

Table des matières

4	Plasticité et viscoplasticité 3D	31
4.1	Introduction	31
4.1.1	Décomposition de la déformation	31
4.1.2	Critères	32
4.1.3	Lois d'écoulement	32
4.2	Formulation des lois de comportement viscoplastiques	32
4.2.1	Écriture générale	32
4.2.2	Exemple	33
4.2.3	De la viscoplasticité à la plasticité	33
4.3	Formulation des lois de comportement plastique	34
4.3.1	Principe du travail maximal	34
4.3.2	Interprétation géométrique du principe de Hill	35
4.4	Directions d'écoulement associées aux critères courants	36
4.4.1	Critère de von Mises	36
4.4.2	Critère de Tresca	36
4.4.3	Critère de Drucker–Prager	37
4.5	Comportement parfaitement plastique	37
4.6	Viscoplasticité/Plasticité non associée	38

Chapitre 4

Plasticité et viscoplasticité 3D

4.1 Introduction

La grande diversité des matériaux réels se traduit par l'existence d'une multitude de lois de comportement et en particulier d'une grande variété de critères et de lois d'évolution aussi bien en élastoplasticité qu'en élastoviscoplasticité. Il est illusoire de vouloir établir une liste exhaustive des modèles, d'autant plus que les chercheurs continuent encore à proposer de nouvelles versions. Aussi ce chapitre sera-t-il consacré à une tâche plus modeste qui consiste à présenter le cadre général d'écriture, en illustrant l'exposé par les lois les plus classiques, et en se limitant aux transformations infinitésimales (petits déplacements et petits gradients de déplacements). On considérera d'abord les modèles pour lesquels la surface de charge n'évolue pas (elle pourra éventuellement être de rayon nul en viscoplasticité), donc qui ne présentent pas d'écrouissage. L'introduction de l'écrouissage se fera au chapitre suivant. Pour le moment, on résume les concepts généraux qui ont été introduits dans les chapitres précédents.

4.1.1 Décomposition de la déformation

Le tenseur symétrique des déformations $\underline{\varepsilon}$ est décomposé en trois parties :

- Une partie élastique $\underline{\varepsilon}^e$ fonction de la variation du tenseur de contrainte $\underline{\sigma}$ entre l'état actuel et l'état initial (contrainte à l'état de référence, $\underline{\sigma}_I$; dans un grand nombre d'applications, il s'agit de l'état de contraintes nulles, mais il est par exemple toujours présent en géotechnique). En élasticité linéaire :

$$\underline{\varepsilon}^e = \underline{\Lambda}^{-1} : (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_I) \quad (4.1)$$

- Une partie de dilatation thermique $\underline{\varepsilon}^{th}$ fonction de la température actuelle T et de la température à l'état de référence T_I . Elle s'écrit à l'aide d'un tenseur $\underline{\alpha}$, qui dépend éventuellement de la température, et qui est sphérique dans le cas des matériaux isotropes.

$$\underline{\varepsilon}^{th} = (T - T_I) \underline{\alpha} \quad (4.2)$$

- Une partie non élastique $\underline{\varepsilon}^{ne}$, elle-même décomposée en une partie plastique $\underline{\varepsilon}^p$ et une partie viscoplastique $\underline{\varepsilon}^{vp}$, (régies par des lois d'écoulement en élastoplasticité et en élastoviscoplasticité).

D'où :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\Lambda}^{-1} : (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_I) + \underline{\varepsilon}^{th} + \underline{\varepsilon}^p + \underline{\varepsilon}^{vp} \quad (4.3)$$

Cette dernière décomposition de la partie non élastique des déformations exprime le fait que, durant une transformation du matériau, divers mécanismes peuvent rentrer en jeu conduisant à une dissipation de l'énergie (irréversibilité) et que, dans l'échelle des temps considérée, la viscosité de certains mécanismes peut être négligée (plasticité instantanée $\underline{\varepsilon}^p$) alors que pour les autres le temps réel doit intervenir dans les vitesses (déformations viscoplastiques $\underline{\varepsilon}^{vp}$).

