

IAE Plaques

Saber EL AREM

Centre des Matériaux
Ecole des Mines de Paris/CNRS

Plan

Introduction : solides et structures minces

Introduction : définition d'une plaque

Efforts extérieurs et résultants

Plaques élastiques linéaires isotropes

Equations d'équilibre

Cinématique : Hypothèse des sections planes

Relations efforts résultants-déformations

Conditions aux limites

Exercices

Plan

Introduction : solides et structures minces

Introduction : définition d'une plaque

Efforts extérieurs et résultants

Plaques élastiques linéaires isotropes

Equations d'équilibre

Cinématique : Hypothèse des sections planes

Relations efforts résultants-déformations

Conditions aux limites

Exercices

Introduction : solides et structures minces

Les solides minces sont des solides tridimensionnels ayant des caractéristiques particulières au niveau **géométrique**, **cinématique** et **mécanique**.

Un solide 3D est un objet massif dont les trois dimensions sont du même ordre de grandeur. Les structures minces ou corps orientés ont au moins une dimension, appelée **épaisseur**, **petite** par rapport aux autres dimensions. On distingue :

- **plaque** : solide défini par une **surface plane** et une **épaisseur** h ;
- **coque** : solide défini par une **surface courbe** et une **épaisseur** h faible devant longueur, largeur et rayon de courbure ;
- **poutre droite** : solide défini par une **ligne droite** et par une **section** ;
- **arc** ou **poutre courbe** : solide défini par une **ligne courbe** et par une **section**.

Introduction : solides et structures minces

- **Les structures minces** de type poutre, arc, plaque et coque sont très répandues dans **le milieu naturel** (feuilles d'arbres, mollusques, cellules vivantes, etc.) et dans **les réalisations humaines** les plus diverses (charpentes, voûtes, réservoirs, caissons, tabliers de ponts, carrosseries automobiles, coques de bateaux, ailes d'avions, etc.).
- L'analyse du comportement et la conception des ces structures sont des activités importantes sur les plans techniques et économiques.
- Une enquête récente auprès **d'utilisateurs d'un grand code de calcul de structures** a révélé que **75%** des modélisations impliquaient des éléments finis de type **coque**.

Introduction : solides et structures minces

- Suivant l'ordre de grandeur de **l'épaisseur h** par rapport aux autres dimensions, on introduit parfois l'adjectif **mince** ou **épais**. Cette qualification n'implique pas seulement une caractéristique géométrique mais sous-entend également **un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal**.
- La géométrie d'une structure mince favorise le choix d'une cinématique particulière par rapport à la cinématique générale d'un solide.
- **Les théories linéaires** souvent adoptées pour les poutres, les plaques et coques sont des théorie dites du **premier ordre** où le champs de déplacement varie **linéairement en x_3 , sans variation d'épaisseur**, en incluant l'influence des déformations de cisaillement transversal. Ces théories sont basées sur **l'hypothèse des section droites**. Elles sont généralement associée au nom de **Timoshenko** pour les poutres et à ceux de **Reissner et Mindlin** pour les plaques.

Plan

Introduction : solides et structures minces

Introduction : définition d'une plaque

Efforts extérieurs et résultants

Plaques élastiques linéaires isotropes

Equations d'équilibre

Cinématique : Hypothèse des sections planes

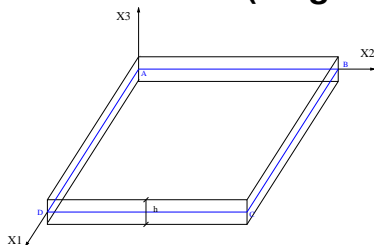
Relations efforts résultants-déformations

Conditions aux limites

Exercices

Définition d'une plaque

Une plaque est un solide défini par une **surface** de référence **plane** ($x_1 x_2$) et **une épaisseur**, **petite** par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur).



