



Mécanique des Matériaux Solides (EMP3122)

Georges Cailletaud

Centre des Matériaux
Ecole des Mines de Paris/CNRS

Déplacement déformation

- Le tenseur de déformation est la partie symétrique du gradient de déplacement

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$$

- Champ cinématiquement admissible : $\underline{u} = \underline{u}^d$ sur $\partial\Omega_u$
- Equations de compatibilité (ex : 6 composantes de déformation dérivent de 3 composantes de déplacement en coordonnées cartésiennes en 3D)

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \quad \varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} - \varepsilon_{12,13} - \varepsilon_{13,12} = 0$$

...et permutations circulaires, soit :

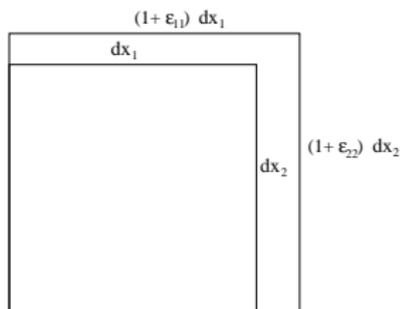
$$\varepsilon_{inm}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ij,km} = 0$$

avec $\varepsilon_{ijk} = 0$ si 2 indices sont égaux

$\varepsilon_{ijk} = 1$ si permutation paire, $=-1$ si permutation impaire

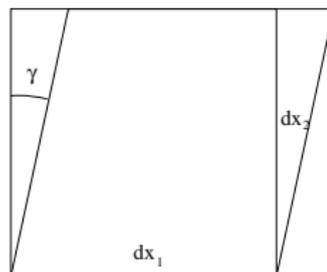
Signification géométrique des termes du tenseur de déformation

$$\frac{\Delta V}{V} = \text{Tr} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{ii}$$



Les termes diagonaux désignent les allongements unitaires dans la direction des axes

$$\gamma = 2\varepsilon_{12}$$



Les termes hors diagonale caractérisent les rotations relatives des axes

- Allongement unitaire dans la direction définie par \underline{n}

$$\delta(\underline{n}) = \underline{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \underline{n} = \varepsilon_{ij} n_i n_j$$

Contrainte

- Forces de volume : \underline{f}^d dans le volume Ω
- Forces de surface : \underline{F}^d sur la surface $\partial\Omega_F$
- Champ statiquement admissible :

- dans Ω

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \underline{f}^d = 0 \quad \sigma_{ij,j} + f_i^d = 0$$

- sur $\partial\Omega_F$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}^d \quad \sigma_{ij} n_j = F_i^d$$

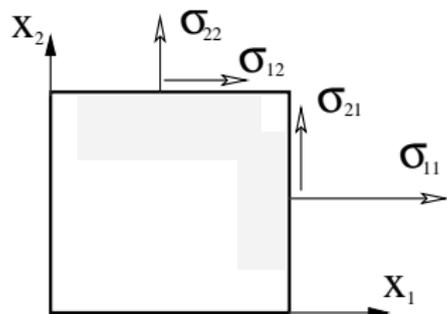
- Partie sphérique du tenseur de contrainte :

$$\underline{S} = \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{\sigma}) \underline{I} \quad S_{ij} = \frac{\sigma_{ll}}{3} \delta_{ij}$$

- Déviateur associé au tenseur de contrainte :

$$\underline{s} = \underline{\sigma} - \underline{S} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{ll}}{3} \delta_{ij} \quad \text{trace}(\underline{s}) = s_{ll} = 0$$

Signification physique des termes du tenseur de contrainte



- Les termes diagonaux caractérisent les efforts normaux aux facettes
- Les termes hors diagonale caractérisent les efforts de cisaillement

- Vecteur contrainte pour une facette de direction \underline{n}

$$\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \quad T_i = \sigma_{ij} n_j$$

- Contrainte normale sur la facette de direction \underline{n}

$$T_n(\underline{n}) = \underline{n} \cdot \underline{T} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \sigma_{ij} n_i n_j$$

