

IAE Plaques

Georges Cailletaud

Centre des Matériaux
Ecole des Mines de Paris/CNRS

Plan

- 1 Cinématique, plaque épaisse de Reissner–Mindlin
- 2 Application du théorème des travaux virtuels
 - Efforts intérieurs
 - Efforts extérieurs
 - Equilibre et conditions aux limites
- 3 Loi de comportement
- 4 Plaque de Kirchhoff–Love
- 5 Exemples
 - Matériau isotrope
 - Matériau anisotrope
 - Calcul des contraintes

Plan

1 Cinématique, plaque épaisse de Reissner–Mindlin

2 Application du théorème des travaux virtuels

- Efforts intérieurs
- Efforts extérieurs
- Equilibre et conditions aux limites

3 Loi de comportement

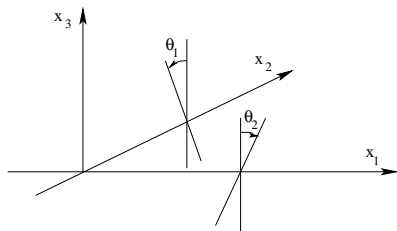
4 Plaque de Kirchhoff–Love

5 Exemples

- Matériau isotrope
- Matériau anisotrope
- Calcul des contraintes

Cinématique d'une plaque épaisse (Reissner–Mindlin)

- Plaque définie dans le plan (x_1-x_2) ; normale à la plaque x_3 , épaisseur h .
- Déplacement défini par 3 translations, U_1 , U_2 , W , et deux angles, θ_1 et θ_2 , qui sont fonctions de x_1-x_2 uniquement.



$$\underline{u} = \underline{U} + x_3 \underline{\Phi}$$

$$\underline{U} = \underline{U} + W \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{pmatrix}$$

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = U_1 + \theta_2 x_3$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = U_2 - \theta_1 x_3$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = W$$

$$\underline{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcul du tenseur de déformation

A partir de :

$$u_1 = U_1 + \theta_2 x_3$$

$$u_2 = U_2 - \theta_1 x_3$$

$$u_3 = W$$

Il vient :

$$\varepsilon_{11} = U_{1,1} + \theta_{2,1} x_3$$

$$\varepsilon_{22} = U_{2,2} - \theta_{1,2} x_3$$

$$\varepsilon_{33} = 0$$

$$2\varepsilon_{12} = U_{1,2} + \theta_{2,2} x_3 + U_{2,1} - \theta_{1,1} x_3$$

$$2\varepsilon_{23} = -\theta_1 + W_{,2}$$

$$2\varepsilon_{31} = \theta_2 + W_{,1}$$

Structure du tenseur de déformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{d}} + x_3 \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{b}}$$

- Tenseur *déformation de membrane* (partie symétrique du gradient de \underline{U})

$$\underline{\underline{d}} = \begin{pmatrix} U_{1,1} & (U_{1,2} + U_{2,1})/2 \\ (U_{2,1} + U_{1,2})/2 & U_{2,2} \end{pmatrix}$$

- Tenseur *de courbure* (partie symétrique du gradient de $\underline{\Phi}$)

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} \theta_{2,1} & (\theta_{2,2} - \theta_{1,1})/2 \\ (\theta_{2,2} - \theta_{1,1})/2 & -\theta_{1,2} \end{pmatrix}$$

- Cisaillement (vecteur cisaillement)

$$\underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta_2 + W_{,1} \\ 0 & 0 & -\theta_1 + W_{,2} \\ \theta_2 + W_{,1} & -\theta_1 + W_{,2} & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{\Phi}} + \underline{\underline{grad}}W = \begin{pmatrix} \theta_2 + W_{,1} \\ -\theta_1 + W_{,2} \end{pmatrix}$$

