

## ENVELOPPE SPHÉRIQUE SOUMISE À UNE PRESSION INTÉRIEURE

On considère une enveloppe sphérique, homogène, de rayon intérieur  $a$ , de rayon extérieur  $b$ . Le matériau qui la constitue est élastique parfaitement plastique, à élasticité linéaire isotrope, ayant pour critère de plasticité le critère de von Mises ou celui de Tresca.

Partant de l'état initial naturel, on soumet cette sphère à une pression intérieure normale uniforme  $p$  que l'on fait croître à partir de 0 (Fig.1).

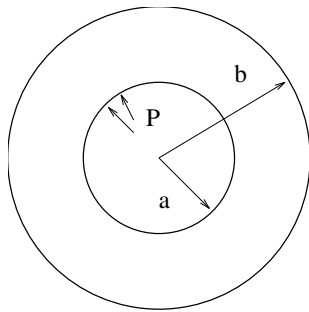


Figure 1 : Géométrie et chargement appliqué à la sphère sous pression

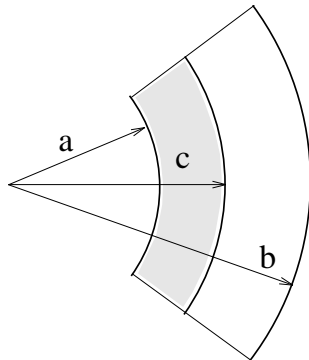


Figure 2 : Progression de la zone plastique à partir de la surface intérieure

### 1 Analyse élastique

#### 1.1 Donner la solution (champs des contraintes et des déplacements) en élasticité.

Le volume étudié est à symétrie sphérique, constitué d'un matériau homogène et isotrope ; les conditions aux limites possèdent aussi la symétrie sphérique. On est donc amené à chercher une solution du problème dans un système de coordonnées sphériques  $r, \theta, \phi$ , tel que les champs de déplacement, de contrainte et de déformation soient respectivement de la forme :

$$\begin{aligned} u_r &= h(r) & u_\theta &= u_\phi = 0 \\ \sigma_{rr} &= f_1(r) & \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\phi\phi} = g_1(r) & \sigma_{r\theta} &= \sigma_{r\phi} = \sigma_{\theta\phi} = 0 \\ \varepsilon_{rr} &= f_2(r) & \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\phi\phi} = g_2(r) & \varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{r\phi} = \varepsilon_{\theta\phi} = 0 \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre se réduisent à :  $\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0$

Les conditions aux limites statiques ont la forme :

$$\sigma_{rr}(r = a) = -p, \quad \sigma_{rr}(r = b) = 0$$

Les équations cinématiques ont la forme :  $\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$

La loi d'élasticité de Hooke donne :

$$E\varepsilon_{rr} = [\sigma_{rr} - 2\nu\sigma_{\theta\theta}] \quad E\varepsilon_{\theta\theta} = [\sigma_{\theta\theta}(1 - \nu) - \nu\sigma_{rr}]$$

En remplaçant les déformations par leur expression en fonction des déplacements, on obtient pour les contraintes les relations suivantes,  $\lambda$  désignant le coefficient de Lamé ( $\lambda = E\nu/(1 - 2\nu)/(1 + \nu)$ ) :

$$\sigma_{rr} = \frac{\lambda}{\nu} \left[ (1 - \nu) \frac{du_r}{dr} + 2\nu \frac{u_r}{r} \right] \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\lambda}{\nu} \left[ \nu \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right]$$

En substituant ces deux relations dans les équations d'équilibre, on

obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{2}{r^2} u_r = 0$$

soit

$$\left( \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_{,r} \right)_{,r} = 0$$

La solution de cette équation est :  $u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$

En remplaçant la valeur de  $u_r$  dans les expressions précédentes, on obtient :

$$\sigma_{rr} = \frac{\lambda}{\nu} \left[ (1+\nu)C_1 - 2(1-2\nu)\frac{C_2}{r^3} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\lambda}{\nu} \left[ (1+\nu)C_1 + (1-2\nu)\frac{C_2}{r^3} \right]$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  s'obtiennent à partir des conditions aux limites :

$$\sigma_{rr}(r=b) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)} b^3 C_1$$

$$\sigma_{rr}(r=a) = -p \Rightarrow C_1 = \frac{1-2\nu}{E} \frac{a^3}{b^3 - a^3} p$$