- Cisaillement dans une facette de direction \underline{n}

$$\underline{T}_t(\underline{n}) = \underline{T} - T_n \underline{n} \quad T_t = \sqrt{T^2 - T_n^2}$$

Travail des efforts intérieurs

- Théorème de Stokes pour une fonction scalaire f intégrée sur un volume Ω , \underline{n} étant la normale à $\partial\Omega$

$$\int_{\Omega} f_{,j} dV = \int_{\partial\Omega} f n_j dS$$

- Travail des efforts intérieurs (champ de contraintes réel, champ de déplacement cinématiquement admissible)

$$\begin{aligned} -W_i &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} dV = \int_{\Omega} \sigma_{ij} u'_{i,j} dV \\ &= \int_{\Omega} ((\sigma_{ij} u'_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} u'_i) dV = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} u'_i n_j dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u'_i dV \end{aligned}$$

Travail des efforts extérieurs

- Travail des efforts extérieurs

$$W_e = \int_{\Omega} f_i^d u_i' dV + \int_{\partial\Omega_F} F_i^d u_i' dS$$

- avec $W_i + W_e = 0$, il vient :

$$\text{dans } \Omega : \sigma_{ij,j} + f_i^d = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_F : \sigma_{ij}n_j = F_i^d$$

- Ces relations sont *indépendantes du matériau*
- On introduit une *loi de comportement* en posant des relations entre contraintes et déformations

Potentiel élastique

Le comportement, éventuellement non linéaire, est gouverné par un potentiel, qui sera défini par sa densité volumique, dont la forme dépend de la variable choisie

- Evolution entre deux états d'équilibre, avec $\tilde{\sigma}^* = \tilde{\sigma}$, et $\tilde{\varepsilon}' = d\tilde{\varepsilon}$, le potentiel d'élasticité $W(\tilde{\varepsilon})$ s'exprime, en élasticité linéaire :

$$W(\tilde{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon} : \underset{\approx}{\underset{\approx}{\mathbb{C}}} : \tilde{\varepsilon} \quad \tilde{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \underset{\approx}{\underset{\approx}{\mathbb{C}}} : \tilde{\varepsilon}$$

- Evolution entre deux états d'équilibre, avec $\tilde{\varepsilon}' = \tilde{\varepsilon}$, et $\tilde{\sigma}^* = d\tilde{\sigma}$, le potentiel d'élasticité complémentaire $W^*(\tilde{\sigma})$ s'exprime, en élasticité linéaire :

$$W^*(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{2} \tilde{\sigma} : \underset{\approx}{\underset{\approx}{\mathbb{S}}} : \tilde{\sigma} \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\partial W^*}{\partial \tilde{\sigma}} = \underset{\approx}{\underset{\approx}{\mathbb{S}}} : \tilde{\sigma}$$

- W et W^* convexes et $dW + dW^* = d(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})$

- Et :
$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij}$$

Elasticité linéaire

- Elasticité linéaire (rigidité et souplesse) :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\sigma} \qquad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

- Relations de symétrie :

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} \qquad S_{ijkl} = S_{ijlk} = S_{jikl}$$

- Relations «énergétiques» :

$$C_{ijkl} = C_{klij} \qquad S_{ijkl} = S_{klij}$$

- Anisotropie générale = 21 coeff ; orthotropie = 9 coeff ; symétrie cubique = 3 coeff ; matériau isotrope = 2 coefficients
- Matériau isotrope :

$$\underset{\sim}{s} = 2\mu \underset{\sim}{\varepsilon}^{dev} \qquad \sigma_{//} = 3\kappa \varepsilon_{//}$$

Elasticité isotrope

- Module de cisaillement μ tel que $\tau = \mu\gamma$
- Module de compressibilité κ tel que $\bar{p} = \frac{1}{3}\sigma_{||} = \kappa \frac{\Delta V}{V}$
- Module de Young E tel que $\sigma = E \varepsilon$ en traction simple
- Coefficient de Poisson ν tel que $\varepsilon_T = -\nu\varepsilon_L$ en traction simple (ε_T , déformation transverse, ε_L , déformation longitudinale)
- Contrainte en fonction des déformations

$$\underset{\sim}{\sigma} = \lambda \text{Tr} \underset{\sim}{\varepsilon} \underset{\sim}{I} + 2\mu \underset{\sim}{\varepsilon} \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{||} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