Plan

1 Cinématique, plaque épaisse de Reissner–Mindlin

2 **Application du théorème des travaux virtuels**

- Efforts intérieurs
- Efforts extérieurs
- Equilibre et conditions aux limites

3 Loi de comportement

4 Plaque de Kirchhoff–Love

5 Exemples

- Matériau isotrope
- Matériau anisotrope
- Calcul des contraintes

Plan

1 Cinématique, plaque épaisse de Reissner–Mindlin

2 Application du théorème des travaux virtuels

- Efforts intérieurs
- Efforts extérieurs
- Equilibre et conditions aux limites

3 Loi de comportement

4 Plaque de Kirchhoff–Love

5 Exemples

- Matériau isotrope
- Matériau anisotrope
- Calcul des contraintes

Puissance virtuelle

$$\begin{aligned}
 -\delta W_{int} &= \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \\
 &= \int_V (\sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + 2\sigma_{\alpha 3} \varepsilon_{\alpha 3}) dV \\
 &= \int_S \delta W_h dS
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \delta W_h &= U_{1,1} \int_h \sigma_{11} dx_3 + \theta_{2,1} \int_h \sigma_{11} x_3 dx_3 + U_{2,2} \int_h \sigma_{22} dx_3 - \theta_{1,2} \int_h \sigma_{22} x_3 dx_3 \\
 &+ (U_{1,2} + U_{2,1}) \int_h \sigma_{12} dx_3 + (\theta_{2,2} - \theta_{1,1}) \int_h \sigma_{12} x_3 dx_3 \\
 &+ (-\theta_1 + W_{,2}) \int_h \sigma_{23} dx_3 + (\theta_2 + W_{,1}) \int_h \sigma_{31} dx_3
 \end{aligned}$$

Définition des efforts intérieurs

Variable associée définition :

$$U_{1,1} \quad N_{11} = \int_h \sigma_{11} dx_3$$

$$\theta_{2,1} \quad M_{11} = \int_h \sigma_{11} x_3 dx_3$$

$$U_{2,2} \quad N_{22} = \int_h \sigma_{22} dx_3$$

$$-\theta_{1,2} \quad M_{22} = \int_h \sigma_{22} x_3 dx_3$$

$$(U_{1,2} + U_{2,1})/2 \quad N_{12} = \int_h \sigma_{12} dx_3$$

$$(\theta_{2,2} - \theta_{1,1})/2 \quad M_{12} = \int_h \sigma_{12} x_3 dx_3$$

$$(-\theta_1 + W_{,2})/2 \quad T_2 = \int_h \sigma_{23} dx_3$$

$$(\theta_2 + W_{,1})/2 \quad T_1 = \int_h \sigma_{31} dx_3$$

Définitions

- Tenseur des efforts de membrane :

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \quad N_{\alpha\beta} = \int_h \sigma_{\alpha\beta} dx_3$$

- Tenseur des moments :

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad M_{\alpha\beta} = \int_h x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3$$

- Vecteur des cisaillements transverses :

$$T_\alpha = \int_h \sigma_{\alpha 3} dx_3$$

Traitement des efforts intérieurs

$$\begin{aligned}
 -\delta W_{int} &= -\delta W_{int}^M - \delta W_{int}^F - \delta W_{int}^S \\
 &= \int_S N_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} dS + \int_S M_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} dS + \int_S T_{\alpha} b_{\alpha} dS
 \end{aligned}$$

- Membrane :

$$-\delta W_{int}^M = \int_S (N_{11} U_{1,1} + N_{22} U_{2,2} + N_{12}(U_{1,2} + U_{2,1})) dS$$

- Flexion :

$$-\delta W_{int}^F = \int_S (M_{11} \theta_{2,1} - M_{22} \theta_{1,2} + M_{12}(\theta_{2,2} - \theta_{1,1})) dS$$

- Cisaillement :

$$-\delta W_{int}^S = \int_S (T_1(\theta_2 + W_{,1}) + T_2(-\theta_1 + W_{,2})) dS$$

Intégration par partie, membrane

$$\int_S N_{11} U_{1,1} dS = \int_S ((N_{11} U_1),_1 - N_{11,1} U_1) dS$$

$$\int_S N_{22} U_{2,2} dS = \int_S ((N_{22} U_2),_2 - N_{22,2} U_2) dS$$

$$\int_S N_{12} U_{1,2} dS = \int_S ((N_{12} U_1),_2 - N_{12,2} U_1) dS$$

$$\int_S N_{21} U_{2,1} dS = \int_S ((N_{21} U_2),_1 - N_{21,1} U_2) dS$$

$$\begin{aligned} -\delta W_{int}^M &= \int_{\Gamma} [(N_{11} n_1 + N_{12} n_2) U_1 + (N_{21} n_1 + N_{22} n_2) U_2] ds \\ &\quad - \int_S [(N_{11,1} + N_{12,2}) U_1 + (N_{21,1} + N_{22,2}) U_2] dS \\ &= \int_{\Gamma} (\underline{\tilde{N}} \cdot \underline{\tilde{n}}) \cdot \underline{U} ds - \int_S \underline{\text{div}} \underline{\tilde{N}} \cdot \underline{U} dS \end{aligned}$$

