac{T_3}{I_2}x_2x_3 + \frac{T_2}{2(1+\nu)I_3}x_3^2 \right) dx_3 \quad (7.28)$$

$$C = S \int_S \phi dS + \int_{\Gamma} \phi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) \quad (7.29)$$

$$+ \frac{T_2}{I_3} \int_S \left( -x_2^2x_3 + \frac{x_3^2}{2(1+\nu)} \right) dS + \frac{T_3}{I_2} \int_S \left( -x_3^2x_2 + \frac{x_2^2}{2(1+\nu)} \right) dS \quad (7.30)$$

### 7.2.2 Déplacements

On passe des contraintes aux déplacements par la loi de comportement. Le calcul des déplacements se fait de façon traditionnelle en calculant d'abord les rotations, puis les composantes du vecteur déplacement (voir le cours MMC en pages 46 et suivantes). Les rotations sont calculées à l'aide d'un tenseur  $\omega$ , partie antisymétrique du gradient de déplacement, dont les composantes  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{23}$  et  $\omega_{31}$  vérifient des équations différentielles du type :

$$\omega_{12,1} = \varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{12,1} \quad \omega_{12,2} = \varepsilon_{12,2} - \varepsilon_{22,1} \quad \omega_{12,3} = \varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{32,1} \quad (7.31)$$

et permutation circulaire.

Les composantes du déplacement sont obtenues par des équations du type :

$$u_{1,1} = \varepsilon_{11} \quad u_{1,2} = \varepsilon_{12} + \omega_{12} \quad u_{1,3} = \varepsilon_{13} + \omega_{13} \quad (7.32)$$

et permutation circulaire.

On trouve [?] :

$$u_1 = \frac{N}{ES}x_1 - \left( \frac{T_2}{EI_3}x_2 + \frac{T_3}{EI_2}x_3 \right) \left( Lx_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) + \left( \frac{M_2}{EI_2}x_3 - \frac{M_3}{EI_3}x_2 \right) x_1 \quad (7.33)$$

$$+ \frac{T_2}{EI_3} \left( v \frac{x_2^3}{6} - (2+v) \frac{x_2x_3^2}{2} \right) + \frac{T_3}{EI_2} \left( v \frac{x_3^3}{6} - (2+v) \frac{x_3x_2^2}{2} \right) \quad (7.34)$$

$$+ \frac{1+v}{E} \Phi + \gamma x_2 - \beta x_3 + \alpha_0 \quad (7.35)$$

$$u_2 = -v \frac{N}{ES}x_3 + \left( \frac{T_2}{2EI_3}(x_2^2 - x_3^2) + \frac{T_3}{EI_2}x_2x_3 \right) v(L - x_1) \quad (7.36)$$

$$+ v \left( \frac{M_3}{2EI_3}(x_2^2 - x_3^2) - \frac{M_2}{EI_2}x_2x_3 \right) + \frac{1+v}{E} Ax_1x_3 \quad (7.37)$$

$$+ \left( \frac{M_3}{EI_3} + \frac{T_2}{EI_3} \left( L - \frac{x_1}{3} \right) \right) \frac{x_1^2}{2} - \gamma x_1 - \alpha x_3 + \beta_0 \quad (7.38)$$

$$u_3 = -v \frac{N}{ES}x_3 + \left( \frac{T_3}{2EI_2}(x_3^2 - x_2^2) + \frac{T_2}{EI_3}x_2x_3 \right) v(L - x_1) \quad (7.39)$$

$$+ v \left( \frac{M_2}{2EI_2}(x_3^2 - x_2^2) - \frac{M_3}{EI_3}x_2x_3 \right) - \frac{1+v}{E} Ax_1x_2 \quad (7.40)$$

$$+ \left( -\frac{M_2}{EI_2} + \frac{T_3}{EI_2} \left( L - \frac{x_1}{3} \right) \right) \frac{x_1^2}{2} + \beta x_1 - \alpha x_2 + \gamma_0 \quad (7.41)$$