- **ABCD** : plan moyen. C'est également le **plan neutre** si les propriétés matérielles sont symétriques par rapport au plan ($x_1 x_2$).
- **h** : épaisseur de la plaque

Plan

Introduction : solides et structures minces

Introduction : définition d'une plaque

Efforts extérieurs et résultants

Plaques élastiques linéaires isotropes

Equations d'équilibre

Cinématique : Hypothèse des sections planes

Relations efforts résultants-déformations

Conditions aux limites

Exercices

Définitions des efforts extérieurs

Dans la suite on désigne par :

- S_f : la partie du contour de la plaque où des efforts sont imposés
- S_u : la partie du contour de la plaque où des déplacements (et rotations) sont imposés
- f_{v1} , f_{v1} et f_{v1} : les forces par unité de volume suivant x_1 , x_1 et x_3
- f_1 , f_2 , f_3 , m_1 et m_2 : les forces par unité de surface, avec :

$$f_1(x_1, x_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_{v1} dx_3 \quad f_2(x_1, x_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_{v2} dx_3 \quad f_3(x_1, x_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_{v3} dx_3$$

$$m_1(x_1, x_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 f_{v1} dx_3 \quad m_2(x_1, x_2) = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 f_{v2} dx_3$$

- Sur S_f agissent les efforts m_s et f_s par unité de longueur.

Définitions des efforts résultants

On désigne par

- N_1, N_2, N_3 : les efforts **résultants de membrane** (en N/m) :

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} dx_3 \quad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} dx_3 \quad N_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} dx_3$$

- M_1, M_2, M_{12} : les efforts **résultants de flexion** ou moments (en Nm/m) :

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{11} dx_3 \quad M_2 = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{22} dx_3 \quad M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{12} dx_3$$

- T_1, T_2 : les efforts résultants de cisaillement ou **efforts tranchants** (en N/m) :

$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13} dx_3 \quad T_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23} dx_3$$

On remarque que les moments M_1, M_2, M_{12} sont associés aux contraintes $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, ainsi M_1 ne représente pas un moment autour de x_1 .

Plan

Introduction : solides et structures minces

Introduction : définition d'une plaque

Efforts extérieurs et résultants

Plaques élastiques linéaires isotropes

Equations d'équilibre

Cinématique : Hypothèse des sections planes

Relations efforts résultants-déformations

Conditions aux limites

Exercices

Plaques élastiques linéaires isotropes

Grâce aux hypothèses simplificatrices :

- Pas de **variation d'épaisseur** de la plaque : $\varepsilon_3 = 0$.
- La contrainte σ_{33} est **négligeable** par rapport aux autres composantes du tenseur des contraintes.

La loi de Hooke peut être exprimée par :

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22})$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11})$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{12}$$

E module d'Young et ν coefficient de Poisson.

Plan

Introduction : solides et structures minces

Introduction : définition d'une plaque

Efforts extérieurs et résultants

Plaques élastiques linéaires isotropes

Equations d'équilibre

Cinématique : Hypothèse des sections planes

Relations efforts résultants-déformations

Conditions aux limites

Exercices

Equations d'équilibre d'une plaque

Les équations d'équilibre en un point de coordonnées x_1, x_2, x_3 s'écrivent :

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + f_{v1} = 0 \quad (A1)$$

$$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + f_{v2} = 0 \quad (A2)$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_{v3} = 0 \quad (A3)$$

L'équilibre global sur l'épaisseur de la plaque s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\text{équations}(A)\} dx_3 = 0$$

Soit

$$N_{1,1} + N_{12,2} + f_1 = 0$$

$$N_{12,1} + N_{2,1} + f_2 = 0$$

$$T_{1,1} + T_{2,2} + f_3 = 0$$

Equations d'équilibre d'une plaque

Les équations d'équilibre en un point de coordonnées x_1, x_2, x_3 s'écrivent :

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + f_{v1} = 0 \quad (A1)$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + f_{v2} = 0 \quad (A2)$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_{v3} = 0 \quad (A3)$$

