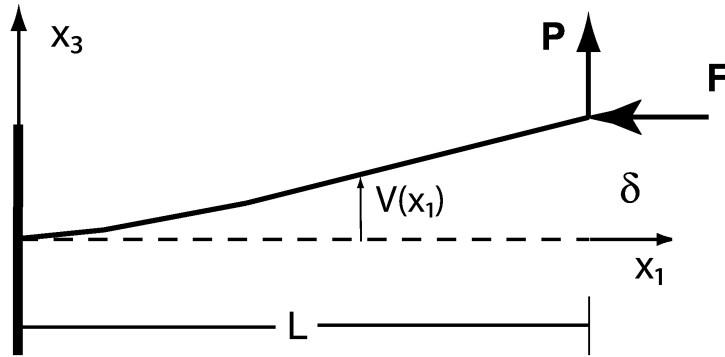


## Evaluation de la charge de flambement d'une poutre droite

Dans ce problème, nous examinons la résistance au flambement d'une poutre droite de longueur  $L$ , encadrée à  $x_1 = 0$  subissant une charge compressive  $F > 0$  ( $N(x_1) = -F < 0$ ), et une charge latérale  $P$ , à  $x_1 = L$ , comme sur la figure ci-dessous. On note comme d'habitude  $V(x_1)$  la flèche de la poutre, qui va intervenir dans le calcul du moment, car on travaillera sur la *configuration déformée*.



1. Dessiner le diagramme d'équilibre sur la configuration déformée. En utilisant celui-ci, montrer que  $V$  vérifie l'équation différentielle :

$$EIV_{,11} + FV = P(L - x_1) + F\delta$$

L'écriture de l'équilibre comporte les trois équations :

$$N_{,1} + t = 0 \quad T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0$$

Les valeurs de  $N$  et  $T$  sont donc constantes, égales aux valeurs des efforts extérieurs en  $x_1 = L$  :

$$N(x_1) = F_L = -F \quad T(x_1) = T_L = P$$

De façon classique, on intègre  $T$  pour trouver  $M$ , sachant que le moment est nul à l'extrémité libre ( $x_1 = L$ ),

$$M(x_1) = M_L + \int_L^{x_1} T(x) dx = P(x_1 - L)$$

Le fait de travailler sur la configuration déformée va rajouter le moment produit par  $F$ , si bien que :

$$M(x_1) = P(x_1 - L) + F(V - \delta)$$

La relation de comportement  $M = -EIV_{,11}$  permet ensuite de retrouver l'équation souhaitée. Il est à noter que l'on ajoute les contributions des deux efforts ( $F$  et  $P$ ) lorsqu'on calcule les moments, mais que cette opération ne revient pas à appliquer le théorème de superposition. La présence de  $V$  dans l'équation conduit à une solution non polynomiale.

2. En posant  $k^2 \equiv F/EI$ , donner la solution de l'équation différentielle, somme de la solution homogène et de la solution particulière, L'équation s'écrit simplement :

$$V_{,11} + k^2 V = \frac{P(L - x_1)}{EI} + k^2 \delta$$

La solution homogène  $V_h$  et la solution particulière  $V_p$  s'écrivent :

$$V_h = A \sin kx_1 + B \cos kx_1 \quad V_p = \frac{P(L - x_1)}{k^2 EI} + \delta$$

On écrit donc respectivement la flèche et sa dérivée sous la forme :

$$V = A \sin kx_1 + B \cos kx_1 + \frac{P(L - x_1)}{k^2 EI} + \delta$$

$$V_{,1} = Ak \cos kx_1 - Bk \sin kx_1 - \frac{P}{k^2 EI}$$

et utiliser les conditions aux limites en  $x_1 = 0$  pour trouver la flèche,  $V(x_1)$ . En  $x_1 = 0$ , la flèche et sa dérivée sont nulles, puisqu'on est en présence d'un encastrement, si bien que :

$$0 = B + \frac{PL}{k^2 EI} + \delta$$

$$0 = Ak - \frac{P}{k^2 EI}$$

La flèche s'exprime donc :

$$V(x_1) = \frac{P}{Fk} \sin kx_1 - \left( \frac{PL}{F} + \delta \right) \cos kx_1 + \frac{P}{F}(L - x_1) + \delta$$

3. En utilisant la «condition de cohérence»  $V(L) \equiv \delta$ , montrer que

$$\delta = \left( \frac{PL^3}{EI} \right) \left( \frac{\tan kL - kL}{(kL)^3} \right)$$