$$(7.42)$$

### 7.2.3 Discussion

La solution est bien donc relativement complexe, cependant la solution est adaptée pour une large gamme de problèmes, en flexion et en torsion. C'est la présence de  $\Phi$  qui rend la résolution analytique délicate (voire impossible), et dépendante de la forme de la section. Dans le cas général, il y a un couplage entre les sollicitations, c'est-à-dire par exemple qu'un effort tranchant conduit à un déplacement en torsion. Les couplages disparaissent lorsque les sections présentent des axes de symétrie. On obtient un résultat analytique dans le cas où la section est circulaire. En torsion pure, on trouve tout simplement que  $\phi$  vaut  $(R^2 - x_2^2 - x_3^2)/2$ , et on vérifie que la section reste plane ; sous l'effet d'un effort tranchant  $T_2$  uniquement, on trouve :

$$\sigma_{12} = \frac{T_2}{I_3} \left( \frac{3+2v}{8(1+v)} (x_3^2 - x_2^2 + R^2) - \frac{x_3^2}{2(1+v)} \right) \quad \sigma_{13} = -\frac{T_2}{I_3} \left( \frac{1+2v}{4(1+v)} x_3x_2 \right) \quad (7.43)$$

On note que le vecteur contrainte est bien nul sur la surface latérale.

D'une façon générale, le déplacement de la ligne moyenne est obtenu pour  $x_2 = x_3 = 0$ . Les sections droites restent planes sous l'action d'un effort normal ou d'un moment. Dans le cas d'un effort tranchant, on a un gauchissement des sections droites, ainsi, sous l'action de  $T_2$ , en notant  $U$  le déplacement selon  $x_1$  d'un point courant de la ligne moyenne, on a :

$$u_1 - U = \frac{T_2}{EI_3} \left( v \frac{x_2^3}{6} - (2+v) \frac{x_2x_3^2}{2} + (1+v) \Phi'_{x_2, x_3} \right) \quad (7.44)$$

Ce gauchissement reste néanmoins relativement peu important, ce qui encouragera en fait à construire des solutions dans lesquelles on conserve les sections planes.



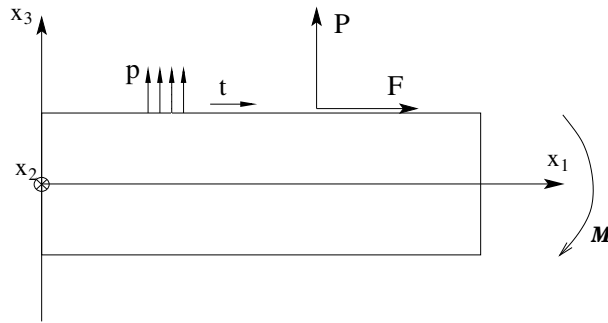


FIG. 7.3 – Géométrie et efforts extérieurs considérés

### 7.3 Approche par le principe des travaux virtuels

On va maintenant reprendre le problème en partant d'une hypothèse cinématique et en appliquant le principe des travaux virtuels. Pour plus de concision, on se résume à la résolution dans un plan. La figure reffig :bc montre la géométrie et résume les efforts appliqués. La ligne moyenne est l'axe  $x_1$ , la poutre se déforme dans le plan  $x_1 - x_3$ , qui est plan principal d'inertie. Comme l'axe  $x_1$  joint est le lieu des centres d'inerties des sections, on a  $\int_S x_3 dS = 0$ .