Finalement, on obtient :

$$\sigma_{rr} = -\frac{a^3}{b^3 - a^3} \left[ \frac{b^3}{r^3} - 1 \right] p$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left[ \frac{b^3}{2r^3} + 1 \right] p$$

$$u_r = \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left[ (1-2\nu)r + (1+\nu)\frac{b^3}{2r^2} \right] \frac{p}{E}$$

## 1.2 Déterminer la charge limite d'élasticité $P_e$ de la sphère sous pression pour les critères de von Mises et Tresca.

Le critère de plasticité de Tresca, comme celui de von Mises, est indépendant de la pression moyenne. On peut donc l'écrire en remplaçant le tenseur  $\underline{\sigma}$  par la somme de  $\underline{\sigma}$  et d'un tenseur sphérique. Ici, si l'on ajoute à  $\underline{\sigma}$  le tenseur  $-\sigma_{\theta\theta}\underline{\mathbb{I}}$ , on obtient un tenseur uniaxial, d'unique composante non nulle  $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ . D'après les formules précédentes, tant que l'enveloppe sphérique reste élastique, on a :

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\frac{3}{2} \frac{a^3}{b^3 - a^3} \frac{b^3}{r^3} p$$

Le critère de plasticité est atteint lorsque  $(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})$ , fonction décroissante de  $p$ , devient égale à la limite d'élasticité  $-\sigma_y$  en compression simple. Le premier point plastique apparaît donc en  $r = a$  et lorsque la pression  $p$  atteint la valeur  $P_e$ , limite d'élasticité initiale de la sphère sous pression :

$$P_e = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{a^3}{b^3} \right) \sigma_y$$

## 2 Analyse élasto-plastique

### 2.1 Donner la solution (champs des contraintes et des déplacements) en élasto-plasticité. Vérifier que la zone plastique se développe à partir de la face interne de la sphère creuse (Fig.2). Donner la relation entre le rayon de la zone plastique $c$ et la pression $p$ . Déterminer la pression limite conduisant à la rupture par déformation excessive, $P_p$ .

Lorsque la pression interne  $p$  croît au-delà de la valeur  $P_e$ , comme le premier point plastique est apparu sur la face intérieure de l'enveloppe, il est normal de supposer qu'une zone plastique se développe à partir de cette face, et occupe un volume  $a < r < c$ , où  $c$  est une fonction de  $p$ . La zone  $c < r < b$  est alors élastique. Le vecteur

contrainte sur une facette normale à l'axe  $r$  prend la même valeur dans la zone élastique et dans la zone plastique, à la traversée de la surface  $r = c$ . Sur cette surface la contrainte normale est alors égale en valeur absolue à la limite d'élasticité initiale d'une sphère creuse de rayon intérieur  $c$ , de rayon extérieur  $b$ , soumise à une pression interne, soit :

$$\sigma_{rr}(c) = -\frac{2}{3} \left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right) \sigma_y$$

Les contraintes dans la zone élastique sont donc données par les équations précédentes dans lesquelles on remplace  $a$  par  $c$  et  $p$  par  $-\sigma_{rr}(c)$  ; dans cette zone :

$$\sigma_{rr} = -\frac{2}{3} \frac{c^3}{b^3} \left(\frac{b^3}{r^3} - 1\right) \sigma_y$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{3} \frac{c^3}{b^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right) \sigma_y$$

$$u_r = \frac{2}{3E} \frac{c^3}{b^3} \left[(1-2\nu)r + (1+\nu)\frac{b^3}{2r}\right] \sigma_y$$

Etudions maintenant la zone plastique  $a < r < c$ . Pour y déterminer les contraintes, on dispose des équations d'équilibre et du critère de plasticité, vérifiés en tout point, soit :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\sigma_y$$

En combinant ces deux équations, on obtient successivement :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} - \frac{2}{r}\sigma_y = 0, \quad \sigma_{rr} = 2\sigma_y \ln(r) + C_3$$