4.1.2 Critères

Chacun des mécanismes responsables du comportement inélastique est caractérisé par un certain nombre de variables, appelées variables d'écroissage, caractérisant à un instant donné l'état du matériau, et l'influence du chargement thermomécanique passé. Comme indiqué au chapitre précédent, le domaine d'élasticité se définit dans l'espace des contraintes et des variables d'écroissage (et de la température). A température et écroissage fixés, c'est une partie de l'espace vectoriel de dimension 6 des tenseurs du second ordre symétriques, $D_e = \{\underline{\sigma} / f(\underline{\sigma}, A_I, T) \leq 0\}$, la condition $f(\underline{\sigma}, A_I, T) = 0$ définissant quant à elle la frontière du domaine d'élasticité. On ne considérera pas les variables A_I pour le moment.

4.1.3 Lois d'écoulement

Ce sont les règles qui vont permettre de définir la vitesse de déformation plastique ou viscoplastique lorsqu'on n'est plus en élasticité. L'étude des modèles rhéologiques a montré la nature des équations mises en jeu pour ce qui concerne l'intensité de la vitesse d'écoulement. Celle-ci est liée à la vitesse de contrainte ou de déformation totale pour un modèle plastique, et à l'état actuel de contrainte et des variables internes pour un modèle viscoplastique. Pour généraliser les résultats précédents au cas tridimensionnel, il importe de se préoccuper également de la direction de l'écoulement. Cette direction doit être définie par un tenseur dans l'espace vectoriel de dimension 6 des tenseurs du second ordre symétriques.

Les lois d'écroissage, définissant l'évolution du domaine d'élasticité, complètent le modèle pour le cas d'un matériau dont la résistance à la déformation évolue avec celle-ci. Elles seront abordées au prochain chapitre.

4.2 Formulation des lois de comportement viscoplastiques

4.2.1 Écriture générale

Pour définir un comportement viscoplastique, il faut disposer d'un modèle qui donne l'intensité de la vitesse de déformation viscoplastique (un scalaire) et sa direction (un tenseur du second ordre symétrique en petites déformations). Les deux chapitres précédents fournissent les briques nécessaires. Ainsi, la généralisation de l'écriture de la vitesse de déformation viscoplastique est-elle immédiate. On conserve la notion de fonction de viscosité ϕ , qui va continuer de porter sur la valeur de la fonction définissant le domaine d'élasticité, f . Dans la mesure où on dispose maintenant d'une expression valide sous chargement multiaxial pour f , on définira l'intensité de l'écoulement, ou vitesse de déformation viscoplastique équivalente, à l'aide d'une fonction ϕ ($\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$), par :

$$\dot{\nu} = \phi(\langle f \rangle) \quad (4.4)$$

Dans le cas général, la direction d'écoulement sera notée $\underline{\mathbf{N}}$. Il y a deux possibilités concernant la définition de la direction d'écoulement. Elle peut n'être pas liée à f , auquel cas on introduit généralement une fonction g , qui porte sur les mêmes variables que f , à savoir le tenseur de contraintes et les variables d'écroissage ($g : (\underline{\sigma}, A_I) \rightarrow g(\underline{\sigma}, A_I)$). On écrit :

$$\underline{\xi}^{vp} = \dot{\nu} \underline{\mathbf{N}} = \dot{\nu} \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.5)$$

La seconde possibilité, qui constitue un cas particulier important, consiste à utiliser le critère f pour définir la direction d'écoulement, si bien que f et g sont identiques. En appelant Ω la primitive de ϕ , on peut alors écrire :

$$\underline{\xi}^{vp} = \phi \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.6)$$

Dans un tel modèle, dit modèle *standard*, ou modèle de viscoplasticité *associée*, la direction d'écoulement est fournie par la normale à la surface de charge. La fonction Ω constitue un *potentiel viscoplastique* [3, 4], puisque sa donnée va suffire à caractériser complètement l'écoulement en intensité et direction. Dans la suite, on notera $\underline{\mathbf{n}}$ le gradient de f par rapport à $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\mathbf{n}} = \partial f / \partial \underline{\underline{\sigma}}$.