#### 7.3.1 Rappel : le principe des travaux virtuels

La figure reffig :mmc rappelle les grandeurs fondamentales que l'on considère sur un milieu continu. On introduit les définitions suivantes :

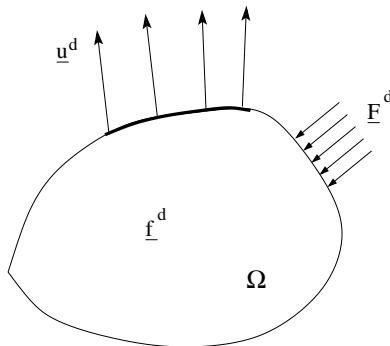
- Champ  $\underline{u}'$  CCA (cinématiquement admissible) :

$$\underline{u}' = \underline{u}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_u \quad \underline{\epsilon}' = 0.5 (\underline{\text{grad}} \underline{u}' + \underline{\text{grad}}^T \underline{u}') \quad (7.45)$$

- Champ  $\underline{\sigma}^*$  CSA (statiquement admissible) :

$$\underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \underline{F}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_F \quad \underline{\text{div}} \underline{\sigma}^* + \underline{f}^d = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (7.46)$$

L'évaluation du travail développé par  $\underline{\sigma}^*$  dans  $\underline{u}'$  conduit à l'enchaînement suivant, pour tout  $\underline{\sigma}^*$  CSA et  $\underline{u}'$  CCA *non* forcément reliés par la loi de comportement :



- Déplacement imposé  $\underline{u}^d$  sur la surface  $\partial\Omega_u$
- Force répartie imposée  $\underline{F}^d$  sur la surface  $\partial\Omega_F$
- Force volumique imposée  $\underline{f}^d$  à l'intérieur de  $\Omega$

FIG. 7.4 – Notations dans le milieu continu

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* (u'_{i,j} + u'_{j,i}) d\Omega \quad (7.47)$$

$$= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u'_{i,j} d\Omega \quad (7.48)$$

$$= \int_{\Omega} \left( (\sigma_{ij}^* u'_i)_{,j} - \sigma_{ij,j}^* u'_i \right) d\Omega \quad (7.49)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^* n_j u'_i dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u'_i d\Omega \quad (7.50)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} d\Omega = \int_{\partial\Omega} F_i u'_i dS + \int_{\Omega} f_i^d u'_i d\Omega \quad (7.51)$$

$$(7.52)$$

Le principe des travaux virtuels s'énonce alors de la façon suivante :  $\forall u'_i$ , variation autour d'un état d'équilibre ( $u'_i = 0$  sur  $\partial\Omega_u$ )

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} d\Omega = -\delta W_{int} = \delta W_{ext} = \int_{\partial\Omega_F} F_i^d u'_i dS + \int_{\Omega} f_i^d u'_i d\Omega \quad (7.53)$$

Dans la suite, on va appliquer ce principe sur les quantités globales définies sur la poutre.

### 7.3.2 Cinématique de la poutre de Timoshenko

L'idée consiste, pour un solide élancé, à postuler une description simplifiée, globale, de la structure, au lieu de chercher une résolution exacte. Les solutions obtenues sont d'autant plus satisfaisantes que l'élanement est important.

Pour traiter le cas d'une poutre *plane*, on conserve dans la description géométrique deux translations et un angle. Il leur correspondra deux forces et un moment, conjugués (au sens du travail virtuel). Pour le cas d'une poutre mince, on négligerait le cisaillement (modèle  $N, M$ , Navier–Bernoulli).

Sollicitation	axe de la poutre	perp à l'axe	moment de flexion
«force»	$N$	$T$	$M$
«déplacement»	$U$	$V$	$\theta$

On calcule donc successivement les déplacements et les déformations, en suivant les notations illustrées par la figure 7.5

$$u_1 = U'(x_1) + \theta' x_3 \quad u_3 = V'(x_1) \quad (7.54)$$

$$\varepsilon'_{11} = U'_{,1} + \theta'_{,1} x_3 \quad 2\varepsilon'_{13} = V'_{,1} + \theta' \quad (7.55)$$

### 7.3.3 Traitement des équations

#### Travaux virtuels des efforts internes

$$\delta W_{int} = - \int_V (\varepsilon'_{11} \sigma_{11} + 2\varepsilon'_{13} \sigma_{13}) dV \quad (7.56)$$

$$= - \int_L \left( U'_{,1} \int_S \sigma_{11} dS + \theta'_{,1} \int_S x_3 \sigma_{11} dS + (V'_{,1} + \theta') \int_S \sigma_{13} dS \right) dx_1 \quad (7.57)$$