En exprimant la «condition de cohérence»  $V(L) = \delta$ , on peut trouver la valeur de la flèche à l'extrémité de la poutre :

$$\delta = \frac{PL^3}{EI} \frac{\tan kL - kL}{(kL)^3}$$

La valeur de la flèche est donc finalement :

$$V(x_1) = \frac{PL^3}{EI(kL)^3} (\sin kx_1 - kx_1 + \tan kL(1 - \cos kx_1))$$

4. Lorsque  $kL \rightarrow \pi/2$ ,  $\delta \rightarrow \infty$ ; en déduire la valeur de  $F = F_c$  qui prévoit une flèche infinie pour une charge latérale nulle, et vérifier que cette valeur est égale à la charge critique d'Euler. La valeur obtenue est bien :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

5. Pour une charge axiale  $F$  «petite», montrer que la solution tend vers la solution standard d'une poutre encastree de longueur  $L$  soumise à une charge  $P$  à son extrémité. Si le terme  $kL$  est petit, le développement limité de  $\tan kL$  dans l'expression de  $\delta$  donne un terme linéaire qui disparaît au numérateur. Le terme suivant vaut  $(kL)^3/3$ , si bien que :

$$\lim_{kL \rightarrow \pi/2} \delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

Cette valeur est bien celle qui correspond à une poutre console chargée en son extrémité avec une charge  $P$ . On la retrouve sans calcul en exploitant le fait que la flèche est la même que celle d'une poutre de longueur  $2L$  simplement supportée à ses extrémités, et chargée avec une charge  $2P$  en son milieu, cas qui a été traité en cours. Les équations sont brièvement redémontrées en question 7.

6. Refaire ce problème pour le cas de la traction (on a maintenant  $F$  négative). Le cheminement est identique, mais le changement de signe change les sin et cos en sinh et cosh, et l'équilibre instable lorsqu'on augmente la valeur absolue de  $F$  en un équilibre stable. En posant maintenant  $k^2 = -F/EI$ , l'équation différentielle à résoudre est :

$$V_{,11} - k^2 V = \frac{P(L - x_1) + F\delta}{EI}$$

qui a pour solution :

$$V(x_1) = A \sinh kx_1 + B \cosh kx_1 + \frac{P}{F}(L - x_1) + \delta$$

Lorsqu'on annule à la fois  $V$  et sa dérivée en  $x_1 = 0$ , on trouve les deux conditions qui définissent  $A$  et  $B$  :

$$B + \frac{PL}{F} + \delta = 0 \quad A = \frac{P}{Fk}$$

La condition de cohérence en  $x_1 = L$  fournit alors la valeur de  $\delta$  :

$$\delta = \frac{PL^3}{EI} \left( \frac{kL - \tanh kL}{(kL)^3} \right)$$

La valeur de la flèche est finalement :

$$V(x_1) = \frac{PL^3}{EI(kL)^3} (-\sinh kx_1 + kx_1 - \tanh kL(1 - \cosh kx_1))$$

7. Comparer les résultats obtenus lorsque la force dans l'axe de la poutre est en compression ou en traction. Le calcul sans force axiale, avec la seule charge  $P$  sur une poutre console de longueur  $L$  encastrée en  $x_1 = 0$  donne successivement :

$$T(L) = P_L = P$$

$$M = P(x_1 - L)$$

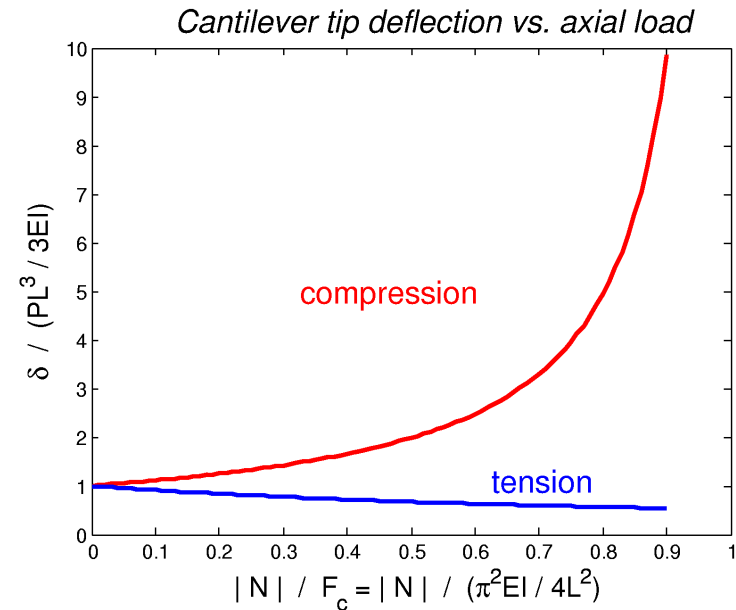
$$\theta = \frac{M}{EI} = \frac{P}{EI} \left( \frac{x_1^2}{2} - Lx_1 \right)$$

$$V = \frac{P}{EI} \left( L \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{6} \right)$$