Intégration par partie, flexion

$$\begin{aligned}
 \int_S M_{11} \theta_{2,1} dS &= \int_S ((M_{11} \theta_2)_{,1} - M_{11,1} \theta_2) dS \\
 - \int_S M_{22} \theta_{1,2} dS &= - \int_S ((M_{22} \theta_1)_{,2} - M_{22,2} \theta_1) dS \\
 \int_S M_{12} \theta_{2,2} dS &= \int_S ((M_{12} \theta_2)_{,2} - M_{12,2} \theta_2) dS \\
 - \int_S M_{21} \theta_{1,1} dS &= - \int_S ((M_{21} \theta_1)_{,1} - M_{21,1} \theta_1) dS
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\delta W_{int}^F &= \int_{\Gamma} [(M_{11} n_1 + M_{12} n_2) \theta_2 - (M_{21} n_1 + M_{22} n_2) \theta_1] ds \\
 &\quad - \int_S [-(M_{11,1} + M_{12,2}) \theta_2 + (M_{21,1} + M_{22,2}) \theta_1] dS \\
 &= \int_{\Gamma} (\underline{\tilde{M}} \cdot \underline{\tilde{n}}) \cdot \underline{\Phi} ds - \int_S \underline{\text{div}} \underline{\tilde{M}} \cdot \underline{\Phi} dS
 \end{aligned}$$

Intégration par partie, cisaillement

$$\int_S T_1 W_{,1} dS = \int_S ((T_1 W)_{,1} - T_{1,1} W) dS$$

$$\int_S T_2 W_{,2} dS = \int_S ((T_2 W)_{,2} - T_{2,2} W) dS$$

$$\begin{aligned} -\delta W_{int}^S &= \int_{\Gamma} (T_1 n_1 + T_2 n_2) W ds - \int_S (T_{1,1} + T_{2,2}) W dS \\ &+ \int_S (T_1 \theta_2 - T_2 \theta_1) dS \quad (\text{provient de la rotation}) \\ &= \int_{\Gamma} (\underline{T} \cdot \underline{n}) W ds - \int_S (\text{div} \underline{T} W + \underline{T} \cdot \underline{\Phi}) dS \end{aligned}$$

Plan

1 Cinématique, plaque épaisse de Reissner–Mindlin

2 Application du théorème des travaux virtuels

- Efforts intérieurs
- **Efforts extérieurs**
- Equilibre et conditions aux limites

3 Loi de comportement

4 Plaque de Kirchhoff–Love

5 Exemples

- Matériau isotrope
- Matériau anisotrope
- Calcul des contraintes

Travail virtuel des efforts extérieurs, force de volume

$$\begin{aligned}
 \delta W_{ext}^V &= \int_V \underline{f}^V \cdot \underline{u} dV = \int_V \underline{f}^V \cdot (\underline{U} + W \underline{e}_3 + x_3 \underline{\Phi}) dV \\
 &= \int_S (U_\alpha \int_h f_\alpha^V dx_3 + W \int_h f_3^V dx_3 + \Phi_\alpha \int_h x_3 f_\alpha^V dx_3) dS \\
 &= \int_S (U_\alpha t_\alpha + W p_3 + \Phi_\alpha m_\alpha) dS
 \end{aligned}$$

- Densité surfacique d'effort de membrane : $t_\alpha = \int_h f_\alpha^V dx_3$
- Densité surfacique d'effort normal au plan de la plaque : $p_3 = \int_h f_3^V dx_3$
- Couple surfacique (en général nul) : $m_\alpha = \int_h x_3 f_\alpha^V dx_3$