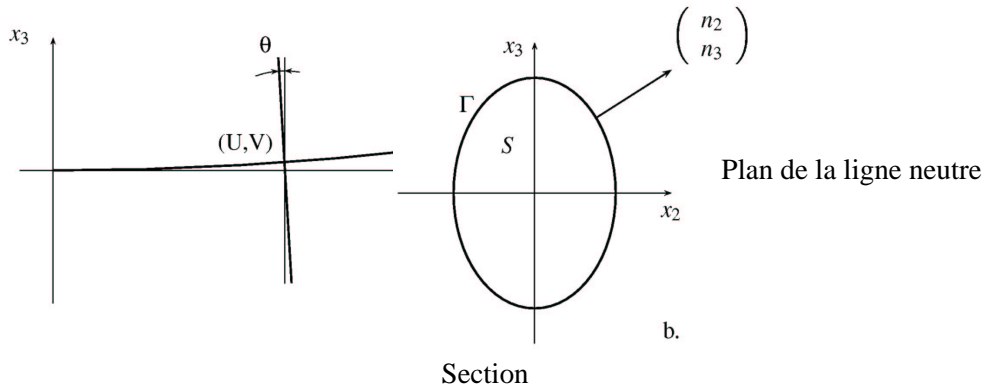


FIG. 7.5 – Schématisation de la poutre de Timoshenko

On introduit alors naturellement les quantités  $N$ ,  $T$ ,  $M$  conjuguées de  $U$ ,  $V$ ,  $\theta$  :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad T = \int_S \sigma_{13} dS \quad M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS \quad (7.58)$$

ce qui donne :

$$\delta W_{int} = - \int_L (NU'_{,1} + M\theta'_{,1} + T(V'_{,1} + \theta')) dx_1 \quad (7.59)$$

#### Traitement du travail des efforts intérieurs

A partir de :

$$\delta W_{int} = - \int_L (NU'_{,1} + M\theta'_{,1} + T(V'_{,1} + \theta')) dx_1 \quad (7.60)$$

On intègre classiquement par parties le travail des efforts intérieurs, par exemple :

$$\int_L NU'_{,1} dx_1 = \int_L ((NU')_{,1} - N_{,1}U') dx_1 = [NU']_0^L - \int_L N_{,1}U' dx_1 \quad (7.61)$$

d'où :

$$\delta W_{int} = - \int_L (-N_{,1}U' - M_{,1}\theta' - T_{,1}V' + T\theta') dx_1 \quad (7.62)$$

$$+ N(0)U'(0) - N(L)U'(L) + T(0)V'(0) - T(L)V'(L) \quad (7.63)$$

$$+ M(0)\theta'(0) - M(L)\theta'(L) \quad (7.64)$$

#### Travail des efforts extérieurs

On suppose que les forces concentrées sont appliquées aux extrémités ( $x_1 = 0$  et  $x_1 = L$ ), et on intègre entre 0 et  $L$  les efforts répartis. Les données sont :

- les forces normales  $F_0$  et  $F_L$ , tangentielles  $P_0$  et  $P_L$ ,
- les moments  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_L$ ,
- les efforts répartis sur la surface, représentés par des densités linéiques normales  $p$  et tangentielle  $t$  :

$$\delta W_{ext} = F_0U'(0) + F_LU'(L) + P_0V'(0) + P_LV'(L) + \mathcal{M}_0\theta'(0) + \mathcal{M}_L\theta'(L) \quad (7.65)$$

$$+ \int_L (pV' + tU') dx_1 \quad (7.66)$$

## 7.3.4 Caractérisation de l'équilibre

$$\delta W_{int} = - \int_L (-N_{,1}U' - M_{,1}\theta' - T_{,1}V' + T\theta') dx_1 \quad (7.67)$$

