

Etude de la flexion d'un bilame

Le but de cet exercice est d'examiner la courbure d'une plaque circulaire constituée de deux couches sous l'effet d'un changement de température. La plaque est composée de deux couches homogènes, le dépôt et le substrat qui ont respectivement des épaisseurs e_d et e_s , des modules d'Young E_d et E_s , et des coefficients de Poisson ν_d et ν_s . L'épaisseur du dépôt est supposée très petite devant celle du substrat, ce qui est généralement le cas lorsqu'on traite le cas des "wafers", supports en silicium sur lesquels on vient fabriquer les puces en microélectronique (il y a environ 3 ordres de grandeur d'écart). Les coefficients de dilatation thermique sont respectivement α_d et α_s . On suppose que le champ de température initial est uniforme, et on applique au système une variation de température T , supposée également uniforme. Comme la distribution des matériaux dans l'épaisseur n'est pas symétrique, il apparaît un couplage "membrane-flexion", si bien que le simple changement de température va générer une courbure de la plaque, et des contraintes thermomécaniques autoéquilibrées à l'intérieur des couches.

1. Indiquer comment est modifiée la loi de comportement d'une plaque homogène en présence de dilatation thermique. On utilisera pour le moment des notations sans indices, E , ν , e , α , et on supposera que le plan moyen de la plaque est le plan (x_1, x_2) , donc que $-e/2 \leq x_3 \leq e/2$.

La loi de comportement comprend un terme de membrane, un terme de flexion, et un terme de cisaillement transverse. La loi de comportement, qui relie les termes caractérisant les efforts et ceux qui définissent la cinématique, est établie en postulant une forme de champ de contrainte dans la plaque. Le fait d'introduire un terme de dilatation thermique, $\tilde{\epsilon}^{th} = \alpha T \tilde{1}$, ne va pas modifier la partie cisaillement. Il faut par contre examiner son influence sur les efforts axiaux et les moments. La loi de comportement restreinte aux composantes 11 et 22, avec $\sigma_{33} = 0$, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} - \alpha T \\ \epsilon_{22} - \alpha T \end{pmatrix}$$

L'estimation des termes N_{11} et N_{22} s'effectue en intégrant respectivement σ_{11} et σ_{22} sur l'épaisseur de la plaque. Ceci donne par exemple pour N_{11} :

$$N_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-e/2}^{e/2} (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22} - (1+\nu)\alpha T) dx_3$$

Les déformations s'expriment en fonction des composantes du déplacement de membrane et des angles de rotation : $\epsilon_{11} = U_{1,1} + \theta_{2,1}x_3$ et $\epsilon_{11} =$

$U_{2,2} - \theta_{1,2}x_3$. Les termes linéaires en x_3 , qui sont impairs, disparaissent comme d'habitude dans l'intégration entre $-e/2$ et $e/2$, mais il reste un terme supplémentaire par comparaison avec la solution du cours :

$$N_{11} = \frac{Ee}{1-\nu^2} (U_{1,1} + \nu U_{2,2}) - \frac{E\alpha Te}{1-\nu}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \end{pmatrix} = \frac{Ee}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,2} \end{pmatrix} - \frac{E\alpha Te}{1-\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'estimation des termes M_{11} et M_{22} s'effectue en intégrant respectivement $x_3\sigma_{11}$ et $x_3\sigma_{22}$ sur l'épaisseur de la plaque. Ceci donne par exemple pour M_{11} :

$$M_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-e/2}^{e/2} (x_3\epsilon_{11} + \nu x_3\epsilon_{22} - (1+\nu)\alpha T x_3) dx_3$$

Cette fois-ci, le terme provenant de la dilatation thermique est linéaire en x_3 , si bien qu'il disparaît dans l'intégration, et que la loi de comportement est inchangée par rapport à la solution isotherme :

$$\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \end{pmatrix} = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{2,1} \\ -\theta_{1,2} \end{pmatrix}$$

2. On se préoccupe dans cette question des équations d'équilibre résultant de l'assemblage des deux couches. Justifier le fait que le moment de flexion dans le dépôt est négligeable devant le moment résultant sur le substrat. On raisonne dans un premier temps en conditions axisymétriques, si bien que les composantes 11 et 22 sont égales. En écrivant l'équilibre des efforts pour une section droite de la plaque multicouche, déterminer l'effort normal $N^s = N_{11}^s = N_{22}^s$ et le moment de flexion $M^s = M_{11}^s = M_{22}^s$ dans la couche de substrat en fonction de l'effort normal $N^d = N_{11}^d = N_{22}^d$ dans la couche de dépôt.