4.2.2 Exemple

La généralisation du modèle de Norton en adoptant le critère de von Mises, s'effectue simplement en utilisant comme critère la fonction f dépendant des contraintes uniquement, $f = J(\underline{\underline{\sigma}})$, et comme potentiel la fonction Ω suivante :

$$\Omega = \frac{K}{n+1} \left(\frac{J(\underline{\underline{\sigma}})}{K} \right)^{n+1} \quad (4.7)$$

On obtient alors :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{vp} = \left(\frac{J}{K} \right)^n \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (4.8)$$

Le premier terme de l'expression précédente donne l'intensité de l'écoulement, il est bien égal à $(|\underline{\underline{\sigma}}|/K)^n$ pour une sollicitation de traction simple. La dérivée partielle de J par rapport à $\underline{\underline{\sigma}}$ s'évalue simplement par :

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\mathbf{s}}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{s}}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\mathbf{s}}}}{J} : \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\mathbf{s}}}}{J} \quad (4.9)$$

Comme on l'a déjà souligné, pour un tel type de modèle, la limite d'élasticité est nulle en permanence, et le domaine d'élasticité est réduit à un point. Ce cas serait sans intérêt pour un modèle de plasticité indépendante du temps.

Pour retrouver le modèle de Bingham, il suffirait de prendre une fonction du second degré :

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{J(\underline{\underline{\sigma}}) - \sigma_y}{\eta} \right)^2 \quad (4.10)$$

4.2.3 De la viscoplasticité à la plasticité

La figure 4.1a montre la forme du potentiel viscoplastique Ω , fonction monotone croissante de f , telle que $\Omega(0) = 0$, qui illustre le fait que l'intensité de l'écoulement dépend de l'"altitude" du point de fonctionnement courant, et que, géométriquement, la direction du vecteur vitesse de déformation inélastique est normale aux surfaces équipotentielles. Comme indiqué au début de cette partie, on ne considère ici que le comportement sans écrouissage ; le domaine d'élasticité est donc défini uniquement en fonction de l'état de contrainte. Lorsque la fonction ϕ (ou Ω) devient de plus en plus non linéaire (par exemple en faisant le choix d'une fonction puissance dont l'exposant n tend vers l'infini), les projections des équipotentielles sur l'espace $(\underline{\underline{\sigma}})$ se resserrent autour de la surface $f = 0$. On définit ainsi une zone de l'espace dans laquelle le potentiel est nul, et une autre où il varie très rapidement. A la limite, Ω se confond avec la fonction indicatrice du domaine d'élasticité (Fig.4.1b), et on ne peut plus définir l'intensité de l'écoulement par $\partial \Omega / \partial f$.

On illustre ainsi la différence de nature entre les théories de viscoplasticité et de plasticité. Le cadre viscoplastique autorise, pour écrire un modèle, une grande liberté dans le choix de la fonction de viscosité, alors que, dans le cadre de la plasticité (du moins dans le cas de la plasticité associée), l'expression même du domaine d'élasticité détermine l'intensité de l'écoulement. C'est en effet la condition de cohérence $\dot{f} = 0$ qui va fournir en plasticité l'équation qui disparaît en raison de la singularité de la fonction indicatrice de f en $f = 0$. Le formalisme plastique consiste alors à remplacer $\partial \Omega / \partial f$ par le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$, qui sera déterminé avec la condition de cohérence :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (4.11)$$