$$+ N(0)U'(0) - N(L)U'(L) + T(0)V'(0) - T(L)V'(L) \quad (7.68)$$

$$+ M(0)\theta'(0) - M(L)\theta'(L) \quad (7.69)$$

$$\delta W_{ext} = F_0U'(0) + F_LU'(L) + P_0V'(0) + P_LV'(L) + \mathcal{M}_0\theta'(0) + \mathcal{M}_L\theta'(L) \quad (7.70)$$

$$+ \int_L (pV' + tU') dx_1 \quad (7.71)$$

Comme l'égalité  $\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0$  est valable quel que soit le triplet  $(U', V', \theta')$ , on trouve, en identifiant terme à terme les expressions de  $\delta W_{int}$  et  $\delta W_{ext}$  :

$$N(0) = -F_0 \quad N(L) = F_L \quad T(0) = -P_0 \quad T(L) = P_L \quad (7.72)$$

$$M(0) = -\mathcal{M}_0 \quad M(L) = \mathcal{M}_L \quad (7.73)$$

$$N_{,1} + t = 0 \quad T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0 \quad (7.74)$$

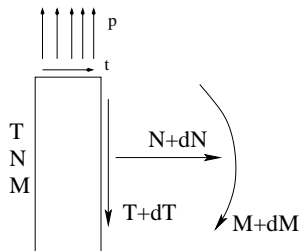
On pose :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad T = \int_S \sigma_{13} dS \quad M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS \quad (7.75)$$

On obtient :

$$\boxed{N_{,1} + t = 0 \quad T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0} \quad (7.76)$$

La figure 7.6 illustre la signification physique des équations précédentes pour une «tranche» de la poutre.



$$dN = -t dx_1 \quad (7.77)$$

$$dT = -p dx_1 \quad (7.78)$$

$$dM = T dx_1 \quad (7.79)$$

FIG. 7.6 – Equilibre d'une «tranche» de poutre

### 7.3.5 Lois de comportement

Pour établir les lois de comportement, il faut trouver des relations raisonnables entre les déplacements définis sur la ligne moyenne et les efforts globaux. L'approche par le principe des travaux virtuels laisse le choix du champ de contraintes statiquement admissible que l'on considère. Dans la suite, on va considérer une théorie très simplifiée, qui n'aura pas le même degré de raffinement que la solution de Saint-Venant : on s'inspire en effet directement du champ cinématiquement admissible pour évaluer un champ de contrainte, qui sera, en fait obtenu au travers de la loi de comportement, et qui ne sera pas rigoureusement statiquement admissible. On traite successivement les cas de la force axiale, du moment et de l'effort tranchant.

#### Lois de comportement : force axiale

On évalue la composante 11 du tenseur de contrainte comme  $E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})$ , et on néglige  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$ . Il vient :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS = \int_S E\varepsilon_{11} dS = \int_S E u_{1,1} dS = \int_S E U_{,1} dS + \int_S E (\theta x_3)_{,1} dS \quad (7.80)$$

Le deuxième terme du développement est nul, si bien que :

$$\boxed{N = U_{,1} E S} \quad (7.81)$$

#### Lois de comportement : moment

$$M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS = \int_S x_3 E \varepsilon_{11} dS = \int_S x_3 U_{,1} dS + \int_S x_3 (\theta x_3)_{,1} dS \quad (7.82)$$

Le premier terme du développement est nul, il vient :

$$M = \theta_{,1} \int_S x_3^2 dS = \theta_{,1} I \quad (7.83)$$

avec  $I = \int_S x_3^2 dS$ , moment quadratique par rapport à  $x_2$ , si bien que :

$$\boxed{M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS = EI \theta_{,1}} \quad (7.84)$$

Pour une section rectangulaire, de hauteur  $2h$  et de largeur  $b$ ,  $I = \frac{2bh^3}{3}$