Travail virtuel des efforts extérieurs, frontière de la plaque

$$\begin{aligned}
 \delta W_{\text{ext}}^S &= \int_{\partial V} \underline{f}^S \cdot \underline{u} \, d\Sigma = \int_{\partial V} \underline{f}^S \cdot (\underline{U} + W \underline{e}_3 + x_3 \underline{\Phi}) \, d\Sigma \\
 &= \int_{\Gamma} (U_{\alpha} \int_h f_{\alpha}^S \, dx_3 + W \int_h f_3^S \, dx_3 + \Phi_{\alpha} \int_h x_3 f_{\alpha}^S \, dx_3) \, ds \\
 &= \int_{\Gamma} (U_{\alpha} F_{\alpha} + W P_3 + \Phi_{\alpha} C_{\alpha}) \, ds
 \end{aligned}$$

- Densité linéique d'effort de membrane : $F_{\alpha} = \int_h f_{\alpha}^S \, dx_3$
- Densité linéique d'effort normal au plan de la plaque : $P_3 = \int_h f_3^S \, dx_3$
- Couple surfacique : $C_{\alpha} = \int_h x_3 f_{\alpha}^S \, dx_3$

Plan

1 Cinématique, plaque épaisse de Reissner–Mindlin

2 Application du théorème des travaux virtuels

- Efforts intérieurs
- Efforts extérieurs
- **Equilibre et conditions aux limites**

3 Loi de comportement

4 Plaque de Kirchhoff–Love

5 Exemples

- Matériau isotrope
- Matériau anisotrope
- Calcul des contraintes

Application du principe des travaux virtuels, termes sur S

On obtient les équations d'équilibre.

$$-\delta W_{int} = \int_S (\underline{div} \underline{N} \cdot \underline{U} + \underline{div} \underline{M} \cdot \underline{\Phi} + \underline{div} \underline{T} W - \underline{T} \cdot \underline{\Phi}) dS$$

$$\delta W_{ext} = \int_S (\underline{t} \cdot \underline{U} + W p_3 + \underline{\Phi} \cdot \underline{m}) dS$$

- Membrane

$$\underline{div} \underline{N} + \underline{t} = 0$$

- Moments

$$\underline{div} \underline{M} - \underline{T} + \underline{m} = 0$$

- Cisaillement transverse

$$\underline{div} \underline{T} + p_3 = 0$$

Application du principe des travaux virtuels, termes sur Γ

On obtient les conditions aux limites.

$$\delta W_{int} = \int_{\Gamma} (\underline{\tilde{N}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{U} + (\underline{\tilde{M}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\Phi} + (\underline{T} \cdot \underline{n}) W ds$$

$$\delta W_{ext} = \int_{\Gamma} (\underline{F} \cdot \underline{n} + WP_3 + \underline{\Phi} \cdot \underline{C}) ds$$

- Membrane

$$\underline{\tilde{N}} \cdot \underline{n} = \underline{F}$$

- Moments

$$\underline{\tilde{M}} \cdot \underline{n} = \underline{C}$$

- Cisaillement transverse

$$\underline{T} \cdot \underline{n} = P_3$$

Comparaison avec la théorie des poutres (1)

	Théorie des plaques épaisses Reissner–Mindlin	Théorie des poutres Timoshenko	
Equilibre Membrane	$\underline{\text{div}} \underline{\tilde{N}} + \underline{t} = 0$	$N_{,1} + t = 0$	Effort longitudinal
Equilibre des moments	$\underline{\text{div}} \underline{\tilde{M}} - \underline{T} = 0$	$M_{,1} - T = 0$	Equilibre du moment
Cisaillement transverse	$\text{div } \underline{T} + p_3 = 0$	$T_{,1} + p_3 = 0$	Cisaillement transverse

Les deux théories supposent que la structure supporte le cisaillement dans son épaisseur

Plan

1 Cinématique, plaque épaisse de Reissner–Mindlin

2 Application du théorème des travaux virtuels

- Efforts intérieurs
- Efforts extérieurs
- Equilibre et conditions aux limites

3 **Loi de comportement**

4 Plaque de Kirchhoff–Love

5 Exemples

- Matériau isotrope
- Matériau anisotrope
- Calcul des contraintes

Etablissement de la loi de comportement

On considérera deux cas :

- Matériau isotrope (E, ν)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\alpha 3}$$

