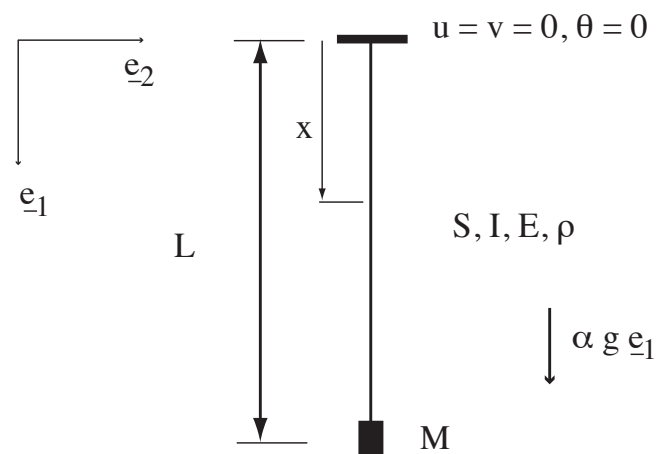


Complément théorique pour l'étude de l'effet non linéaire de la gravité sur la vibration transverse d'une poutre

D. Ryckelynck

8 mars 2010



Configuration en équilibre avant vibration
Equilibrated configuration before vibration

Figure 1: Paramétrage géométrique du système isolé

L'objet de cette note scientifique est de proposer un modèle mécanique pour l'étude de l'effet de la gravité sur les vibrations d'une lame métallique à laquelle on a accroché une masse à son extrémité. Avant de considérer des vibrations pour une masse M vers le bas puis pour masse M vers le haut, nous considérons un état initial idéal, en absence de gravité. Nous souhaitons considérer la combinaison des transformations mécaniques suivantes: déformation longitudinale par gravité et déformation transverse par vibration. La superposition linéaire de effets est écartée en adoptant un modèle non linéaire de transformations finie pour tenir compte de l'effet de la gravité sur la fréquence de vibration du premier mode propre. Mais pour conserver une approche d'une simplicité jugée acceptable, les vibrations seront considérées comme une perturbation infinitésimale de l'équilibre induit par l'effet de la gravité. Tout référentiel fixe dans le laboratoire est supposé Galiléen.

La première partie de ce document est une analyse non linéaire basée sur une Formulation Lagrangienne Actualisée de l'effet de la gravité. Dans la seconde partie, on montre que l'étude des perturbations linéaires en présence de phénomènes d'inertie conduit à un problème d'analyse modale. Dans la troisième partie un modèle simple à 1 degré de liberté est proposé pour faciliter la comparaison entre cette approche théorique et des observations expérimentales. Des résultats de calcul analytique sont donnés en vrac dans la dernière partie.

Présentation de la structure (Figure 1)

Configuration initiale : \mathcal{D}_0

La configuration représentée sur la figure 1 correspond à la configuration intermédiaire, avant vibration, mais dans un état de déformation induit par la gravité. L'état initial, supposé sans contrainte, est obtenu en considérant le paramètre de chargement α nul. Le système isolé est constitué de la poutre et de la masse supposée ponctuelle M . Les paramètres géométriques du système mécanique sont la longueur L , le moment quadratique d'inertie I , constant, des sections droites de la poutre et l'aire S de ces sections droites. Les paramètres physiques sont le module d'élasticité E et la masse volumique ρ . L'effet de la gravité est modélisé simplement par l'accélération gravitationnelle g . A cet état initial idéal, on associe un instant t_0 à partir duquel nous étudions les transformations mécaniques, c'est à dire le champ de déformation élastique défini sur la poutre.

Configuration actuelle : \mathcal{D}_t

Nous considérons la théorie des poutres pour décrire les déplacements. Soit $u(x, t)$, $v(x, t)$, $\theta(x, t)$ respectivement le déplacement longitudinal du

centre d'inertie de la section droite en x , son déplacement transverse dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ et la rotation des sections droites. Le mouvement transverse est supposé suffisamment faible pour qu'il soit toujours porté par la direction \underline{e}_2 .

Configuration intermédiaire : \mathcal{D}_{t_1}

On suppose que la gravité n'induit pas de déplacement transverse. L'équation de la droite ($y = 0, z = 0$) constitue la ligne des centres de gravité des sections droites de la poutre. La position de cette ligne n'est pas affectée par la gravité. On néglige le poids des sections droites devant le poids de la masse M . Ainsi la masse volumique ρ n'intervient pas dans le passage de la configuration initiale à la configuration intermédiaire en équilibre avec le poids propre du système mécanique. La configuration intermédiaire est la configuration choisie comme configuration de référence pour la formulation du principe des puissances virtuelles. On note $\boldsymbol{\sigma}_1$ la contrainte de Cauchy qui équilibre le poids propre. On a $\boldsymbol{\sigma}_1 = \frac{\alpha M g}{S} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$. Pour toute modification de l'état de contrainte, le second tenseur de Piola-Kirchhoff est de la forme $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \delta\boldsymbol{\Pi}$.