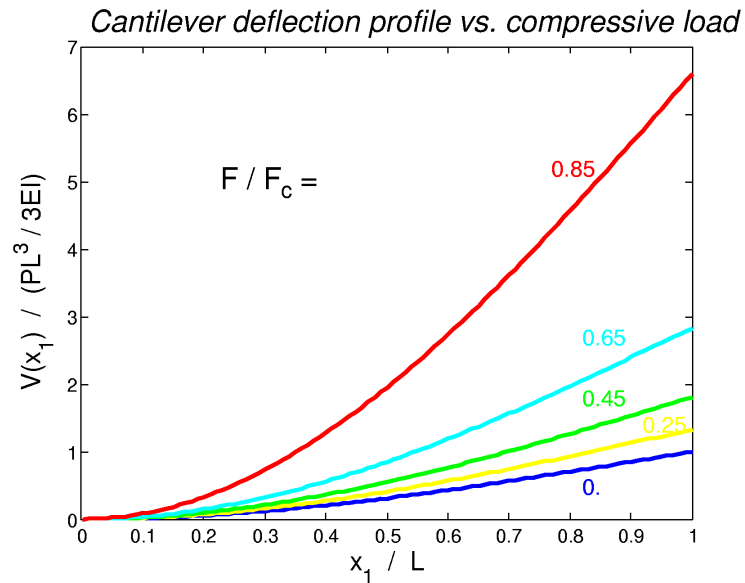
$$V(L) = \frac{PL^3}{3EI}$$

On peut comparer la déformée obtenue dans ce cas avec celles qui ont été calculées pour une force axiale en compression ou en traction. Le diagramme suivant montre la flèche maximale obtenue lorsqu'on applique une force axiale à l'extrémité d'une poutre

console encastrée en  $x_1 = 0$ , et chargée avec une charge  $P$  en  $x_1 = L$ . Les valeurs en ordonnée sont normées par la valeur de référence à force axiale nulle, les valeurs en abscisse sont normées par la charge critique d'Euler,  $F_C$ . On observe bien l'instabilité qui s'annonce dès que la force axiale en compression atteint 90% de  $F_C$ , alors qu'au contraire la flèche est stable pour le cas de la traction axiale.

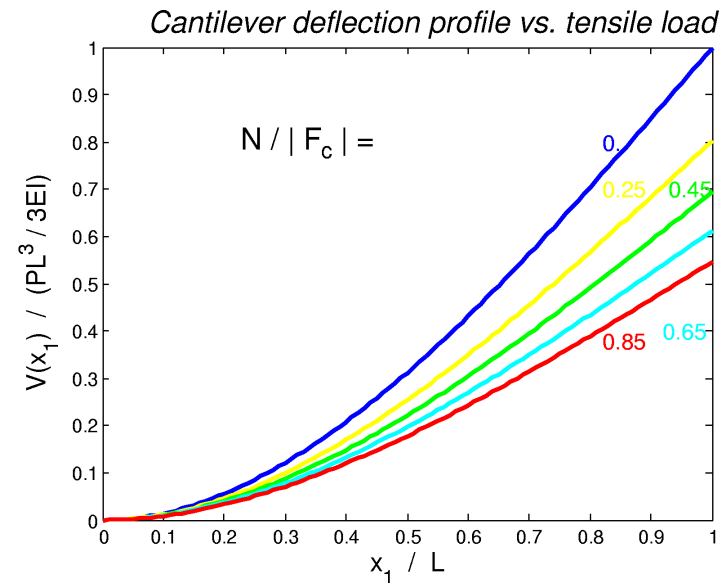


Comparaison de la flèche maximale, normée par la valeur à force axiale nulle, en fonction de la force axiale, en compression ou en traction, normée par la charge critique d'Euler



Augmentation de la flèche produite par l'application d'une compression axiale

Les conséquences sur la forme prise par la poutre sont illustrées par deux figures, dans lesquelles la flèche au point  $x_1$  est de nouveau normée par la flèche maximale, et où cette valeur est tracée en fonction de l'abscisse normée  $x_1/L$  sur la poutre. En compression, on trouve que la flèche est plus grande, en traction qu'elle est plus petite.



Diminution de la flèche produite par l'application d'une traction axiale

En conclusion, on observe que, pour une charge donnée  $P$ , l'application d'une traction produit une rigidification apparente de la poutre, alors que l'application d'une compression produit un assouplissement apparent. Ceci est à mettre en relation avec la fréquence des vibrations libres d'une poutre comportant une masse en bout. Si  $f_o$  est la fréquence de référence lorsque la poutre vibre dans le plan horizontal, la fréquence que l'on observera sera  $f_b > f_o$  lorsque la poutre vibre verticalement avec la masse vers le bas, et  $f_h < f_o$  si la masse est placée vers le haut.