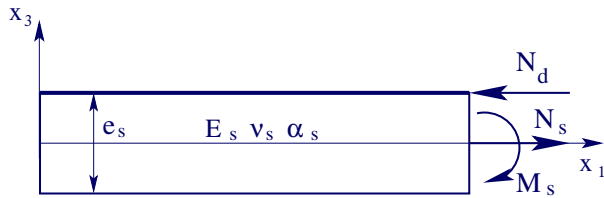


Figure 1 : Equilibre d'une section droite

La résultante des efforts normaux est nulle, puisqu'il n'y a pas d'efforts extérieurs appliqués sur le système. On en déduit :

$$N^s + N^d = \frac{E_d e_d}{1 - \nu_d} (\varepsilon - \alpha_d T) + \frac{E_s e_s}{1 - \nu_s} (\varepsilon - \alpha_s T) = 0$$

On a noté ε les termes $U_{1,1}$ et $U_{2,2}$, qui sont supposés égaux dans les deux couches, ce qui signifie que l'extension est la même. On fait en effet l'hypothèse qu'il y a continuité du déplacement entre les couches. Il est donc possible d'éliminer ε et de trouver l'expression de N^d :

$$N^d = \frac{\frac{E_d e_d}{1 - \nu_d} \frac{E_s e_s}{1 - \nu_s} (\alpha_s - \alpha_d) T}{\frac{E_d e_d}{1 - \nu_d} + \frac{E_s e_s}{1 - \nu_s}}$$

Comme les valeurs des constantes du modèle élastique et des coefficients de dilatation thermique sont du même ordre pour les deux matériaux, mais

que la couche de dépôt est d'épaisseur négligeable, la valeur de l'effort normal dans le substrat est finalement :

$$N^s = -N^d \approx \frac{E_d e_d}{1 - \nu_d} (\alpha_d - \alpha_s) T$$

L'effort est donc d'autant plus grand que la différence entre les coefficients de dilatation thermique est importante, que le dépôt est épais et que son module de Young est grand. Le moment dans le substrat se calcule en considérant l'effort appliqué par le dépôt sur le substrat, effort concentré appliqué à une distance $e_s/2$ de la surface moyenne du substrat :

$$M^s = N^d \frac{e_s}{2}$$

3. Calculer la valeur de la courbure, en supposant que le substrat est une plaque mince de Love-Kirchhoff

Si la plaque est mince, les dérivées des angles qui interviennent dans l'expression des moments sont égales à la courbure :

$$\theta_{2,1} = -W_{,11} = -\theta_{1,2} = -W_{,22} = \frac{1}{R}$$

La relation entre le moment et le rayon de courbure dans le substrat est donc :

$$M^s = \frac{E_s e_s^3}{12(1 - \nu_s)} \frac{1}{R}$$

En remplaçant M^s par son expression en fonction de N^d , il vient :

$$\frac{1}{R} = \frac{6(1 - \nu_s) N^d}{E_s e_s^2}$$

Si on exprime maintenant N^d :

$$\frac{1}{R} = \frac{6E'_d}{e_s E'_s} (\alpha_d - \alpha_s) T$$

où on a posé :

$$E'_s = \frac{E_s e_s}{1 - \nu_s^2} \quad E'_d = \frac{E_d e_d}{1 - \nu_d^2}$$

Remarques :

Le champ de contrainte dans le substrat se calcule en superposant la contribution de l'effort de membrane et celle du moment de flexion. Le premier fournit un champ de contrainte uniforme dans l'épaisseur, alors que le second génère un champ impair en x_3 . Le résultat est donc une distribution affine ; la surface sur laquelle la contrainte s'annule est située au tiers de la plaque à partir de la face qui porte le substrat. On trouve en effet :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{N_{11}^s}{e_s} + \frac{12 x_3}{e_s^2} M_{11}^s = \frac{N^d}{e_s} \left(-1 + \frac{6x_3}{e_s} \right)$$

expression qui s'annule bien lorsque $x_3 = e_s/6$.