1 Formulation milieu continu

Pour aboutir à cette formulation nous allons commencer par décrire le champ de déplacement $\underline{U}(x, y, t)$ mesuré par rapport à la configuration intermédiaire. Il sera pris de la forme :

$$\underline{U}(x, y, t) = v(x, t)\underline{e}_2 + (u(x, t) - y\theta(x, t))\underline{e}_1$$

avec $\underline{x} = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2$.

Il s'agit d'une poutre de type Euler-Bernoulli pour laquelle on a la relation cinématique suivante: $\theta(x, t) = \partial v(x, t)/\partial x$ (pas de déformation de cisaillement transverse). La configuration initiale est obtenue pour $\underline{U}(x, y, t) = -u_1(x)\underline{e}_1$. Le tenseur gradient de la transformation a pour expression:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{x}}$$

L'élasticité intervient de la configuration initiale à la configuration actuelle. On note \mathbf{F}_1 le gradient de la transformation permettant de passer de la configuration de référence à la configuration initiale:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{1} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

Le gradient de la transformation passant de la configuration initiale à la configuration actuelle est donc $\mathbf{F}\mathbf{F}_1^{-1}$. On note \mathbf{E}_1 le tenseur de Green-Lagrange correspondant à la mesure des déformations élastiques pour passer de la configuration initiale à la configuration intermédiaire.

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1^{-T}\mathbf{F}_1^{-1} - \mathbf{1})$$

On note \mathbf{h} la partie variable de \mathbf{F} :

$$\mathbf{h} = \frac{\partial U}{\partial \underline{x}}$$

L'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles est constitué, comme pour l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles à 0 (CA à 0), de champs de déplacement suffisamment réguliers qui sont nuls en $x = 0$ ($u(0, t) = 0, v(0, t) = 0, \frac{\partial v}{\partial \theta}(0, t) = 0$).

On rappelle l'expression de la Formulation Lagrangienne Actualisée du principe des puissances virtuelles:

$$-\int_{\mathcal{D}_1} \mathbf{\Pi} : \mathbf{E}^* dV + u^*(L) \alpha M g = \int_{\mathcal{D}_1} \rho (\ddot{u} u^* + \ddot{v} v^*) dV + M \ddot{v}(L, t) v^*(L) \quad \forall (u^*, v^*) \text{ CA à 0}$$

avec

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{h}^* + \mathbf{h}^{*T} + \mathbf{h}^{*T}\mathbf{h} + \mathbf{h}^T\mathbf{h}^*) \quad \mathbf{h}^* = \frac{\partial U^*}{\partial \underline{x}}$$

Le comportement de la poutre est supposé hyperélastique isotrope et linéaire:

$$\mathbf{\Pi} = \lambda \text{trace}(\mathbf{E}) \mathbf{1} + 2 \mu \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1^{-T}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{F}_1^{-1} - \mathbf{1})$$

Pour simplifier on notera $\mathbf{\Pi} = \mathbf{C} : \mathbf{E}$ la relation de comportement élastique. En particulier on a $\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 : \boldsymbol{\sigma}_1 = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 : \mathbf{C} : \mathbf{E}_1$.

On obtient donc l'équation du mouvement suivante:

$$\begin{aligned} & -\int_{\mathcal{D}_1} \mathbf{E}^* : \mathbf{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_1) dV - \int_{\mathcal{D}_1} \sigma_1 : \mathbf{E}^* dV + u^*(L) \alpha M g \\ & = \int_{\mathcal{D}_1} \rho (\ddot{u} u^* + \ddot{v} v^*) dV + M \ddot{v}(L, t) v^*(L) \quad \forall (u^*, v^*) \text{ CA à 0} \end{aligned}$$

2 Etude des mouvements pour des petites perturbations transverses

On suppose que les déplacements transverses sont suffisamment petits pour que le passage de la configuration intermédiaire à la configuration actuelle se fasse sans déplacement longitudinal ($u(x, t > t_1) = 0$). De plus, pour déterminer v nous linéarisons l'équation du mouvement par rapport au champ v et l'on choisi $u^* = 0$. On obtient:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathcal{D}_1} (\lambda + 2\mu) y^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{1}{(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x})^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dV \\
& - \int_{\mathcal{D}_1} \frac{\alpha M g}{S} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dV \\
& = \int_{\mathcal{D}_1} \rho \ddot{v} v^* dV + M \ddot{v}(L, t) v^*(L) \quad \forall v^* \text{ CA à } 0
\end{aligned}$$

Le plan d'équation $y = 0$ passant par les centres de gravité, on obtient:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathcal{D}_1} (\lambda + 2\mu) y^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{1}{(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x})^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dV - \int_{\mathcal{D}_1} \frac{\alpha M g}{S} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + y^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dV \\
& = \int_{\mathcal{D}_1} \rho \ddot{v} v^* dV + M \ddot{v}(L, t) v^*(L) \quad \forall v^* \text{ CA à } 0
\end{aligned}$$