- Matériau anisotrope

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

On négligera les cisaillements dans ce dernier cas (plaque mince)

$$Q_{11} = c^4 \bar{E}_n + s^4 \bar{E}_t + 2c^2 s^2 (\nu_{tn} \bar{E}_n + 2\mu_{nt})$$

$$Q_{22} = s^4 \bar{E}_n + c^4 \bar{E}_t + 2c^2 s^2 (\nu_{tn} \bar{E}_n + 2\mu_{nt})$$

$$Q_{66} = c^2 s^2 (\bar{E}_n + \bar{E}_t - 2\nu_{tn} \bar{E}_n) + (c^2 - s^2)^2 \mu_{nt}$$

$$Q_{12} = c^2 s^2 (\bar{E}_n + \bar{E}_t - 4\mu_{nt}) + (c^4 + s^4) \nu_{tn} \bar{E}_n$$

$$Q_{16} = -cs (c^2 \bar{E}_n - s^2 \bar{E}_t - (c^2 - s^2) (\nu_{tn} \bar{E}_n + 2\mu_{nt}))$$

$$Q_{26} = -cs (s^2 \bar{E}_n - c^2 \bar{E}_t + (c^2 - s^2) (\nu_{tn} \bar{E}_n + 2\mu_{nt}))$$

$$\text{avec } \bar{E}_n = E_n / (1 - \nu_{nt} \nu_{tn})$$

$$\bar{E}_t = E_t / (1 - \nu_{nt} \nu_{tn})$$

Comportement de membrane, matériau isotrope

Par exemple :

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= \int_h \sigma_{11} dx_3 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_h (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) dx_3 \\
 &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_h [(U_{1,1} + x_3 \theta_{2,1}) + \nu(U_{2,2} - x_3 \theta_{1,2})] dx_3 \\
 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (U_{1,1} + \nu U_{2,2})
 \end{aligned}$$

(On a utilisé $\int_h x_3 dx_3 = 0$)

On a donc :

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,2} \\ (U_{1,2} + U_{2,1})/2 \end{pmatrix}$$

Comportement en flexion, matériau isotrope

Par exemple :

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \int_h x_3 \sigma_{11} dx_3 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_h (x_3 \varepsilon_{11} + \nu x_3 \varepsilon_{22}) dx_3 \\
 &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_h [(x_3 U_{1,1} + x_3^2 \theta_{2,1}) + \nu(x_3 U_{2,1} - x_3^2 \theta_{1,2})] dx_3 \\
 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\theta_{2,1} - \nu \theta_{1,2}) \quad \text{car} \quad \int_h x_3 dx_3 = 0
 \end{aligned}$$

(On a utilisé $\int_h x_3 dx_3 = 0$ et $\int_h x_3^2 dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} x_3^2 dx_3 = \frac{h^3}{12}$)

On a donc :

$$\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{2,1} \\ -\theta_{1,2} \\ (\theta_{2,2} - \theta_{1,1})/2 \end{pmatrix}$$

Comportement en cisaillement transverse, matériau isotrope

Par exemple :

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \int_h \sigma_{13} dx_3 = \frac{E}{1+\nu} \int_h \varepsilon_{13} dx_3 \\
 &= \frac{E}{1+\nu} \int_h (W_{,1} + \theta_{2,1}) dx_3 \\
 &= \frac{Eh}{1+\nu} (W_{,1} + \theta_{2,1})
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\underline{T} = \frac{Eh}{1+\nu} (\underline{\text{grad}} W + \underline{\Phi})$$

Comparaison avec la théorie des poutres (calcul de la flèche)

	Plaque (ép. h) Reissner–Mindlin	Poutre $b \times h$ Timoshenko	
Cisaillement transverse	$\operatorname{div} \underline{T} + p_3 = 0$	$T_{,1} + p_3 = 0$	Cisaillement transverse
Equilibre des moments	$\operatorname{div} \underline{\tilde{M}} - \underline{T} = 0$	$M_{,1} - T = 0$	Equilibre du moment
Angle	$\underline{\tilde{M}} = [D] \underline{\Phi}$	$M = EI\theta_{,1} = \frac{Eb h^3}{12} \theta_{,1}$	Angle
Flèche	$\underline{T} = \frac{Eh}{1+\nu} (\underline{\operatorname{grad}} W + \underline{\Phi})$	$T = \mu S(V_{,1} + \theta)$	Flèche
	avec $[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix}$		