#### Lois de comportement : cisaillement

$$T = \int_S \sigma_{13} = \int_S 2\mu \varepsilon_{13} dS = \int_S \mu (u_{1,3} + u_{3,1}) dS = \int_S \mu (\theta + V_{,1}) dS \quad (7.85)$$

si bien que :

$$\boxed{T = \mu S (\theta + V_{,1})} \quad (7.86)$$

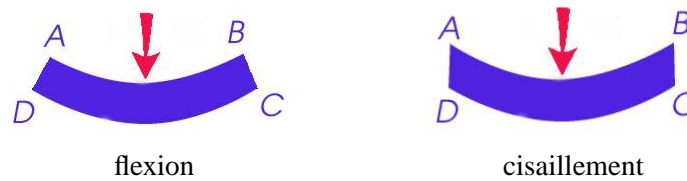


FIG. 7.7 – Forme de la déformée de la ligne moyenne

### Lois de comportement

Les relations suivantes constituent les lois de comportement globales de la structure.

$$\boxed{N = ESU_{,1} \quad T = \mu S(\theta + V_{,1}) \quad M = EI\theta_{,1}} \quad (7.87)$$

$$V_{,1} = -\theta + T/\mu S \quad (7.88)$$

$$\theta_{,1} = M/EI \quad (7.89)$$

$$M_{,1} - T = 0 \quad (7.90)$$

$$T_{,1} + p = 0 \quad (7.91)$$

### 7.3.6 Remarques

#### Déformées

La forme de la déformée de la ligne moyenne (fig. 7.7) dépend du type de chargement :

- Le terme de cisaillement, produit une évolution linéaire de la flèche.
- La flèche est obtenue comme solution d'un problème d'ordre 4 par rapport aux efforts appliqués :

$$V_{,11} = -\theta_{,1} = -\frac{M}{EI} \quad V_{,111} = -\frac{M_{,1}}{EI} = \frac{T}{EI} \quad V_{,1111} = -\frac{p}{EI} \quad (7.92)$$

- En présence d'un moment appliquée, la forme de la ligne moyenne sera circulaire, elle sera de degré 3 en cas d'effort concentré, et de degré 4 en cas d'effort réparti tout au long de la poutre.

#### Méthode de résolution

Le déplacement horizontal  $s$  s'obtient en intégrant la relation :

$$\boxed{U_{,1} = N/ES} \quad (7.93)$$

La rotation relative entre les sections  $s$  s'obtient en intégrant la relation :

$$\boxed{\theta_{,1} = M/EI} \quad (7.94)$$

La flèche est le résultat de la somme de deux termes, l'un provenant de la rotation elle même, et l'autre de l'effort tranchant  $T$  :

$$\boxed{V_{,1} = -\theta + T/\mu S} \quad (7.95)$$

### Expression des contraintes locales

La connaissance de  $U$ ,  $V$  et  $\theta$  permet de remonter aux champs de déformation et de contrainte locaux. ( $\simeq E\varepsilon_{11} = Eu_{1,1}$ ) est la somme de deux termes, dus à l'élongation et à la flexion :

$$\sigma_{11} \cong N/S + Mx_3/I \quad (7.96)$$

Si le cisaillement est négligeable

$$\theta = -V_{,1} \quad M = -EIV_{,11} \quad (7.97)$$

### Théorie de Navier–Bernoulli

Dans la théorie qui a été développée jusque là, une section plane reste plane, mais pas perpendiculaire à l'axe neutre. Si les cisaillements sont faibles (effet du moment dominant), il est raisonnable de rajouter cette dernière hypothèse. On retrouve alors la théorie dite classiquement de Navier-Bernoulli. Dans ce cas, il faut assurer  $\varepsilon_{13} = 0$ , ce qui entraîne la condition suivante sur l'hypothèse cinématique :

$$2\varepsilon_{13} = V_{,1} + \theta = 0 \quad (7.98)$$

La conséquence immédiate est que  $T$  est nul.