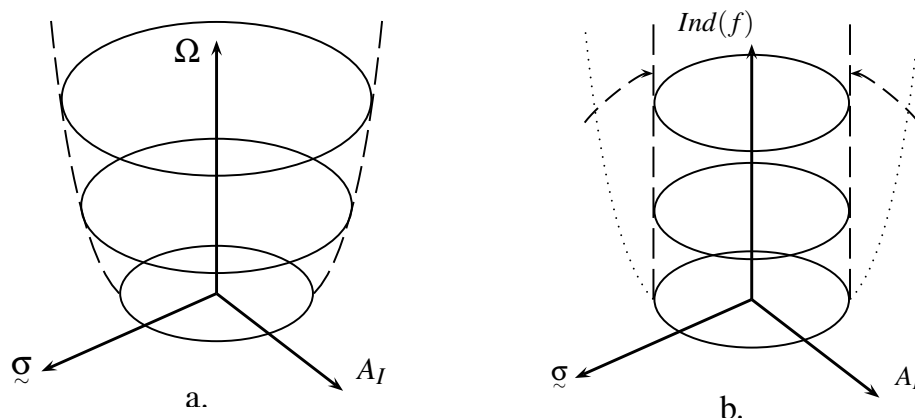


FIG. 4.1 – Comparaison des théories de plasticité et de viscoplasticité, (a) potentiel viscoplastique, (b) obtention d'un modèle plastique par passage à la limite

Dans un cas comme dans l'autre, on définit un écoulement qui respecte la *règle de normalité*, puisque la vitesse est portée par le gradient de la fonction de charge ($f = 0$ dans le cas plastique, $f = \text{const.}$ dans le cas viscoplastique). Cette règle aura d'importantes conséquences sur la réponse du matériau, en particulier dans le cas de sollicitations multiaxiales.

4.3 Formulation des lois de comportement plastique

Historiquement la théorie de la plasticité s'est développée indépendamment de celle de la viscoplasticité. On vérifie dans ce paragraphe que le chemin suivi amène exactement au même formalisme.

4.3.1 Principe du travail maximal

Il est souvent attribué à Hill [1], mais il a été discuté par von Mises [6] et Taylor [5]. Il stipule que, pour un $d\epsilon^p$ réel donné, le travail des contraintes réelles $\underline{\sigma}$ est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible $\underline{\sigma}^*$ (*id est* ne violant pas la loi de plasticité) associé à $\dot{\epsilon}^p$. Afin de conserver la forme en vitesse qui est employée tout au long de ce document, on donne ici la version en vitesse de déformation, qui fait donc intervenir la puissance plastique. En notant $\dot{\epsilon}^p$ le tenseur vitesse de déformation plastique réel, il vient :

$$(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) : \dot{\epsilon}^p \geq 0 \quad (4.12)$$

Ce principe peut en fait être démontré dans le cas de métaux qui se déforment par glissement et obéissent à la loi de Schmid. Il n'est pas vérifié par tous les matériaux, en particulier par les sols. Il a des conséquences importantes concernant la direction d'écoulement plastique, la forme de la surface de charge.

Si, se référant à la figure 4.1b, on cherche à construire une théorie dans laquelle on veut maximiser la puissance plastique en appliquant la *contrainte* (au sens d'un processus d'optimisation) $f(\underline{\sigma}^*) \leq 0$, on est amené pour résoudre le problème à introduire $F(\underline{\sigma}^*)$ tel que

$$F(\underline{\sigma}^*) = \underline{\sigma}^* : \dot{\epsilon}^p - \dot{\lambda} f \quad (4.13)$$

Le scalaire $\dot{\lambda}$ est un multiplicateur (voir par exemple [2]) qui sera déterminé par la suite. On aura un point stationnaire si $\partial F / \partial \underline{\sigma}^* = 0$. Ce point sera effectivement un maximum si la fonction f est convexe. On retrouve ainsi :