- Déformations en fonction des contraintes

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \underset{\sim}{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr} \underset{\sim}{\sigma} \underset{\sim}{I} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \varepsilon_{||} \delta_{ij}$$

Relations entre les coefficients d'élasticité

- Expressions de λ , μ et κ

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \quad 3\kappa = \frac{E}{1-2\nu} = 3\lambda + 2\mu$$

- Expressions de E et ν

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

- Typiquement :

$$\nu \approx 1/3 \quad 2\mu \approx 3E/4 \quad \kappa \approx E$$

- Caoutchouc :

$$\nu \approx 1/2 \quad \mu \approx E/3 \quad \kappa \gg E$$

Traction simple

- Etat de contrainte uniaxial, de manière générale $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_0 \underline{n} \otimes \underline{n}$; par exemple dans un prisme d'axe x_1 , x_1 étant la direction de traction, et les faces latérales étant libres :

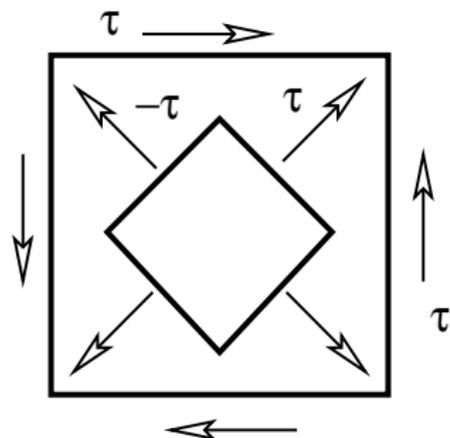
$$\underline{\underline{\sigma}} := \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si la section vaut S_0 , la force en direction x_1 est : $F = \sigma_0 S_0$
- Dans le repère $x_1 x_2 x_3$, le tenseur de déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} := \begin{pmatrix} \sigma_0/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\sigma_0/E & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\sigma_0/E \end{pmatrix}$$

- Si la longueur est L_0 , l'allongement en direction x_1 est : $\Delta L = \varepsilon L_0$
- La *raideur* du prisme vaut $R = F/\Delta L = ES_0/L_0$

Cisaillement simple



$$\tau = \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$$

- Chargement purement déviatorique
- Exemple du cisaillement pur dans le plan $x_1 x_2$

$$\tilde{\sigma} := \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rotation de $\pi/4$

$$\tilde{\sigma} := \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Flexion circulaire

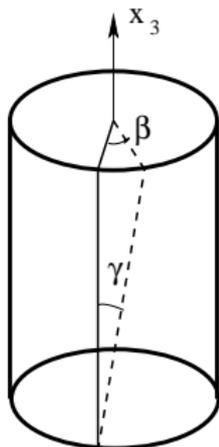
- Une seule composante au tenseur de contrainte, mais non uniforme dans l'espace :

$$\underline{\underline{\sigma}} := \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Par exemple : $\sigma_{11} = \frac{Mx_3}{I}$, où M est le moment de flexion autour de x_2 , et $I = \int_S x_3^2 dS$ est le moment d'inertie de la section droite par rapport à x_2
- Un prisme d'axe x_1 qui subit ce chargement présente une rotation relative des sections caractérisée par un angle θ tel que $\theta_{,1} = \frac{M}{EI}$
- La déformation s'exprime en fonction de la courbure $u_{3,11}$ par : $\varepsilon_{11} = -x_3 u_{3,11}$
- Pour une section rectangulaire de hauteur h selon x_3 et de largeur b selon x_2 :

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Torsion



- Γ contour de la section
- Une génératrice devient une hélice

- Déplacements

$$u_1 = -\alpha x_3 x_2 \quad u_2 = \alpha x_3 x_1 \quad u_3 = \alpha \phi(x_1, x_2)$$