L'équilibre des moments par rapport aux axes x_1 et x_2 s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \{ \text{équations}(A1 \text{ et } A2) \} dx_3 = 0$$

et conduit, en considérant $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ pour $x_3 = \pm \frac{h}{2}$ à :

$$M_{1,1} + M_{12,2} - T_1 + m_1 = 0$$

$$M_{12,1} - M_{2,2} - T_2 - m_2 = 0$$

Equations d'équilibre d'une plaque : récapitulatif

L'équilibre global sur l'épaisseur de la plaque s'écrit :

$$N_{1,1} + N_{12,2} + f_1 = 0$$

$$N_{12,1} + N_{2,1} + f_2 = 0$$

$$T_{1,1} + T_{2,2} + f_3 = 0$$

L'équilibre des moments par rapport aux axes x_1 et x_2 s'écrit :

$$M_{1,1} + M_{12,2} - T_1 + m_1 = 0$$

$$M_{12,1} - M_{2,2} - T_2 - m_2 = 0$$

En combinant ces équations, on obtient :

$$M_{1,11} + 2M_{12,12} - M_{2,22} + f_3 + m_{1,1} - m_{2,2} = 0$$

Plan

Introduction : solides et structures minces

Introduction : définition d'une plaque

Efforts extérieurs et résultants

Plaques élastiques linéaires isotropes

Equations d'équilibre

Cinématique : Hypothèse des sections planes

Relations efforts résultants-déformations

Conditions aux limites

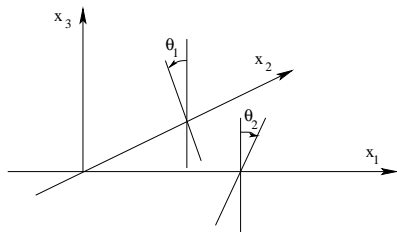
Exercices

Cinématique d'une plaque de Reissner-Mindlin

- Les points matériels situés sur **une normale** à la surface moyenne non déformée restent sur **une droite** dans la configuration déformée. Les déplacements U et V (suivant x_1 et x_2) d'un point quelconque (x_1, x_2, x_3) **varient linéairement** en x_3 et le déplacement transversal W (suivant x_3) n'est fonction que de x_1 et x_2 . Cette hypothèse permet de prendre en compte l'influence des déformations de CT.
- L'hypothèse d'une déformation transversale nulle : $\varepsilon_3 = 0$.
- L'hypothèse des contraintes plane : σ_3 est **négligeable** devant les autres contraintes.

Cinématique d'une plaque de Reissner-Mindlin

- **Plaque définie dans le plan (x_1-x_2) ; normale à la plaque x_3 , épaisseur h .**
- **Déplacement défini par 3 translations, U, V, W , et deux angles, θ_1 et θ_2 , qui sont fonctions de x_1-x_2 uniquement.**



$$u_1(x_1, x_2, x_3) = U + \theta_2 x_3$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = V - \theta_1 x_3$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = W$$

$$\varepsilon_{11} = U_{,1} + \theta_{2,1} x_3$$

$$\varepsilon_{22} = V_{,2} - \theta_{1,2} x_3$$

$$\varepsilon_{33} = 0$$

$$2\varepsilon_{12} = U_{,2} + \theta_{2,2} x_3 + V_{,1} - \theta_{1,1} x_3$$

$$2\varepsilon_{23} = -\theta_1 + W_{,2}$$

$$2\varepsilon_{31} = \theta_2 + W_{,1}$$

Plan

Introduction : solides et structures minces

Introduction : définition d'une plaque

Efforts extérieurs et résultants

Plaques élastiques linéaires isotropes

Equations d'équilibre

Cinématique : Hypothèse des sections planes

Relations efforts résultants-déformations

Conditions aux limites

Exercices

Lois de comportement

Considérons l'exemple de l'effort N_1 . Nous avons

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} dx_3$$

or

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22})$$

Ainsi

$$N_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (U_{,1} + \theta_{2,1} x_3 + \nu (V_{,2} - \theta_{1,2} x_3)) dx_3$$

La plaque étant symétrique par rapport au plan moyen ($x_1 x_2$), on obtient :

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (U_{,1} + \nu V_{,2})$$

Lois de comportement

Considérons maintenant l'exemple du moment M_1 . Nous avons

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{11} dx_3$$

or

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22})$$

Ainsi

$$M_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 (U_{,1} + \theta_{2,1} x_3 + \nu (V_{,2} - \theta_{1,2} x_3)) dx_3$$

La plaque étant symétrique par rapport au plan moyen ($x_1 x_2$), on obtient :

$$M_1 = D(\theta_{2,1} - \nu \theta_{1,2})$$

Avec $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$: **Rigidité à la flexion** de la plaque.