### Prise en compte du gauchissement de section

Comme on peut le constater en se référant à la solution de Saint-Venant, la méthode présentée ici n'est qu'approchée, surtout dans le cas où le cisaillement est important. Ainsi, il est facile de vérifier par exemple que le résultat en contrainte  $\sigma_{13}$  ne vérifie pas les conditions aux limites, puisque,  $\sigma_{13}$  étant uniforme, le cisaillement calculé n'est pas nul en surface. Par ailleurs, les équations d'équilibre non utilisées ne sont pas vérifiées. L'approximation se justifie néanmoins en raison des ordres de grandeur respectifs de chacune des composantes de contrainte mises en jeu. Il est relativement simple d'apporter une première amélioration en considérant que la section  $S$  peut devenir gauche. Cela conduit à postuler un champ de déplacement tridimensionnel de la forme, où  $\eta_i$  désigne le "gauchissement longitudinal" :

$$\begin{aligned} u_1(X) &= u(s) + \theta(s)x_3 + \eta_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(X) &= \eta_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(X) &= v(s) + \eta_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

La seule modification à apporter aux équations consiste à introduire un coefficient  $k$ , dit *de section réduite* dans l'expression du cisaillement, qui devient :

$$T = \mu(S/k)(\theta + V_{,1}) \quad (7.99)$$

Ce coefficient vaut 6/5 pour le cas d'une poutre de section rectangulaire.

## 7.4 Poutre sandwich

On continue ici à utiliser une approche relativement grossière, qui consiste à évaluer le champ de contrainte à partir du champ de déplacement. On suppose donc que, en présence de plusieurs couches, on continue à avoir la même cinématique. Contrairement au cas du matériau homogène, il y a maintenant une distribution spatiale des propriétés élastiques, qui dépendent de la cote  $x_3$  dans la section. Ceci interdit de sortir les modules des intégrales, et conduit donc à des moyennes différentes, prenant en compte à la fois la géométrie et le comportement.

### 7.4.1 Evaluation des efforts intérieurs

#### Effort normal

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad (7.100)$$

La contrainte  $\sigma_{11}$  est *discontinue*, et :  $\sigma_{11}(x_3) = E(x_3)\epsilon_{11}$

$$\sigma_{11} = E(x_3)(U_{1,1} + \theta_{1,1}x_3) \quad (7.101)$$

$$N = U_{1,1} \int_S E(x_3) dS + \theta_{1,1} \int_S E(x_3)x_3 dS \quad (7.102)$$

Si  $E(x_3)$  est une fonction paire en  $x_3$ , et indépendante de  $x_2$  ; la seconde intégrale est nulle. On a :

$$N = \langle ES \rangle U_{1,1} \quad \text{avec} \quad \langle ES \rangle = \int_S E(x_3) dS \quad (7.103)$$

#### Poutre sandwich : moment

$$M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS \quad (7.104)$$

$$\sigma_{11} = E(x_3)(U_{1,1} + \theta_{1,1}x_3) \quad (7.105)$$

$$M = U_{1,1} \int_S x_3 E(x_3) dS + \theta_{1,1} \int_S E(x_3)x_3^2 dS \quad (7.106)$$

Si  $E(x_3)$  est une fonction paire en  $x_3$ , et indépendante de  $x_2$  ; la première intégrale est nulle. On a :

$$M = \langle EI \rangle \theta_{1,1} \quad \text{avec} \quad \langle EI \rangle = \int_S E(x_3)x_3^2 dS \quad (7.107)$$

