

## PROPRIETES ELASTIQUES D'UN COMPOSITE A MATRICE METALLIQUE POUR L'INDUSTRIE AERONAUTIQUE

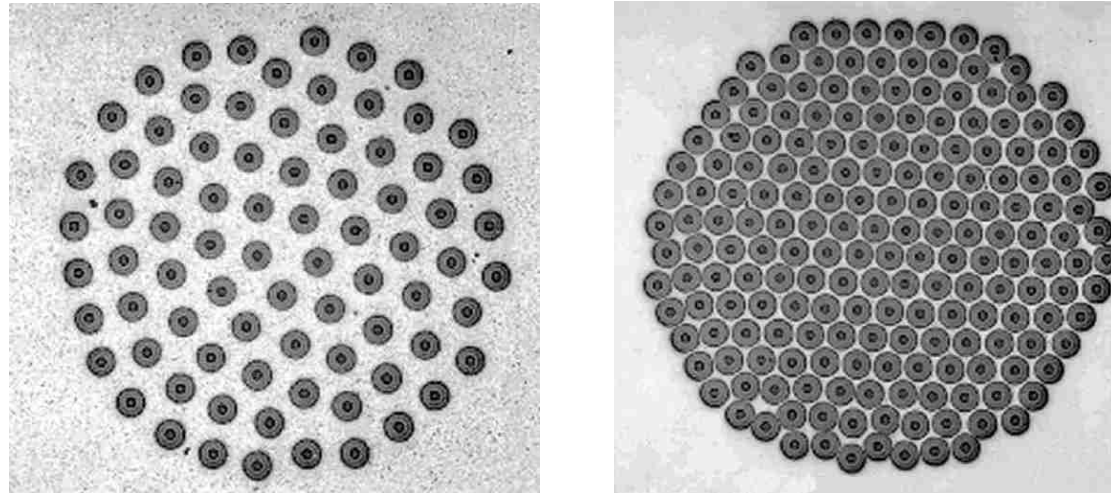


Fig.1 : Composite à matrice métallique SiC-titane pour application aéronautique pour deux fractions volumiques de fibres différentes (diamètre des fibres 100  $\mu$ m)

On envisage de remplacer certains disques de turbine des moteurs d'avion par des anneaux en composites. Il s'agit de composites à fibres de carbure de silicium dans une matrice métallique en alliage de titane. L'intérêt est de réduire considérablement la masse de la pièce tout en garantissant une bonne résistance à la force centrifuge que subit le disque en rotation. Des photos de microstructures pour deux fractions volumiques de fibres sont données sur la figure 1.

Les propriétés élastiques des fibres en SiC sont

$$E_f = 410000\text{MPa}, \quad \nu_f = 0.25$$

Les propriétés de la matrice en alliage de titane sont

$$E_m = 110000\text{MPa}, \quad \nu_m = 0.3$$

Les fibres sont supposées parallèles entre elles.

1. Fuseau de Hill : Tracer les bornes de Voigt et Reuss pour le biphasé en fonction de la fraction volumique  $f$  de fibres.

Les modules de cisaillement et de compressibilité des constituants sont

$$\mu_{f,m} = \frac{E_{f,m}}{2(1+\nu_{f,m})}, \quad k_{f,m} = \frac{E_{f,m}}{3(1-\nu_{f,m})}$$

$$\mu^V = \langle \mu \rangle = f\mu_f + (1-f)\mu_m$$

$$1/\mu^R = f/\mu_f + (1-f)/\mu_m, \quad 1/k^R = f/k_f + (1-f)/k_m$$

2. Bornes de Hashin–Shtrikman : *Il existe en fait des bornes plus étroites que les bornes de Voigt et Reuss dans le cas où la répartition des phases est supposée isotrope dans le plan au sein du matériau, il s'agit des bornes de Hashin–Shtrikman. L'établissement de ces bornes dépasse le cadre de ce cours mais il est intéressant d'utiliser le résultat. Les expressions sont assez lourdes :*

$$\mu^{HS+} = \left( f\mu_f + \frac{(1-f)\mu_m}{1 + \beta_f \frac{\mu_m - \mu_f}{k_f}} \right) \left( f + \frac{1-f}{1 + \beta_f \frac{\mu_m - \mu_f}{\mu_f}} \right)^{-1}$$

$$k^{HS+} = \left( fk_f + \frac{(1-f)k_m}{1 + \alpha_f \frac{k_m - k_f}{k_f}} \right) \left( f + \frac{1-f}{1 + \alpha_f \frac{k_m - k_f}{k_f}} \right)^{-1}$$

$$\mu^{HS-} = \left( (1-f)\mu_m + \frac{f\mu_f}{1 + \beta_m \frac{\mu_f - \mu_m}{k_m}} \right) \left( 1-f + \frac{f}{1 + \beta_m \frac{\mu_f - \mu_m}{\mu_m}} \right)^{-1}$$

$$k^{HS-} = \left( (1-f)k_m + \frac{fk_f}{1 + \alpha_m \frac{k_f - k_m}{k_m}} \right) \left( 1-f + \frac{f}{1 + \alpha_m \frac{k_f - k_m}{k_m}} \right)^{-1}$$

avec

$$\alpha_f = \frac{3 + 4\nu_f}{8(1 - \nu_f)}, \quad \beta_f = \frac{3 - 4\nu_f}{4(1 - \nu_f)}$$

$$\alpha_m = \frac{3 + 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)}, \quad \beta_m = \frac{3 - 4\nu_m}{4(1 - \nu_m)}$$

Compléter le fuseau de Hill à l'aide des bornes de Hashin–Shtrikman. Essayer un contraste de propriétés plus grand que dans l'application visée (prendre par exemple  $E_m = 20000$  MPa). Commenter.