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.14)$$

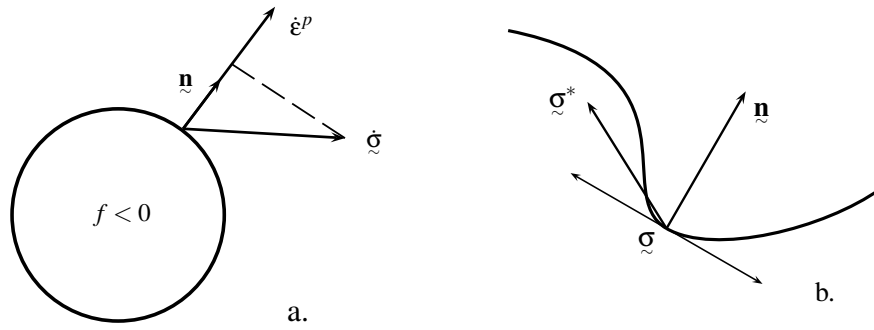


FIG. 4.2 – Conséquences du principe du travail maximal, (a) illustration de la règle de normalité, (b) convexité de f

On a bien retrouvé le cas du paragraphe précédent. La direction d'écoulement est donc bien portée par la normale à la surface de charge. La fonction indicatrice de f joue le rôle d'un pseudo-potential (car elle permet de déterminer la direction de l'écoulement, mais pas son intensité, comme dans le cas viscoplastique).

4.3.2 Interprétation géométrique du principe de Hill

Dans cette section, on retrouve les propriétés liées au principe de Hill par des considérations sur la géométrie du problème.

Règle de normalité

Si on choisit $\tilde{\sigma}^*$ sur la surface de charge, on vérifie que, si $\tilde{\sigma}$ est dans le domaine d'élasticité, $\dot{\tilde{\epsilon}}^p = \mathbf{0}$. Si le domaine d'élasticité ne présente pas de coins, le principe du travail maximal peut être appliqué à partir d'un point $\tilde{\sigma}$ de la surface de charge, en choisissant un point $\tilde{\sigma}^*$ infiniment proche, également sur la surface de charge. $\tilde{\sigma}^*$ se déduit de $\tilde{\sigma}$ à l'aide d'un tenseur $\tilde{\mathbf{t}}^*$ appartenant au plan tangent à la surface en $\tilde{\sigma}$ ($\tilde{\sigma}^* = \tilde{\sigma} + k\tilde{\mathbf{t}}^*$, avec $k > 0$). Le même raisonnement peut être recommencé en prenant $\tilde{\sigma}^* = \tilde{\sigma} - k\tilde{\mathbf{t}}^*$ comme point de départ, ce qui conduit aux deux inégalités suivantes :

$$k\tilde{\mathbf{t}}^* : \dot{\tilde{\epsilon}}^p \geq 0 \quad \text{et} \quad -k\tilde{\mathbf{t}}^* : \dot{\tilde{\epsilon}}^p \geq 0 \quad (4.15)$$

$$\text{si bien que : } \tilde{\mathbf{t}}^* : \dot{\tilde{\epsilon}}^p = 0 \quad (4.16)$$

La vitesse de déformation plastique est portée par la normale à la surface de charge.

On peut donc effectivement écrire l'écoulement plastique à l'aide de $\tilde{\mathbf{n}}$ et d'un scalaire, on retrouve ainsi une forme faisant intervenir le multiplicateur plastique, $\dot{\lambda}$. On peut alors montrer que ce multiplicateur est *toujours positif*, car, en choisissant maintenant $\tilde{\sigma}^*$ sur la normale au point $\tilde{\sigma}$, à l'intérieur du domaine d'élasticité, $(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^*) = k\tilde{\mathbf{n}}$ est colinéaire à $\tilde{\mathbf{n}}$ et de même sens ($k > 0$), si bien que $(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^*) : \dot{\tilde{\epsilon}}^p \geq 0$ devient :

$$k\tilde{\mathbf{n}} : \dot{\lambda}\tilde{\mathbf{n}} \geq 0 \quad \text{d'où : } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (4.17)$$

Dans le cas des matériaux qui vérifient le principe du travail maximal, la surface de charge joue en même temps le rôle de pseudo-potential plastique, et détermine l'écoulement plastique à un scalaire multiplicatif près. Si la surface n'est pas régulière et présente un coin au point $\tilde{\sigma}$, il y existe un cône des normales, à l'intérieur duquel se trouve la direction de l'incrément de déformation plastique.