La détermination de la constante d'intégration  $C_3$  s'effectue en  $r = c$ , en utilisant la continuité de la composante  $\sigma_{rr}$  :

$$2\sigma_y \ln(c) + C_3 = -\frac{2}{3} \left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right) \sigma_y$$

Finalement, dans la zone plastique, on trouve :

$$\sigma_{rr} = -\frac{2}{3} \sigma_y \left[1 + 3 \ln\left(\frac{c}{r}\right) - \frac{c^3}{b^3}\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{3} \sigma_y \left[\frac{1}{2} - 3 \ln\left(\frac{c}{r}\right) + \frac{c^3}{b^3}\right]$$

Ces contraintes dépendent du paramètre  $c$ , dont il faut donc déterminer l'évolution en fonction de la pression  $p$ . Dans la zone plastique, pour  $r = a$ , on a :

$$\sigma_{rr}(r = a) = -p \Rightarrow p = \frac{2}{3} \sigma_y \left[1 + 3 \ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{c^3}{b^3}\right]$$

La transformation de la sphère étant supposée infinitésimale,  $a$  et  $b$  sont des constantes. La dérivation de  $p$  par rapport à  $c$  donne alors :

$$\frac{dp}{dc} = \frac{2\sigma_y}{c} \left[1 - \frac{c^3}{b^3}\right]$$

Ce terme est toujours positif. Le rayon  $c$  de la zone plastique croît donc constamment avec  $p$  ; ce résultat est cohérent avec l'hypothèse que nous avons faite que la zone plastique se développe à partir de la face interne de la sphère creuse. Le rayon extérieur de cette zone atteint la valeur  $b$  lorsque  $p$  atteint la *pression limite*  $P_p$  :

$$P_p = 2\sigma_y \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

## 2.2 Déterminer les déformations plastiques et leurs vitesses.

S'il est possible, à partir de la solution en contrainte obtenue à la question précédente de construire, en utilisant la loi de comportement, un champ de déplacement qui soit compatible avec les liaisons (cinématiquement admissible), la solution trouvée est unique.

Conservant l'hypothèse de symétrie sphérique, on calcule le déplacement radial dans la zone plastique. Comme la déformation plastique ne produit pas de variation de volume du matériau, cette variation n'est due qu'à la partie élastique de la déformation, soit :

$$\varepsilon_{rr} + 2\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1-2\nu}{E} [\sigma_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta}]$$

On obtient donc ainsi l'expression de la composante radiale du déplacement :

$$\frac{du_r}{dr} + 2\frac{u_r}{r} = -\frac{2(1-2\nu)}{E} \sigma_y \left[ 3 \ln \left( \frac{c}{r} \right) - \frac{c^3}{b^3} \right]$$

$$u_r = \frac{C_4}{r^2} - \frac{2(1-2\nu)}{E} r \sigma_y \left[ \ln \left( \frac{c}{r} \right) + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{c^3}{b^3} \right) \right]$$

En utilisant le fait que le déplacement radial est continu à la traversée de la surface  $r = c$ , on peut déterminer la constante d'intégration :

$$C_4 = (1-\nu) \frac{\sigma_y}{E} c^3$$

On obtient finalement dans la zone plastique :

$$u_r = \frac{\sigma_y}{E} r \left[ (1-\nu) \frac{c^3}{r^3} - \frac{2}{3} (1-2\nu) \left[ 1 + 3 \ln \left( \frac{c}{r} \right) - \frac{c^3}{b^3} \right] \right]$$

A partir de cette expression du déplacement, on peut calculer les déformations totales dans la zone plastique. On obtient alors les déformations plastiques par différence entre les déformations totales

et les déformations élastiques calculées en utilisant les formules donnant les contraintes. Les seules composantes non nulles sont :

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{2\sigma_y}{E} (1-\nu) \left( 1 - \frac{c^3}{r^3} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\phi\phi}^p = -\frac{\sigma_y}{E} \left( (1-\nu) \left( 1 - \frac{c^3}{r^3} \right) \right)$$