Remarque concernant la rigidité à la flexion

Si l'on avait considéré **une bande isolée** de largeur unitaire (selon x_2), et appliqué à cette bande la formule classique de la **flexion des poutres**, on aurait trouvé :

$$M_1 = EI\theta_{2,1} = \frac{Eh^3}{12}\theta_{2,1}$$

En comparant les deux résultats, on constate que la plaque est **plus rigide** que ne l'indique la théorie des poutres ; cette augmentation de rigidité $\frac{1}{1-\nu^2}$ vaut, dans le cas de l'acier, $\frac{1}{0.91} = 1.10$; elle est due au fait que, dans une plaque, la dilatation transversale ε_2 peut s'effectuer librement tandis que dans le cas d'une poutre, elle est empêchée par suite de la continuité dans le sens des x_2 . **Il naît de ce fait des contraintes σ_2 .**

Lois de comportement

En suivant la même démarche, on obtient :

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (U_{,1} + \nu V_{,2})$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu U_{,1} + V_{,2})$$

$$N_{12} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (U_{,1} + V_{,2})$$

$$M_1 = D(\theta_{2,1} - \nu\theta_{1,2})$$

$$M_2 = D(\nu\theta_{2,1} - \theta_{1,2})$$

$$M_{12} = \frac{D}{2}(1-\nu)(\theta_{2,2} - \theta_{1,1})$$

$$T_1 = kGh(W_{,1} + \theta_2)$$

$$T_2 = kGh(W_{,2} - \theta_1)$$

Avec $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ et $k = \frac{5}{6}$: **facteur de correction de CT.**

Cinématique d'une plaque de Kirchhoff : conservation des normales

- La théorie de kirchhoff peut être interprétée comme un **cas particulier** de la théorie de Reissner-Mindlin.
- Les points matériels situés sur **une normale** à la surface moyenne non déformée restent sur **une normale** dans la configuration déformée. Cette hypothèse **néglige** l'influence des déformations de CT. On admet ainsi que la rigidité de cisaillement est très grande par rapport à la rigidité de flexion.
- Ainsi : $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ ou $\theta_1 = W_{,2}$ et $\theta_2 = -W_{,1}$

Equations d'équilibre d'une plaque de Kirchhoff

L'équilibre global sur l'épaisseur de la plaque s'écrit :

$$N_{1,1} + N_{12,2} + f_1 = 0$$

$$N_{12,1} + N_{2,1} + f_2 = 0$$

$$T_{1,1} + T_{2,2} + f_3 = 0$$

L'équilibre des moments par rapport aux axes x_1 et x_2 s'écrit :

$$M_{1,1} + M_{12,2} - T_1 + m_1 = 0$$

$$M_{12,1} - M_{2,2} - T_2 - m_2 = 0$$

En combinant ces équations, on obtient :

$$M_{1,11} + 2M_{12,12} - M_{2,22} + f_3 + m_{1,1} - m_{2,2} = 0$$

Lois de comportement pour une plaque de Kirchhoff

Les lois de comportement deviennent :

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (U_{,1} + \nu V_{,2})$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu U_{,1} + V_{,2})$$

$$N_{12} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (U_{,1} + V_{,2})$$

$$M_1 = -D(W_{,11} + \nu W_{,22})$$

$$M_2 = -D(\nu W_{,11} + W_{,22})$$

$$M_{12} = -D(1-\nu)W_{,12}$$

En remplaçant dans $M_{1,11} + 2M_{12,12} - M_{2,22} + f_3 + m_{1,1} - m_{2,2} = 0$ on obtient l'équation de Lagrange :

$$W_{,1111} + 2W_{,1122} + W_{,2222} = \frac{f_3}{D}$$

Plan

Introduction : solides et structures minces

Introduction : définition d'une plaque

Efforts extérieurs et résultants

Plaques élastiques linéaires isotropes

Equations d'équilibre

Cinématique : Hypothèse des sections planes

Relations efforts résultants-déformations

Conditions aux limites

Exercices

Moments de flexion et de torsion dans une section quelconque

Pour trouver le moment de flexion $M(\theta)$ et le couple de torsion $C(\theta)$ supportés par unité de longueur d'une section de la plaque dont la normale fait l'angle θ avec Ox_1 , il suffit d'écrire l'équilibre des moments appliqués à un élément triangulaire ABC ($BC = ds$, $AB = ds \sin \theta$, $AC = ds \cos \theta$). Nous obtenons :