Convexité de la surface de charge

En appliquant de nouveau le principe du travail maximal à partir d'un état de contrainte $\underline{\sigma}$ sur la surface de charge, et en considérant $\underline{\sigma}^*$ à l'intérieur du domaine d'élasticité, la règle de normalité permet maintenant d'écrire la relation suivante, qui exprime que la surface doit se trouver toute entière du même côté du plan tangent en $\underline{\sigma}$ (Fig.4.2b) :

$$(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) : \underline{\mathbf{n}} \geq 0 \quad (4.18)$$

Le domaine d'élasticité est donc convexe. Il en est de même pour la fonction f .

4.4 Directions d'écoulement associées aux critères courants

Les directions d'écoulement sont calculées dans un premier temps pour un matériau sans écrouissage. Les modifications apportées par l'écrouissage seront indiquées au chapitre suivant. Les résultats obtenus sont valables en plasticité comme en viscoplasticité.

4.4.1 Critère de von Mises

La fonction de charge s'écrit $f(\underline{\sigma}) = J(\underline{\sigma}) - \sigma_y$, si bien que la normale $\underline{\mathbf{n}}$ s'exprime :

$$\underline{\mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{\mathbf{s}}} : \frac{\partial \underline{\mathbf{s}}}{\partial \underline{\sigma}} \quad \text{ou :} \quad n_{ij} = \frac{\partial J}{\partial s_{kl}} \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.19)$$

En utilisant :

$$\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = J_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.20)$$

on obtient :

$$n_{ij} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{J} \quad \text{ou encore :} \quad \underline{\mathbf{n}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\mathbf{s}}}{J} \quad (4.21)$$

Dans le cas du critère de von Mises, la direction d'écoulement est donnée par le déviateur du tenseur des contraintes. Cette expression se simplifie en traction simple selon la direction 1 :

$$\underline{\mathbf{s}} = \frac{2\sigma}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad J = |\sigma| \quad \underline{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \text{signe}(\sigma) \quad (4.22)$$

4.4.2 Critère de Tresca

La loi d'écoulement se définit par secteur dans l'espace des contraintes principales. Par exemple pour le cas $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, la fonction de charge s'écrit : $f(\underline{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_3| - \sigma_y$, si bien que, pour l'ensemble des états de contrainte qui vérifient cette inégalité, la vitesse de déformation plastique possède les mêmes composantes, le matériau ne se déformant pas selon l'axe 2 (déformation de type cisaillement) :

$$\text{si } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad : \quad \underline{\underline{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

La définition de la normale pose un problème pour les états de contrainte correspondant aux points singuliers, ainsi en traction simple, lorsque par exemple $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, le critère s'exprimant alors indifféremment $f(\underline{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_2| - \sigma_y$, ou $f(\underline{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_3| - \sigma_y$. Il est alors classique de définir deux multiplicateurs plastiques, se référant chacun à une forme du critère. Si ces deux multiplicateurs sont choisis égaux, le modèle redonne la même forme que le critère de von Mises en traction simple. Par

contre, dès que l'état de contrainte s'éloigne de l'égalité stricte entre les composantes σ_2 et σ_3 , c'est l'un des deux régimes de type cisaillement qui prend le dessus.

$$\text{si } \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad : \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \dot{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

4.4.3 Critère de Drucker-Prager

La fonction de charge s'écrit $f(\underline{\underline{\sigma}}) = (1 - \alpha)J(\underline{\underline{\sigma}}) + \alpha \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}) - \sigma_y$, si bien que la normale $\underline{\underline{n}}$ possède une composante sphérique. La déformation plastique évaluée avec un tel critère est accompagnée d'une augmentation de volume quel que soit le chargement appliqué :

$$\underline{\underline{n}} = \frac{3}{2}(1 - \alpha)\frac{\underline{\underline{s}}}{J} + \alpha \underline{\underline{I}} \quad (4.25)$$

$$\text{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}^p) = 3\alpha\dot{\lambda} \quad (4.26)$$

De façon générale, tout critère qui fait apparaître la pression hydrostatique produit un terme de changement de volume accompagnant la déformation plastique. Dans le cas de l'expression 4.25, il est remarquable de noter également que, quel que soit le chargement appliqué, compression comme traction, la variation de volume est *toujours* positive. Ceci s'avère être un défaut pour le modèle, et explique que l'on construise également des critères dans lesquels on «ferme» le domaine d'élasticité du côté des pressions hydrostatiques négatives.