Comme  $c$  est une fonction croissante de  $p$  et que le trajet de chargement étudié est par hypothèse à « $p$  croissant», on peut choisir  $c$  comme paramètre de chargement. Le tenseur de vitesse de déformation est du type compression simple :

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^p = \frac{d\varepsilon_{rr}^p}{dc} = -\frac{6\sigma_y}{E} (1-\nu) \frac{c^2}{r^3} < 0$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^p = \dot{\varepsilon}_{\phi\phi}^p = -\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{rr}^p$$

## 2.3 Que se passe-t-il si l'on effectue le trajet de charge suivant :

$$0 \rightarrow p_m (p_m > P_e) \rightarrow 0 \rightarrow p_m (p_m > P_e) ?$$

Si l'on a soumis une sphère creuse à une pression interne

$P_m > P_e$ , et qu'on la décharge jusqu'à  $p = 0$ , les contraintes résiduelles, présentes après cette décharge, seront égales à la différence entre les contraintes calculées en élasto-plasticité et la solution élastique correspondant à un chargement  $-P_m$ . On obtient alors un champ de contraintes résiduelles  $\sigma^r$  :

- dans la zone plastique ( $a < r < c$ ) :

$$\sigma_{rr}^r = -\frac{2}{3} \sigma_y \left[ 1 + 3 \ln \left( \frac{c}{r} \right) - \frac{c^3}{b^3} \right] + \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left[ \frac{b^3}{r^3} - 1 \right] P_m$$

$$\sigma_{\theta\theta}^r = \sigma_{\phi\phi}^r = \frac{2}{3} \sigma_y \left[ \frac{1}{2} - 3 \ln \left( \frac{c}{r} \right) + \frac{c^3}{b^3} \right] - \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left[ \frac{b^3}{2r^3} + 1 \right] P_m$$

– dans la zone élastique ( $c < r < b$ ) :

$$\sigma_{rr}^r = -\frac{2c^3}{3b^3} \left( \frac{b^3}{r^3} - 1 \right) \sigma_y + \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left[ \frac{b^3}{r^3} - 1 \right] P_m$$

$$\sigma_{\theta\theta}^r = \sigma_{\phi\phi}^r = \frac{2c^3}{3b^3} \left( 1 + \frac{b^3}{2r^3} \right) \sigma_y - \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left[ \frac{b^3}{2r^3} + 1 \right] P_m$$

Les équations précédentes ne sont valides que s'il n'apparaît aucune déformation plastique pendant la décharge. Pour que la plastification réapparaisse en compression, il faut traverser le domaine d'élasticité, et retrouver un point pour lequel :  $\sigma_{rr}^r - \sigma_{\theta\theta}^r = \sigma_y$ . Cela se produira effectivement à partir du moment où la pression maximale atteinte  $P_m$  est supérieure à  $2P_e$ . L'étude des variations de  $P_e$  et  $P_p$  en fonction de  $(b/a)$  montre que cela n'est possible que si la pression limite est elle-même supérieure à  $2P_e$ . Ceci fournit une condition géométrique sur la sphère. La figure 3 illustre le fait que  $P_p$  dépasse  $2P_e$  si le rapport  $(a/b)$  est inférieur à une valeur critique  $x$ , solution de l'équation  $(4/3)(1 - x^3) = 2\ln(x)$ , soit :

$$a/b < x \simeq 0.59$$

Dans le cas où il n'y a pas plastification à la décharge, on dit que la structure est adaptée. Il s'agit de régime de fonctionnement sûr, qui est utilisé dans la pratique pour les récipients sous pression : ceux-ci subissent avant mise en fonctionnement une opération de *timbrage*

au cours de laquelle ils sont portés à une pression supérieure à la pression de service ultérieure.

Si au contraire il y a replastification, des déformations plastiques cycliques vont se produire, avec un phénomène de fatigue plastique du matériau, qui conduira à la ruine de la structure aux cours des cycles successifs  $0 \rightarrow P_m \rightarrow 0 \rightarrow P_m \rightarrow \dots$

La figure 4 reproduit les variations des différentes composantes du tenseur des contraintes à pression maximale et après décharge, dans le cas où  $(a/b) = 0.75$ .