#### Poutre sandwich : cisaillement

On ne peut pas comme dans les deux cas précédents accepter d'évaluer directement les composantes de contrainte à partir du comportement. On commet en effet une grossière erreur en ne prenant pas en compte la continuité de la composante  $\sigma_{13}$  à l'interface. La valeur de  $\sigma_{13}$  est limitée par le faible module de la mousse à l'intérieur de la poutre, et elle doit être nulle en surface externe, de normale  $x_3$ , qui est libre. Une pratique courante admet tout simplement de négliger la contribution des plaques métalliques externes ; on se limite à l'intégrale sur le cœur de la poutre, soit, en supposant que celui-ci est compris entre  $\pm h$  :

$$T = \int_S \sigma_{13} dS \approx \int_0^b \int_{-h}^{+h} \sigma_{13} dx_2 dx_3 = (V_{1,1} + \theta) \int_{-h}^{+h} 2b\mu(x_3) dx_3 \quad (7.108)$$

$$T \approx \langle \mu S \rangle_{-h}^{+h} (V_{1,1} + \theta) \quad (7.109)$$



### 7.4.2 Forme générale

Si la distribution des modules n'est pas paire en  $x_3$ , il y a un couplage entre traction et flexion. On doit écrire :

$$\begin{pmatrix} N \\ M \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_S E_i dS & \int_S E_i x_3 dS & 0 \\ \int_S E_i x_3 dS & \int_S E_i x_3^2 dS & 0 \\ 0 & 0 & \int_S \mu_i dS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{,1} \\ \theta_{,1} \\ V_{,1} + \theta \end{pmatrix} \quad (7.110)$$

On a introduit les quantités suivantes :

- ligne moyenne définie par :  $\int_S E_i x_3 dS = 0$
- rigidité équivalente de traction :  $\langle ES \rangle = \int_S E_i dS$
- rigidité équivalente de flexion :  $\langle EI \rangle = \int_S E_i x_3^2 dS$
- rigidité équivalente de cisaillement :  $\langle \mu S \rangle = \int_S \mu_i dS$

On a donc établi des lois de comportement simplifiées :

$$\boxed{N = \langle ES \rangle U_{,1} \quad T = \langle \mu S \rangle (\theta + V_{,1}) \quad M = \langle EI \rangle \theta_{,1}} \quad (7.111)$$

Tout ceci permet de retrouver les contraintes  $\sigma_{11}$  locales :

$$\boxed{\sigma_{11} \simeq E_i \left( \frac{N}{\langle ES \rangle} + \frac{M x_3}{\langle EI \rangle} \right)} \quad (7.112)$$

La composante  $\sigma_{11}$  présente donc à l'interface une discontinuité qui est dans la rapport des modules d'Young en direction 1. Ceci explique que ce sont les peaux qui assurent la résistance au moment de flexion. Si la poutre est suffisamment épaisse, et la peau mince, les peaux sont pratiquement en traction et en compression simple. Comme l'assemblage a permis de les éloigner de la ligne moyenne, la rigidité sera donc nettement plus grande.

Pour une bonne conception de l'assemblage, il faut vérifier que les contraintes de cisaillement qui se développent aux interfaces restent compatibles avec la résistance des joints de colle entre les différents matériaux.

## Résumé

La théorie de Timoshenko pour les poutres suppose qu'une section plane reste plane, mais pas forcément perpendiculaire à la ligne moyenne. La cinématique est :

$$\begin{aligned} u_1 &= U'(x_1) + \theta' x_3 & u_3 &= V'(x_1) \\ \varepsilon'_{11} &= U'_{,1} + \theta'_{,1} x_3 & 2\varepsilon'_{13} &= V'_{,1} + \theta' \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre global sont :

$$N_{,1} + t = 0 \quad T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0$$

Les équations de comportement global sont :

$$N = ESU_{,1} \quad T = \mu S(\theta + V_{,1}) \quad M = EI\theta_{,1}$$

Schéma de résolution :

$$T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0 \quad \theta_{,1} = M/EI \quad V_{,1} = -\theta + T/\mu S$$

Dans le cas de poutre sandwich symétrique, il n'y a pas de couplage traction–flexion, et on peut appliquer les mêmes équations, à condition d'effectuer des moyennes pondérées par le module de Young sur la section complète, et, dans le cas du cisaillement, en première approximation, sur la section de mousse.

# **Bibliographie**