3. En fait, on observe que, sur de grandes plaques, de diamètre 200 à 300 mm, la flexion n'est pas axisymétrique, mais elle s'effectue selon une direction préférentielle. Cela conduit à reconsidérer les conditions aux limites, et à utiliser à la place une hypothèse de déformation plane. Recommencer les calculs précédents et donner la nouvelle expression du rayon de courbure. On réalisera ensuite l'application numérique pour une plaque de 30 cm de diamètre constituée d'un substrat en silicium et d'un dépôt de nickel, soumise à une diminution de température $T = -300 \text{ }^\circ\text{C}$:

$$\begin{aligned} E_s &= 112 \text{ GPa} & \nu_s &= 0.28 & \alpha_s &= 3.10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} & e_s &= 200 \text{ } \mu\text{m} \\ E_d &= 207 \text{ GPa} & \nu_d &= 0.31 & \alpha_d &= 13.10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} & e_d &= 50 \text{ nm} \end{aligned}$$

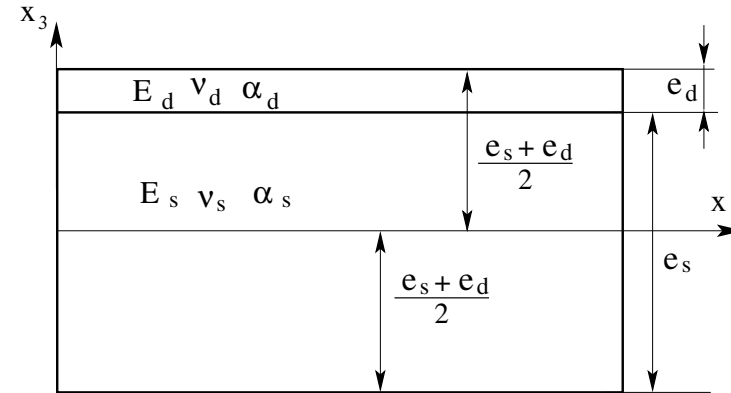


Figure 2 : Géométrie de la plaque composite

On résout cette fois-ci le problème d'une plaque composite chargée en état de déformation plane selon la direction x_2 . On considère la résultante N_{11} et le moment M_{11} correspondant à l'ensemble des couches. Les dérivées partielles par rapport à x_2 sont nulles, si bien que les équations d'équilibre se réduisent à :

$$N_{11,1} = 0 \quad M_{11,1} = 0$$

Avec les conditions aux limites de bords libres, il vient : $N_{11} = 0, M_{11} = 0$, et les équations de comportement s'écrivent (en prenant ϵ_{22} nul dans l'expression des contraintes) :

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ M_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-(e_d+e_s)/2}^{(e_d+e_s)/2} \frac{E(x_3)}{1 - \nu^2(x_3)} dx_3 & \int_{-(e_d+e_s)/2}^{(e_d+e_s)/2} \frac{E(x_3)}{1 - \nu^2(x_3)} x_3 dx_3 \\ \int_{-(e_d+e_s)/2}^{(e_d+e_s)/2} \frac{E(x_3)}{1 - \nu^2(x_3)} x_3 dx_3 & \int_{-(e_d+e_s)/2}^{(e_d+e_s)/2} \frac{E(x_3)}{1 - \nu^2(x_3)} x_3^2 dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{,1} \\ \theta_{2,1} \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} \int_{-(e_d+e_s)/2}^{(e_d+e_s)/2} \frac{E(x_3)\alpha(x_3)}{1 - \nu(x_3)} dx_3 \\ \int_{-(e_d+e_s)/2}^{(e_d+e_s)/2} \frac{E(x_3)\alpha(x_3)x_3}{1 - \nu(x_3)} dx_3 \end{pmatrix}$$

On peut réécrire les équations de comportement en introduisant une matrice A et un vecteur B sous la forme :

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ M_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{,1} \\ \theta_{2,1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} T$$