Plan

1 Cinématique, plaque épaisse de Reissner–Mindlin

2 Application du théorème des travaux virtuels

- Efforts intérieurs
- Efforts extérieurs
- Equilibre et conditions aux limites

3 Loi de comportement

4 **Plaque de Kirchhoff–Love**

5 Exemples

- Matériau isotrope
- Matériau anisotrope
- Calcul des contraintes

Hypothèse de plaque mince (Kirchhoff–Love)

Une normale à la surface de la plaque reste normale pendant la déformation, ce qui implique, dans

$$\underline{u} = \underline{U} + W \underline{e}_3 + x_3 \underline{\Phi}$$

que $\underline{\text{grad}} W + \underline{\Phi} = 0$. Les cisaillements 23 et 31 sont donc nuls.

- Condition cinématique :

$$-\theta_1 + W_{,2} = 0 \qquad \theta_2 + W_{,1} = 0$$

- On ne considère plus les contraintes de cisaillement transverse :

$$T_1 = 0 \qquad T_2 = 0$$

- Tenseur de courbure :

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \theta_{2,1} & (\theta_{2,2} - \theta_{1,1})/2 \\ (\theta_{2,2} - \theta_{1,1})/2 & -\theta_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W_{,11} & -W_{,12} \\ -W_{,21} & -W_{,22} \end{pmatrix}$$

$$K_{\alpha\beta} = -W_{,\alpha\beta}$$

Définition des efforts intérieurs (plaque mince)

Variable associée définition :

$$U_{1,1} \qquad N_{11} = \int_h \sigma_{11} dx_3$$

$$- W_{,11} \qquad M_{11} = \int_h \sigma_{11} x_3 dx_3$$

$$U_{2,2} \qquad N_{22} = \int_h \sigma_{22} dx_3$$

$$W_{,22} \qquad M_{22} = \int_h \sigma_{22} x_3 dx_3$$

$$(U_{1,2} + U_{2,1})/2 \qquad N_{12} = \int_h \sigma_{12} dx_3$$

$$- W_{,12} \qquad M_{12} = \int_h \sigma_{12} x_3 dx_3$$

- N_{11} et N_{12} efforts normaux, N_{12} cisaillement dans le plan de la plaque
- M_{11} et M_{22} moments de flexion, M_{12} moment de torsion

Nouvelles équations d'équilibre pour les moments

$$\begin{aligned} T_{1,1} + T_{2,2} + p_3 &= 0 \\ M_{11,1} + M_{12,2} - T_1 &= 0 \\ M_{21,1} + M_{22,2} - T_2 &= 0 \end{aligned}$$

donne :

$$M_{11,11} + 2M_{12,2} + M_{22,22} + p_3 = 0$$

soit :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M} + p_3 &= 0 \\ M_{\alpha\beta, \alpha\beta} + p_3 &= 0 \end{aligned}$$

Nouvelle expression des conditions aux limites

- Il faut reprendre le principe des travaux virtuels, avec la seule variable W .
Changement uniquement pour la flexion :

$$-\delta W_{int}^F = \int_S M_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} dS = - \int_S M_{\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} dS$$

- On intègre par partie, deux fois ; ainsi :

$$M_{11} W_{,11} = (M_{11} W_{,1})_{,1} - M_{11,1} W_{,1} = (M_{11} W_{,1})_{,1} - (M_{11,1} W)_{,1} + M_{11,11} W$$

- On a donc :
 - des termes du genre $M_{11,11}$, qui restent sur S et fournissent la condition d'équilibre
 - des termes du genre $M_{11} W_{,1}$, qui vont sur Γ , et fournissent une condition à la limite en couple (flexion seulement)

$$\underline{n} \cdot \underline{M} \cdot \underline{n} = \underline{n} \cdot \underline{C} = \underline{C}_F$$

- des termes du genre $M_{11,1} W$, qui vont sur Γ , et fournissent une condition à la limite en force :

$$P_3 = \frac{d}{ds} (M_{\alpha\beta} n_\alpha \tau_\beta) + M_{\alpha\beta, \beta} n_\alpha$$

Nouvelle expression du comportement en flexion, matériau isotrope

A partir de :

$$\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -W_{,11} \\ -W_{,22} \\ -W_{,12} \end{pmatrix}$$

On a :

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\nu W_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) W_{,\alpha\beta})$$