En intégrant sur les sections droites la formulation des équations du mouvement devient:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L I \left(\frac{\lambda + 2\mu}{(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x})^2} + \frac{\alpha M g}{S} \right) \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx - \int_0^L \alpha M g \frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \\
& = \int_0^L \rho S \ddot{v} v^* dx + M \ddot{v}(L, t) v^*(L) \quad \forall v^* \text{ CA à } 0
\end{aligned}$$

En supposant négligeable $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ devant 1 et $\frac{\alpha M g}{S}$ devant $\lambda + 2\mu$, et en négligeant l'inertie de la poutre, on obtient:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L I (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx - \int_0^L \alpha M g \frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \\
& = M \ddot{v}(L, t) v^*(L) \quad \forall v^* \text{ CA à } 0
\end{aligned}$$

L'équation du mouvement d'un fil tendu s'obtient en supposant négligeable le terme en I .

La recherche des mouvements de vibrations libres se réalise en introduisant la séparation des variables d'espace et de temps. Nous étudions le cas où la fonction du temps est harmonique ($\alpha \geq 0$ ou $M < M_c$).

$$v(x, t) = V(x) e^{j\omega t}$$

On obtient alors:

$$\int_0^L I (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 v^*}{dx^2} \frac{d^2 V}{dx^2} dx + \int_0^L \alpha M g \frac{dv^*}{dx} \frac{dV}{dx} dx - \omega^2 M V(L) v^*(L) = 0 \quad \forall v^* \text{ CA à } 0$$

3 Modèle à un degré de liberté

On utilise une méthode de Ritz pour trouver une solution approchée des équations du mouvement. Le champs choisi doit être cinématiquement admissible. Pour cela on choisit V sous la forme d'un monôme $V(x) = A x^p$, avec nécessairement $p > 1$. Pour avoir une formulation de type Galerkin, on choisit $v^*(x) = A^* x^p$. On obtient:

$$\frac{p^2(p-1)^2}{2p-3} L^{2p-3} I (\lambda + 2\mu) A + \frac{p}{2p-1} L^{2p-1} \alpha M g A - \omega^2 M L^{2p} A = 0$$

Pour qu'un mouvement d'amplitude non nul existe il faut:

$$\frac{p^2(p-1)^2}{2p-3} L^{2p-3} I (\lambda + 2\mu) + \frac{p}{2p-1} L^{2p-1} \alpha M g = \omega^2 M L^{2p}$$

Donc la valeur approchée de la pulsation propre du mode de vibration est:

$$\omega = \sqrt{\frac{p^2(p-1)^2}{2p-3} L^{-3} I \frac{\lambda + 2\mu}{M} + \frac{p}{2p-1} L^{-1} \alpha g}$$

On en déduit la valeur approchée de la fréquence propre:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{p^2(p-1)^2}{2p-3} L^{-3} I \frac{\lambda + 2\mu}{M} + \frac{p}{2p-1} L^{-1} \alpha g}$$

On a donc $f(1) > f(-1)$. **CQFD.**

En utilisant $p = 3$ on obtient:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{12 L^{-3} I \frac{\lambda + 2\mu}{M} + \frac{3}{5} L^{-1} \alpha g}$$

Rappel: Pour un poutre de section rectangulaire de hauteur h et de largeur b , on a $I = \frac{bh^3}{12}$.

4 Quelques résultats de calcul

$$\frac{\partial U^*}{\partial \underline{x}} = \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \right) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\partial v^*}{\partial x} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial v^*}{\partial x} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

$$\mathbf{h}^* = \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \right) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\partial v^*}{\partial x} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial v^*}{\partial x} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

$$\mathbf{h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\partial v}{\partial x} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial v}{\partial x} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

$$\mathbf{h}^T + \mathbf{h} = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{1} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

$$\mathbf{F}_1^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{\partial u_1}{\partial x}} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2} - 1 \right) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{h}^T + \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{h}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_1^{-T} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{F}_1^{-1} - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_1^{-T} \mathbf{F}_1^{-1} - \mathbf{1}) + \frac{1}{2} \mathbf{F}_1^{-T} (\mathbf{h}^T + \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{h}) \mathbf{F}_1^{-1} \\ &= \mathbf{E}_1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \text{terme quadratique en } u \text{ et } v \\ &= \mathbf{E}_1 - y \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \text{terme quadratique en } v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mathbf{h}^{*T} \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{h}^*) : \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 &= \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - y \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) + y^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^* : \sigma_1 &= \frac{\alpha M g}{S} \mathbf{E}^* : \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \\ &= \frac{\alpha M g}{S} \frac{1}{2} (\mathbf{h}^* + \mathbf{h}^{*T} + \mathbf{h}^{*T} \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{h}^*) : \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \\ &= \frac{\alpha M g}{S} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - y \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) + y^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ &= \frac{\alpha M g}{S} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - y \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) + y^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^* : C : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_1) &= (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - y \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) + y^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left(-y \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ &+ \lambda \frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \left(-y \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ &= (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \right) \left(-y \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ &+ \text{termes quadratiques en } v \end{aligned}$$