Les déformations généralisées sont calculées en inversant la matrice A et en utilisant le fait que N_{11} et M_{11} sont nuls :

$$\begin{pmatrix} U_{,1} \\ \theta_{2,1} \end{pmatrix} = A^{-1}BT$$

Les composantes de la matrice A et du vecteur B sont calculées en remplaçant les intégrales par des sommes, le substrat étant situé entre $x_3 = -(e_s + e_d)/2$ et $x_3 = (e_s - e_d)/2$, et le dépôt entre $x_3 = (e_s - e_d)/2$ et $x_3 = (e_s + e_d)/2$:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_s}{1-\nu_s^2}e_s + \frac{E_d}{1-\nu_d^2}e_d \\ A_{12} = A_{21} &= \frac{E_s}{2(1-\nu_s^2)} \left(\frac{(e_s - e_d)^2}{4} - \frac{(e_s + e_d)^2}{4} \right) \\ &\quad + \frac{E_d}{2(1-\nu_d^2)} \left(\frac{(e_s + e_d)^2}{4} - \frac{(e_s - e_d)^2}{4} \right) \\ A_{22} &= \frac{E_s}{3(1-\nu_s^2)} \left(\frac{(e_s - e_d)^3}{8} + \frac{(e_s + e_d)^3}{8} \right) \\ &\quad + \frac{E_d}{3(1-\nu_d^2)} \left(\frac{(e_s + e_d)^3}{8} - \frac{(e_s - e_d)^3}{8} \right) \\ B_1 &= \frac{E_s\alpha_s}{1-\nu_s}e_s + \frac{E_d\alpha_d}{1-\nu_d}e_d \\ B_2 &= \frac{E_s\alpha_s}{2(1-\nu_s)} \left(\frac{(e_s - e_d)^2}{4} - \frac{(e_s + e_d)^2}{4} \right) \\ &\quad + \frac{E_d\alpha_d}{2(1-\nu_d)} \left(\frac{(e_s + e_d)^2}{4} - \frac{(e_s - e_d)^2}{4} \right) \end{aligned}$$

En reprenant la notation de la question 3 et en introduisant

$$E_s'' = \frac{E_s e_s \alpha_s}{1 - \nu_s} = \alpha_s (1 + \nu_s) E_s' \quad E_d'' = \frac{E_d e_d \alpha_d}{1 + \nu_d} = \alpha_d (1 - \nu_d) E_d'$$

il vient, en négligeant les termes de second et troisième degré en e_d :

$$\begin{aligned} A_{11} &= E_s' + E_d' \\ A_{12} = A_{21} &= \frac{1}{2}(-E_s' e_d + E_d' e_s) \\ A_{22} &= \frac{E_s'}{12}(e_s^2 + 6e_d^2) + \frac{E_d'}{12}(e_d^2 + 6e_s^2) \\ B_1 &= E_s'' + E_d'' \\ B_2 &= \frac{1}{2}(-E_s'' e_d + E_d'' e_s) \end{aligned}$$

Le rayon de courbure s'exprime comme :

$$\frac{1}{R} = \theta_{2,1} = \frac{A_{11}B_2 - A_{12}B_1}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}$$

En négligeant les termes de second et troisième degré en e_d , on trouve :

$$\begin{aligned} A_{11}B_2 - A_{12}B_1 &\approx \frac{e_s}{2} (E_s' E_d'' - E_d' E_s'') \\ A_{11}A_{22} - A_{12}^2 &\approx \frac{e_s^2 E_s'^2}{12} \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\frac{1}{R} = \frac{6}{e_s} \frac{E_s' E_d'' - E_d' E_s''}{E_s'^2} = \frac{6E_d'}{e_s E_s'} ((1 + \nu_d)\alpha_d - (1 + \nu_s)\alpha_s) T$$

La formule diffère de celle obtenue en conditions axisymétriques uniquement par un terme en $(1 + \nu)$ dans chaque matériau.

Application numérique : On trouve $R = 17,543m$. On trouve la flèche correspondante en intégrant deux fois. Si on suppose que la plaque est

simplement posée, avec le dépôt vers le haut, les deux extrémités vont se soulever. En supposant la flèche nulle au milieu, et $-150 \text{ mm} \leq x_1 \leq 150 \text{ mm}$, il vient successivement :

$$\theta_2(x_1) = \frac{x_1}{R} \quad W(x_1) = \frac{x_1^2}{2R}$$

Le soulèvement maximal est donc de 0,641 mm.