D'où :

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} W_{,\alpha\beta\alpha\beta}$$

Equation à résoudre pour W :

$$D\Delta\Delta W - p_3 = 0 \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Plan

- 1 Cinématique, plaque épaisse de Reissner–Mindlin
- 2 Application du théorème des travaux virtuels
 - Efforts intérieurs
 - Efforts extérieurs
 - Equilibre et conditions aux limites
- 3 Loi de comportement
- 4 Plaque de Kirchhoff–Love
- 5 **Exemples**
 - Matériau isotrope
 - Matériau anisotrope
 - Calcul des contraintes

Plan

- 1 Cinématique, plaque épaisse de Reissner–Mindlin
- 2 Application du théorème des travaux virtuels
 - Efforts intérieurs
 - Efforts extérieurs
 - Equilibre et conditions aux limites
- 3 Loi de comportement
- 4 Plaque de Kirchhoff–Love
- 5 Exemples
 - **Matériau isotrope**
 - Matériau anisotrope
 - Calcul des contraintes

Plaque rectangulaire ($a \times b$) simplement supportée

- Chargement sinusoïdal

$$p_3 = P_0 \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{b}\right)$$

$$W = \frac{p_0 a^2 b^2}{\pi^4 D} \sin\left(\frac{\pi x_2}{b}\right)$$

- Solution de Navier

$$p_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right)$$

$$W = \frac{a^4 b^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right)$$

- Plaque carrée sous pression uniforme p_0

$$W_{max} = \frac{4p_0 a^4}{\pi^4 D}$$

Plaque circulaire de rayon R en flexion

- Chargement uniforme p_0
- Expression du Laplacien en cylindrique :

$$\Delta W = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right)$$

- La solution est de la forme :

$$W(r) = \frac{p_0 r^3}{64D} + ar^2 \ln r + br^2 + c \ln r + d$$

- Cas d'une plaque pleine encastree :

$$W(r) = \frac{p_0}{64D} (R^2 - r^2)^2$$

- Flèche maximale au centre :

$$W_{max} = \frac{p_0 R^4}{64D}$$

Plan

- 1 Cinématique, plaque épaisse de Reissner–Mindlin
- 2 Application du théorème des travaux virtuels
 - Efforts intérieurs
 - Efforts extérieurs
 - Equilibre et conditions aux limites
- 3 Loi de comportement
- 4 Plaque de Kirchhoff–Love
- 5 Exemples
 - Matériau isotrope
 - **Matériau anisotrope**
 - Calcul des contraintes

Etablissement de la loi de comportement (matériau anisotrope)

- termes de type « membrane » :

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= \int_h \sigma_{11} dx_3 \\
 &= \int_h (Q_{11}\varepsilon_{11} + Q_{12}\varepsilon_{22} + Q_{16}\varepsilon_{12}) dx_3 \\
 &= \int_h (Q_{11}(U_{1,1} + \theta_{2,1}x_3) + Q_{12}(U_{2,2} - \theta_{1,2}x_3) \\
 &\quad + Q_{16}(U_{1,2} + \theta_{2,2}x_3 + U_{2,1} - \theta_{1,1}x_3)) dx_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= \int_h (Q_{11}U_{1,1} - Q_{11}x_3W_{,11}) dx_3 \\
 &\quad + \int_h (Q_{12}U_{2,2} - Q_{12}x_3W_{,22}) dx_3 \\
 &\quad + \int_h (Q_{16}(U_{1,2} + U_{2,1}) - 2Q_{16}x_3W_{,12}) dx_3
 \end{aligned}$$

Etablissement de la loi de comportement (suite)

- termes de type « flexion » :

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \int_h \sigma_{11} x_3 dx_3 \\
 &= \int_h (Q_{11} \varepsilon_{11} + Q_{12} \varepsilon_{22} + Q_{16} \varepsilon_{12}) x_3 dx_3 \\
 &= \int_h (Q_{11} (U_{1,1} x_3 + \theta_{2,1} x_3^2) + Q_{12} (U_{2,2} x_3 - \theta_{1,2} x_3^2) \\
 &\quad + Q_{16} (U_{1,2} x_3 + \theta_{2,2} x_3^2 + U_{2,1} x_3 - \theta_{1,1} x_3^2)) dx_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \int_h (Q_{11} x_3 U_{1,1} - Q_{11} x_3^2 W_{,11}) dx_3 \\
 &\quad + \int_h (Q_{12} x_3 U_{2,2} - Q_{12} x_3^2 W_{,22}) dx_3 \\
 &\quad + \int_h (Q_{16} x_3 (U_{1,2} + U_{2,1}) - 2 Q_{16} x_3^2 W_{,12}) dx_3
 \end{aligned}$$

