

COMPARAISON DE LA FLEXION SUR APPUI SIMPLE D'UNE POUTRE HOMOGENE ET D'UNE POUTRE SANDWICH

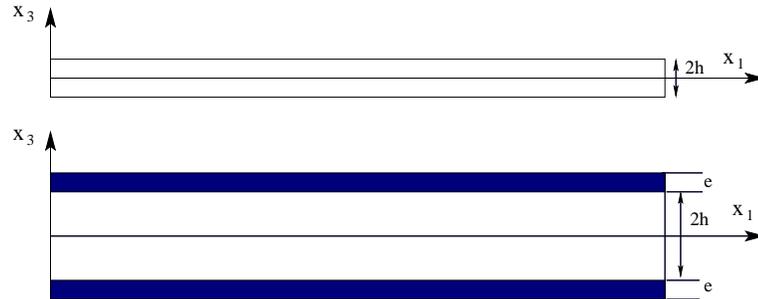


Figure 1 : Géométrie des poutres étudiées

Le but de cet exercice est de prendre conscience de l'importance qu'il y a à mettre le matériau qu'il faut à l'endroit où il faut pour avoir des structures à la fois légères et résistantes. La comparaison proposée porte sur deux poutres de section rectangulaire (figure 1), l'une réalisée en alliage d'aluminium (longueur $2l$, hauteur $2h$, épaisseur b), l'autre constituée de ce même alliage, collé sur un cœur de mousse polyuréthane. Ce deuxième assemblage présente environ la même masse que le premier, les tôles d'aluminium utilisées étant deux fois moins épaisses que dans le premier cas. L'épaisseur de mousse vaut $2h$. Chacune de ces deux poutres est posée sur deux appuis simples, et chargée ponctuellement en son milieu avec une force $-P$ (flexion 3 points).

1. *Traiter le cas de la poutre homogène, en supposant qu'une section plane de la poutre reste plane. Trouver en particulier les équations qui expriment l'équilibre du milieu curviligne en termes de N , T et M , respectivement effort normal et «effort tranchant», et moment de flexion autour de l'axe 2. Trouver les lois de comportement qui relient les quantités précédentes aux translations U et V d'un point*

de la ligne moyenne et de la rotation θ d'une section.

Les poutres étant simplement posées, et le chargement discret, l'effort tranchant T est discontinu au point d'application de la force, et la dérivée du moment l'est aussi. Le moment est nul aux deux extrémités (figure 2). Le diagramme de l'effort tranchant T et du moment de flexion M s'obtient en intégrant les équations d'équilibre, en prenant en compte la discontinuité sur T due à la force concentrée en $x_1 = l$. On trouve ainsi la forme de la figure 3. Le moment est négatif, ce qui indique que l'angle θ diminue. Il a effectivement une valeur positive en $x_1 = 0$, et nulle en $x_1 = l$.

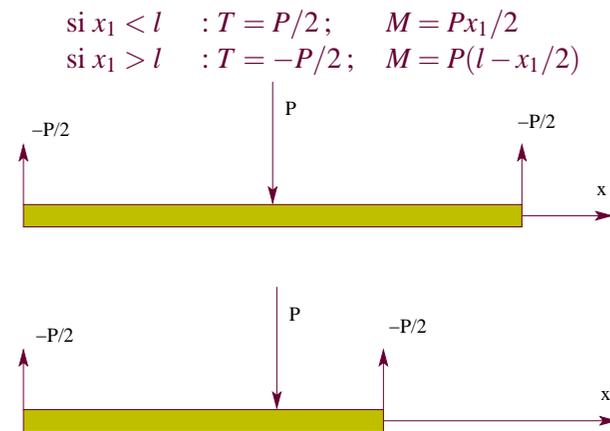


Figure 2 : Chargement

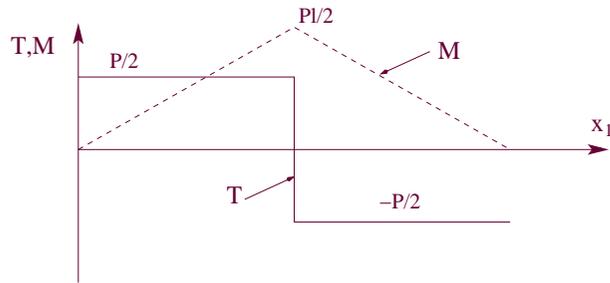


Figure 3 : Effort tranchant et moment

2. Trouver l'expression de la flèche pour cette poutre. Application numérique : $P = 160 \text{ N}$, $l = 250 \text{ mm}$, $E = 75000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $b = 100 \text{ mm}$, $h = 2 \text{ mm}$.