4.5 Comportement parfaitement plastique

Cas d'un matériau élastique-parfaitement plastique

Dans ce cas, la fonction de charge ne dépend que du tenseur de contrainte. Le domaine d'élasticité est fixe. Au cours de l'écoulement plastique, le point représentatif de l'état de contrainte ne peut que "tourner" autour du domaine d'élasticité. Le multiplicateur plastique est indéterminé ; la condition de charge plastique et la condition de cohérence deviennent respectivement :

$$\text{pour } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \text{ et } \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \quad : \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} \underline{\underline{n}} \quad (4.27)$$

$$\text{au cours de l'écoulement} \quad : \quad \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad (4.28)$$

Calcul du multiplicateur plastique

Le multiplicateur plastique est indéterminé pour un matériau élastique-parfaitement plastique chargé en vitesse de contrainte imposée. Cela est lié au fait que, le module plastique étant nul, il existe une infinité de positions équivalentes en déformation plastique pour un état de contrainte admissible donné, tel que $J(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_y$: ainsi, en traction simple $\sigma_{11} = \sigma_0$, tous les tenseurs diagonaux $(\underline{\underline{\varepsilon}}^p, (-1/2)\underline{\underline{\varepsilon}}^p, (-1/2)\underline{\underline{\varepsilon}}^p)$ sont des solutions possibles. Le fait d'imposer la vitesse de déformation totale modifie bien entendu ce résultat. Le multiplicateur plastique va pouvoir être déterminé, en combinant la loi de comportement élastique écrite en termes de vitesse et la condition de cohérence, soit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad (4.29)$$

En remplaçant $\underline{\underline{\sigma}}$ par sa valeur dans la deuxième égalité de l'équation 4.29, il vient :

$$\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p) = \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \dot{\lambda} \underline{\underline{n}} = 0 \quad (4.30)$$

si bien que :

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{\mathbf{n}} : \underline{\Lambda} : \underline{\dot{\varepsilon}}}{\underline{\mathbf{n}} : \underline{\Lambda} : \underline{\mathbf{n}}} \quad (4.31)$$

Dans le cas particulier de l'élasticité isotrope, et du critère de von Mises, on obtient successivement les simplifications suivantes :

$$\Lambda_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad n_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\mathbf{s}}}{J} \quad (4.32)$$

$$n_{ij} \Lambda_{ijkl} = 2\mu n_{kl} \quad n_{ij} \Lambda_{ijkl} n_{kl} = 3\mu \quad n_{ij} \Lambda_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} = 2\mu n_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4.33)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{2}{3} \underline{\mathbf{n}} : \underline{\dot{\varepsilon}} \quad (4.34)$$

Pour un chargement uniaxial, avec $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{11}$, cette dernière expression se réduit à :

$$\dot{\lambda} = \dot{\varepsilon} \text{signe}(\sigma) \quad \text{qui redonne :} \quad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} \quad (4.35)$$

Sous chargement uniaxial, la vitesse de déformation totale et la vitesse de déformation plastique sont identiques, puisque le niveau de contrainte reste inchangé pendant l'écoulement. *Ce résultat n'est pas général.* Lorsque le chargement s'effectue sur plusieurs composantes du tenseur de contrainte, il y a un déplacement du point représentatif de l'état de contrainte sur la surface de charge, qui peut toutefois atteindre une position asymptotique (voir à ce sujet l'exercice sur la traction-torsion d'un cylindre). On peut donc par exemple avoir des diminutions de contrainte sur certaines composantes en présence d'écoulement plastique.