- Contrainte

$$\sigma_{13} = \mu \alpha (\phi_{,1} - x_2) = \mu \alpha \theta_{,2} \quad (1)$$

$$\sigma_{23} = \mu \alpha (\phi_{,2} + x_1) = -\mu \alpha \theta_{,1} \quad (2)$$

$$\text{avec } \Delta \phi = 0 \quad \Delta \theta + 2 = 0 \quad \theta = 0 \text{ sur } \Gamma$$

- Moment de torsion :

$$M = \int_S (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dS$$

- Module de rigidité à la torsion :

$$D = 2\mu \int_S \theta dx_1 dx_2 = M/\alpha$$

Torsion, section circulaire

- Pour un prisme circulaire de longueur L , et de rayon extérieur R_e : $\beta = \alpha L$
- En surface extérieure $\gamma = 2\varepsilon_{\theta z} = \alpha R$
- Contrainte de cisaillement $\tau = \mu \alpha r$
- θ s'exprime simplement : $\theta = \frac{1}{2}(R^2 - x_1^2 - x_2^2)$
- Une section perpendiculaire à x_3 reste plane : $\phi = 0$
- Tube de rayon int R_i et de rayon ext R_e : $D = \mu \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{2}$
- Tube mince de rayon R et d'épaisseur e : $D = 2\mu\pi e R^3 = M/\alpha$ donc

$$\alpha = \frac{\tau}{\mu R} = \frac{M}{2\pi\mu e R^3}, \text{ et } \tau = \frac{M}{2e\pi R^2}$$

Coordonnées cylindriques

On se restreint aux exemples classiques pour lesquels :

- les déplacements sont portés par \underline{e}_r , $\underline{u} = u_r \underline{e}_r$
- la seule force de volume éventuellement non nulle est $f_r \underline{e}_r$.

- Equilibre

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

- Déformation

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

soit : $r\varepsilon_{\theta\theta,r} = \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}$

- Forces de volume nulles, rayon intérieur a , rayon extérieur b

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2}$$

$$u_r = Cr + D/r$$

Cylindre sous pression

- Tube sous pression, pression intérieure p_i , pression extérieure p_e

$$A = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} \quad B = \frac{(p_i - p_e) a^2 b^2}{b^2 - a^2}$$

- Cylindre plein ($p_i = 0$, $a = 0$, $p_e = p$),

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = p$$

- Pression interne ($p_i = p$, a, b),

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) p \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) p$$

- Tube mince sous pression interne p , rayon R , épaisseur e ,

$$\sigma_{rr} \text{ négligeable} \quad \sigma_{\theta\theta} = pR/e$$

Coordonnées sphériques

On se restreint aux exemples classiques pour lesquels :

- les déplacements sont portés par \underline{e}_r , $\underline{u} = u_r \underline{e}_r$
- la seule force de volume éventuellement non nulle est $f_r \underline{e}_r$.

- Equilibre

$$\sigma_{rr,r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

- Déformation

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

soit : $r\varepsilon_{\theta\theta,r} = \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}$

- Forces de volume nulles, rayon intérieur a , rayon extérieur b

$$\sigma_{rr} = A - \frac{2B}{r^3} \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3}$$

$$u_r = Cr + D/r^2$$

Sphère sous pression

- Sphère sous pression, pression intérieure p_i , pression extérieure p_e

$$A = \frac{p_i a^3 - p_e b^3}{b^3 - a^3} \quad B = \frac{(p_i - p_e) a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)}$$

- Sphère pleine ($p_i = 0$, $a = 0$, $p_e = p$),

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = p$$

- Pression interne ($p_i = p$, a, b),

$$\sigma_{rr} = \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left(1 - \frac{b^3}{r^3} \right) p \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3} \right) p$$

- Tube mince sous pression interne p , rayon R , épaisseur e ,

$$\sigma_{rr} \text{ négligeable} \quad \sigma_{\theta\theta} = pR/2e$$