N étant nul, la contrainte σ_{11} est égale à Mx_3/I , avec $I = (2/3)bh^3$.

Pour $x_1 < l$, l'angle θ est tel que $\theta_{,1} = -Px_1/2EI$, et, comme il est nul en $x_1 = l$, on a :

$$\theta = \frac{P(x_1^2 - l^2)}{4EI}$$

La flèche s'exprime :

$$V = - \int_0^{x_1} \theta dx_1 + \int_0^{x_1} \frac{T}{\mu S} dx_1$$

En tenant compte du fait qu'elle s'annule en $x_1 = 0$, il vient :

$$V = \frac{Px_1}{2\mu S} + \frac{Pl^2x_1}{4EI} - \frac{Px_1^3}{12EI}$$

Soit, au milieu de la poutre ($x_1 = l$) :

$$V = \frac{Pl^3}{6EI} + \frac{Pl}{2\mu S}$$

Application numérique :

L'ensemble ($P = 160 \text{ N}$, $l = 250 \text{ mm}$, $E = 75000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$,

$b = 100 \text{ mm}$, $h = 2 \text{ mm}$) conduit à :

$$EI = \frac{2}{3} 100 \times 75000 \times 2^3 = 40000000 \text{ N.mm}^2$$

$$\mu S = \frac{75000}{2 \times 1.3} \times 100 \times 4 = 5769231 \text{ N}$$

$$v = (10.41 + 0.0017) \text{ mm}$$

Le terme lié à l'effort tranchant est négligeable.

POUTRE SANDWICH SUR DEUX APPUIS SIMPLES CHARGE CONCENTREE EN SON MILIEU

3. Indiquer les différences entre la poutre sandwich et la précédente. Etudier en particulier la continuité des composantes du tenseur des contraintes aux interfaces. Donner l'expression de la flèche. Application numérique : $P = 160 \text{ N}$, $l = 250 \text{ mm}$, $E_a = 75000 \text{ MPa}$, $E_m = 20 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $b = 100 \text{ mm}$, $e = 2 \text{ mm}$, $h = 15 \text{ mm}$.

Les calculs effectués ci-dessus restent valables, à condition d'utiliser les valeurs homogénéisées des produits EI et μS :

$$v = \frac{Pl^3}{6 \langle EI \rangle} + \frac{Pl}{2 \langle \mu S \rangle}$$

L'aluminium (E_a, μ_a), est situé entre les cotes $\pm h$ et $\pm(h + e)$. La mousse (E_m, μ_m) entre les cotes $\pm h$. Il vient donc :

$$\langle EI \rangle = \frac{2}{3} b (E_a ((e + h)^3 - h^3) + E_m h^3)$$

$$\langle \mu S \rangle = 2bh\mu_m$$

Application numérique :

L'ensemble ($P = 160$ N, $l = 250$ mm, $E_a = 75000$ MPa, $E_m = 20$ MPa, $\nu = 0.3$, $b = 100$ mm, $e = 2$ mm, $h = 15$ mm) conduit à :

$$\langle EI \rangle = \frac{2}{3} \times 100(75000 \times (17^3 - 15^3) + 20 \times 15^3)$$

$$\langle EI \rangle = 7694500000 \text{ N.mm}^2$$

$$\langle \mu S \rangle = 2 \times 100 \times 15 \times \frac{20}{2 \times 1.3} = 23077 \text{ N}$$

$$V = (0.054 + 0.867) \text{ mm}$$

4. *Montrer qu'il est important que la mousse soit capable d'offrir un minimum de résistance au cisaillement, faute de quoi la flèche due à celui-ci fait perdre l'avantage offerte par l'assemblage pour ce qui concerne la résistance au moment de flexion.*

C'est maintenant le terme lié à l'effort tranchant qui est prépondérant.

On note l'importance qu'il y a à conserver un matériau qui possède des propriétés non négligeables comme coeur de la poutre. Ainsi, avec un module d'Young qui de 0,79 MPa au lieu de 20 MPa, on trouverait une flèche de plus de 22 mm, en ayant donc perdu tout l'avantage de l'assemblage «sandwich».