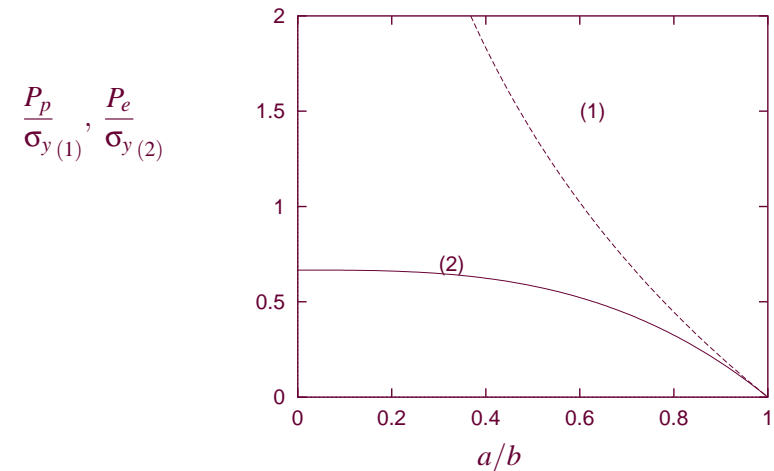
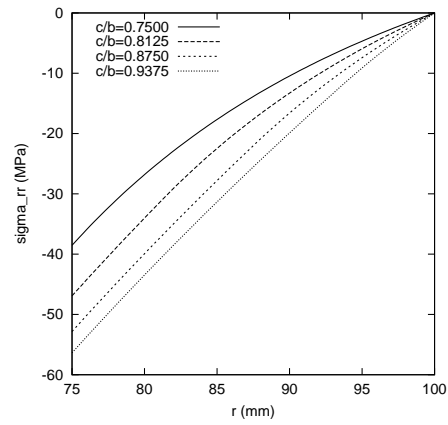
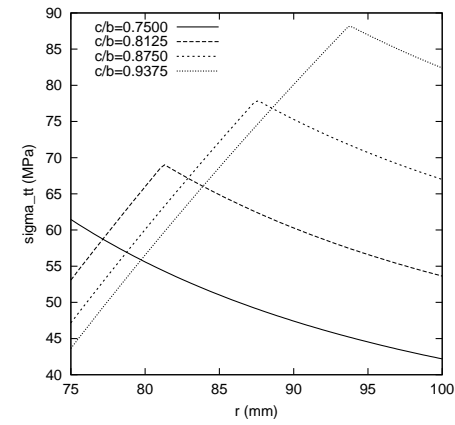


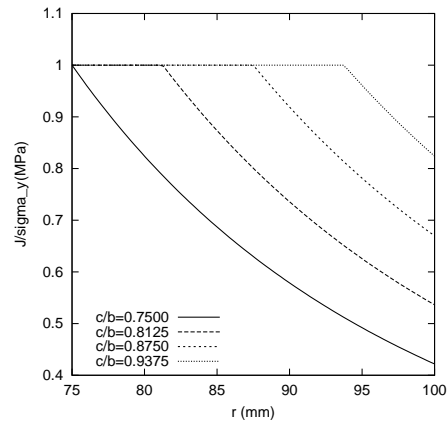
Figure 3 : Variation de  $P_e$  et  $P_p$  en fonction de  $a/b$



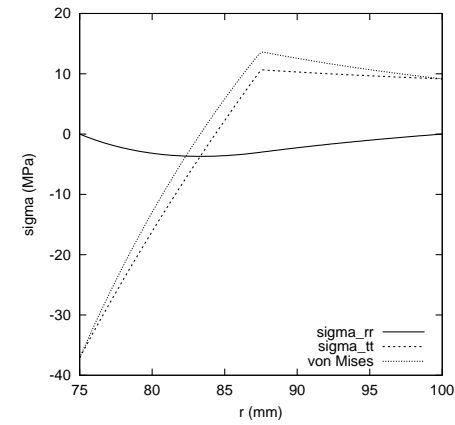
a.



b.



c.



d.

FIG. 1 – (a), (b) Profils de contraintes dans l'épaisseur du tube pour différents niveaux de pression, (c) mise en évidence de l'avancée de la zone plastique, (d) contraintes résiduelles après décharge.