$$M(\theta) = M_2 \sin^2 \theta - 2M_{12} \sin \theta \cos \theta - M_1 \cos^2 \theta$$

$$C(\theta) = -(M_1 + M_2) \sin \theta \cos \theta - M_{12}(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

$$T(\theta) = T_1 \cos \theta + T_2 \sin \theta$$

Ainsi :

$$C(0) = M_{12} = -C\left(\frac{\pi}{2}\right) = C(\pi) = -C\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Conditions aux limites

Les conditions aux limites sur le contour d'une plaque le plus souvent rencontrées sont :

- **Bord encastré :**

$$W = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0$$

- **Bord simplement appuyé :**

$$W = 0 \quad M(\theta) = 0$$

- **Bord libre :**

$$R(\theta) = 0 \quad M(\theta) = 0$$

n étant la normale intérieure au contour au point considéré faisant un angle θ avec l'axe x_1 .

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial x_1} \cos \theta + \frac{\partial W}{\partial x_2} \sin \theta$$

Conditions aux limites

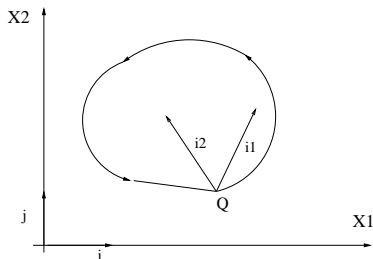
La densité de réaction d'appui $R(\theta)$, composée positivement selon x_3 , se décompose en une densité de réaction $T(\theta)$ due à l'effort tranchant et une densité de réaction d'appui due au moment de torsion. Soit s l'abscisse curviligne du contour de la plaque compté positivement dans le sens trigonométrique. Le couple de torsion $C(\theta)ds$ appliqué à un élément $PP' = ds$ du contour est équivalent à une réaction $C(\theta)$ en P et une réaction $-C(\theta)$ en P' . la densité de réaction $R(\theta)$ est donc donnée par la **formule de Kirchhoff** :

$$R(\theta) = T(\theta) + \frac{\partial C(\theta)}{\partial s}$$

Le raisonnement précédent montre qu'en un point anguleux Q du contour il existe une réaction concentrée R_Q :

$$R_Q = C(\theta_2) - C(\theta_1)$$

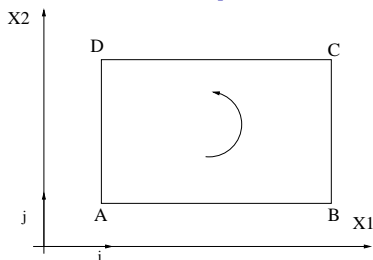
Conditions aux limites



$$R(\theta) = T(\theta) + \frac{\partial C(\theta)}{\partial s}$$

$$R_Q = C(\theta_2) - C(\theta_1)$$

Conditions aux limites : exemple



Donner les valeurs de $M(\theta)$ et $R(\theta)$ en tout point du contour.

- Le long de $AD(\theta = 0)$

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial x_1} \quad M(\theta) = -M_1 \quad R(\theta) = T_1 - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}$$

- Le long de $AB(\theta = \frac{\pi}{2})$

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial x_2} \quad M(\theta) = M_2 \quad R(\theta) = T_2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}$$

et on vérifie que $R_A = C(\pi/2) - C(0) = -2M_{12}$

Plan

Introduction : solides et structures minces

Introduction : définition d'une plaque

Efforts extérieurs et résultants

Plaques élastiques linéaires isotropes

Equations d'équilibre

Cinématique : Hypothèse des sections planes

Relations efforts résultants-déformations

Conditions aux limites

Exercices

Plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale

Soit une plaque rectangulaire de côtés a et b selon x_1 et x_2 respectivement. Elle est soumise à une charge répartie $q = q_0 \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}$. q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

- Ecrire la flèche W .