4.6 Viscoplasticité/Plasticité non associée

Ce sont les théories qui s'appliquent pour les matériaux, tels les matériaux géologiques, qui ne vérifient pas la loi de normalité. Il faut alors utiliser une fonction pour la surface de charge, avec laquelle on détermine la condition de charge-décharge et que l'on utilise pour former la condition de cohérence. Par contre, la direction d'écoulement est définie par référence à une autre fonction. Un cas relativement courant dans les sols est celui où l'on utilise un critère de Mohr-Coulomb, avec des valeurs différentes de la poussée K_p . En général, l'angle Φ qui définit la demi-droite définissant la fonction de charge dans le plan T_n-T_t est plus faible que celui de la demi-droite qui définit la normale.

On écrira alors un modèle de viscoplasticité à partir d'une fonction f et d'une nouvelle normale $\underline{\mathbf{N}}$. Dans certains cas, mais ce n'est pas obligatoire, cette normale s'exprimera comme le gradient d'une nouvelle fonction, g :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \underline{\mathbf{N}} = \phi(f(\underline{\sigma})) \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.36)$$

Le modèle de plasticité se réécrira quant à lui à partir de :

$$\underline{\mathbf{n}} : \underline{\dot{\varepsilon}} = 0 \quad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \underline{\mathbf{N}} \quad \text{avec } \underline{\mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad \underline{\mathbf{N}} = \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.37)$$

Il vient donc :

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{\mathbf{n}} : \underline{\Lambda} : \underline{\dot{\varepsilon}}}{\underline{\mathbf{N}} : \underline{\Lambda} : \underline{\mathbf{n}}} \quad (4.38)$$

Résumé

La déformation totale se décompose en composantes élastique, plastique, viscoplastique, thermique et de changement de phase :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_I) + \boldsymbol{\varepsilon}^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$$

La contrainte et la déformation élastique sont reliées par le tenseur d'élasticité :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_I)$$

Dans le cas où il n'y a pas d'écrouissage, la surface de charge, définie par la fonction f , est fixe dans l'espace des contraintes. En plasticité parfaite, le domaine $f > 0$ est interdit, et il y a trois régimes de fonctionnement :

- intérieur du domaine d'élasticité, si $f = 0$
- décharge élastique, si $f = 0 \quad \dot{f} < 0$
- écoulement plastique, si $f = 0 \quad \dot{f} = 0$. Dans ce cas, l'écoulement plastique est normal à la surface de charge, on écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{n} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

L'ensemble de ces conditions se résumant par :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{n} \quad f \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{\lambda} f = 0$$

En viscoplasticité, le domaine $f > 0$ est autorisé, il y a deux régimes de fonctionnement :

- intérieur du domaine d'élasticité, si $f \leq 0$
- écoulement viscoplastique si $f > 0$. Dans ce cas, l'écoulement viscoplastique est normal à la surface de charge, on écrit, en notant Ω le potentiel viscoplastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \mathbf{n}$$

On peut construire des modèles viscoplastiques avec un domaine d'élasticité réduit à l'origine, car cela n'empêche pas de définir l'intensité de l'écoulement et sa direction, en se référant aux équipotentielles. Ce n'est bien sûr pas le cas des modèles plastiques.

Bibliographie

- [1] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity (1st ed, 1950)*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, 1998.
- [2] D.G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison–Wesley Pub. Comp., 1984.
- [3] J.R. Rice. On the structure of stress-strain relations for time–dependent plastic deformation in metals. *J. of Applied Mechanics*, 37 :728, 1970.
- [4] J.R. Rice. Inelastic constitutive relations for solids : An internal variable theory and its application to metal plasticity. *J. Mech. Phys. Sol.*, 19 :433–455, 1971.
- [5] G.I. Taylor. A connexion between the criterion of yield and the strain ratio relationship in plastic solids. *Proc. Royal Soc. London, A*, pages 441–446, 1931.
- [6] R. von Mises. Mechanik des plastischen Formänderung von Kristallen. 8 :161–185, 1928.