Forme matricielle de la loi de comportement

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{12} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & Q_{11}x_3 & Q_{12}x_3 & Q_{16}x_3 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & Q_{12}x_3 & Q_{22}x_3 & Q_{26}x_3 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & Q_{16}x_3 & Q_{26}x_3 & Q_{66}x_3 \\ Q_{11}x_3 & Q_{12}x_3 & Q_{16}x_3 & Q_{11}x_3^2 & Q_{12}x_3^2 & Q_{16}x_3^2 \\ Q_{12}x_3 & Q_{22}x_3 & Q_{26}x_3 & Q_{12}x_3^2 & Q_{22}x_3^2 & Q_{26}x_3^2 \\ Q_{16}x_3 & Q_{26}x_3 & Q_{66}x_3 & Q_{16}x_3^2 & Q_{26}x_3^2 & Q_{66}x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U,1 \\ V,2 \\ V,1 + U,2 \\ -W,11 \\ -W,22 \\ -2W,12 \end{pmatrix}$$

- Pour une meilleure lecture, on a omis l'intégrale. Il faut lire en fait :

$$\int_h Q_{11} dx_3 \text{ etc...}$$

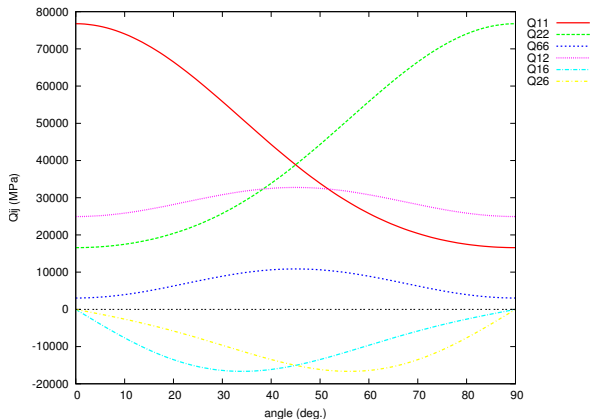
- Les termes linéaires en x_3 produisent du *couplage* membrane-flexion. Ils sont nuls pour les plaques symétriques
- La rigidité en flexion *dépend de la séquence d'empilement*

Structure de la matrice de comportement

- Unités dans la loi de comportement

$$\begin{pmatrix} N/m \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N/m & | & N \\ N & | & N.m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \\ m^{-1} \end{pmatrix}$$

- Rigidité en traction, et en flexion : termes Q_{11} et Q_{22}
- Rigidité en cisaillement dans le plan et en torsion : terme Q_{66}



- Fibres à 0° et à 90° pour une bonne rigidité en traction et en flexion
- Fibres à 45° pour une bonne rigidité en cisaillement dans le plan et en torsion

Plan

- 1 Cinématique, plaque épaisse de Reissner–Mindlin
- 2 Application du théorème des travaux virtuels
 - Efforts intérieurs
 - Efforts extérieurs
 - Equilibre et conditions aux limites
- 3 Loi de comportement
- 4 Plaque de Kirchhoff–Love
- 5 Exemples
 - Matériau isotrope
 - Matériau anisotrope
 - Calcul des contraintes

Champ de contraintes approchées

- Contraintes approchées dans chaque couche (i), d'épaisseur e_i , en considérant l'effort de membrane et le moment
- Effort normal (h_i^- et h_i^+ cotes min et max de la couche) :

$$N_{\alpha\beta}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta} dx_3$$

- Moment (\bar{h}_i cote moyenne de la couche) :

$$M_{\alpha\beta}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta} (x_3 - \bar{h}_i) dx_3$$

- Composantes 11, 22, 12 :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}^i}{e_i} + \frac{12}{e_i^2} M_{\alpha\beta}^i \frac{x_3 - \bar{h}_i}{e_i}$$