La flèche de la plaque vérifie l'équation

$$W_{,1111} + 2W_{,1122} + W_{,2222} = \frac{q}{D}(1)$$

- Ecrire les conditions aux limites pour des bords simplement appuyés. Dans ce cadres, les conditions aux limites s'écrivent :

$$W = 0 \quad M_1 = 0 \quad \text{pour } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = a$$

$$W = 0 \quad M_2 = 0 \quad \text{pour } x_2 = 0 \text{ et } x_2 = b$$

or (lois de comportement des plaques de Kirchhoff)

$$M_1 = -D(W_{,11} + \nu W_{,22}) \quad M_2 = -D(\nu W_{,11} + W_{,22})$$

Suite

- Ainsi

$$W = 0 \quad W_{,11} = 0 \quad \text{pour } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = a$$

$$W = 0 \quad W_{,22} = 0 \quad \text{pour } x_2 = 0 \text{ et } x_2 = b$$

- **Forme générale de la solution.**

On constate que toutes les conditions aux limites sont satisfaites si l'on exprime les flèches par :

$$W = C \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} \quad (2)$$

- **Déterminer la constante C.**

En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 C = \frac{q_0}{D}$

- **Ecrire l'équation de la surface fléchie :**

On conclut que la surface fléchie, satisfaisant à (1) et aux conditions aux limites est :

$$W = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} \quad (3)$$

Suite

- **Déduire les expressions des moments M_1 , M_2 et M_{12} .**

A l'aide de l'expression de la flèche (3) on trouve :

$$M_1 = -D(W_{,11} + \nu W_{,22}) = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right) \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}$$

$$M_2 = -D(\nu W_{,11} + W_{,22}) = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}$$

$$M_{12} = -D(1 - \nu) W_{,12} = -\frac{q_0(1 - \nu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 ab} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}$$

- **Déduire la flèche maximum et les moments de flexion maximum.**

On voit que la flèche et les moments maxi se situent au centre de la plaque.

Remplaçons x_1 par $\frac{a}{2}$ et x_2 par $\frac{b}{2}$, on trouve :

$$W_{max} = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \quad (M_1)_{max} = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right)$$

$$(M_2)_{max} = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

Suite

- **Déduire ces valeurs pour le cas d'une plaque carrée.**

Dans le cas d'une plaque carrée, $a = b$, on obtient :

$$W_{max} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D} \quad \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right)$$

$$(M_1)_{max} = (M_2)_{max} = \frac{q_0(1+\nu)a^2}{4\pi^2}$$

- **Calculer les efforts tranchants.**

Les efforts tranchant sont donnés par les équations d'équilibre :

$$T_1 = M_{1,1} + M_{12,2} = \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}$$

$$T_2 = M_{12,1} - M_{2,2} = -\frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}$$

Suite

- Donner les réactions aux bords appuyés de la plaque.

Pour le bord $x_1 = a$:

$$R_1 = (T_1 + M_{12,2})_{x_1=a} = -\frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2}\right) \sin \frac{\pi x_2}{b} \quad (h)$$

Pour le bord $x_2 = b$:

$$R_2 = (T_2 + M_{12,1})_{x_2=b} = -\frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2}\right) \sin \frac{\pi x_1}{a} \quad (i)$$

Ainsi, la répartition de la pression suit une loi sinusoidale, le signe moins indiquant que les réactions sur la plaque agissent vers le haut. Par symétrie, on conclut que les expressions (h) et (i) représentent aussi les distributions de pression le long des côtés $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. La résultante des pressions est :

$$2 \int_0^b (h) dx_2 + 2 \int_0^b (i) dx_1 = -\frac{4q_0 ab}{\pi^2} - \frac{8q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}$$

Suite

- **Comparer à la charge totale appliquée .**

On remarquant que

$$\frac{4q_0 ab}{\pi^2} = \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} dx_1 dx_2$$

on conclut que la somme des réactions réparties est plus grande que la charge totale appliquée sur la plaque.

- **Déduire les réactions concentrées aux coins.**

Ces quatre réactions sont équivalentes (symétrie) et leur valeur est :

$$R = \frac{2q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} = -2(M_{12})_{x_1=a, x_2=b}$$