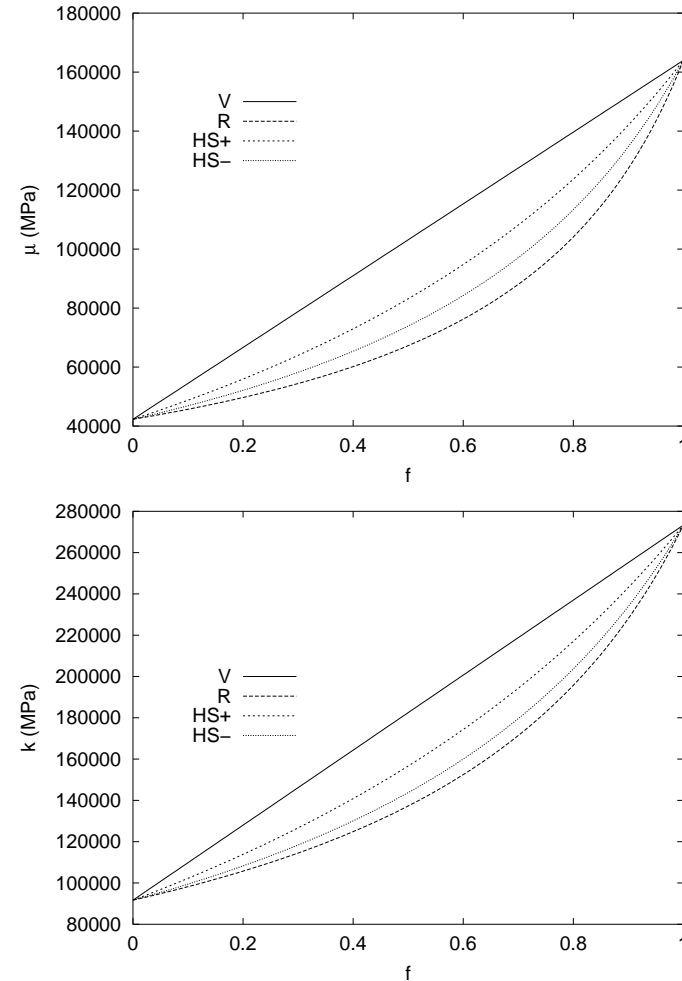


Fig.2 : Fuseau de Hill pour le composite SiC/titane

La figure ci-dessus donne les fuseaux de Hill pour le composite SiC/titane, alors qu'en page suivante on a choisi un module de matrice bien plus faible que celui du titane.

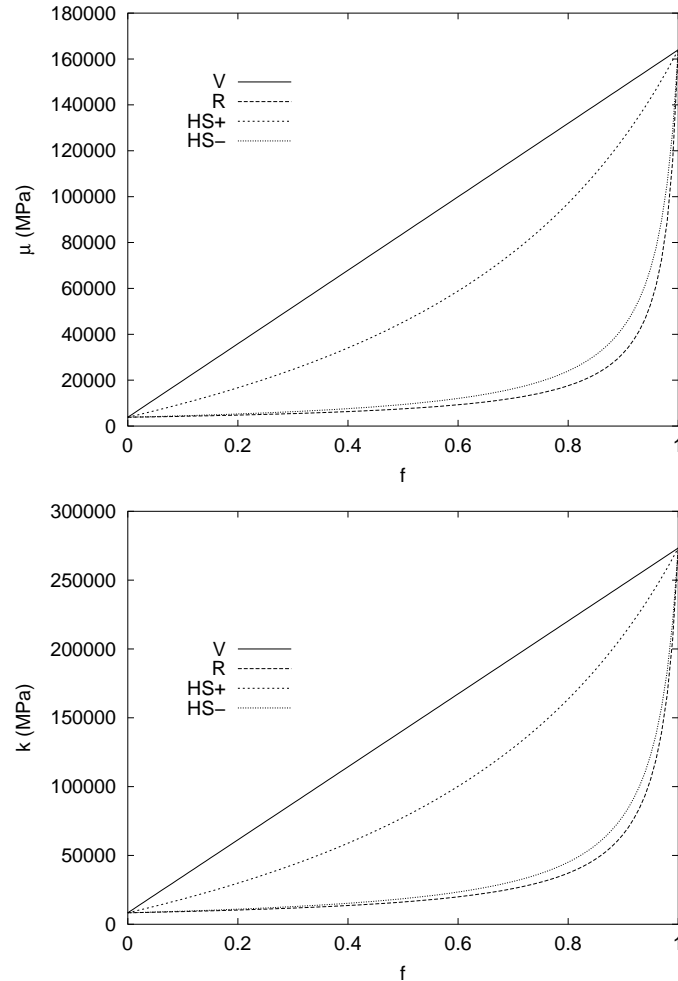


Fig.3 : Fuseau de Hill pour le composite SiC/matrice polymère ( $E_m = 10000$  MPa)

3. Homogénéisation périodique : Lorsqu'on regarde la microstructure du matériau (Fig.1), on constate que la distribution des fibres est quasiment

périodique, surtout pour les fortes fractions volumiques de fibre. Il est possible d'estimer les propriétés effectives du composite en prenant en compte l'hypothèse de périodicité. La solution du problème n'est a priori pas analytique de sorte que la résolution est entièrement numérique. On choisit une cellule élémentaire permettant de reconstruire par périodicité l'ensemble du composite. Une telle cellule est donnée sur la figure 4b, pour une fraction de fibres  $f = 0.4$ . Justifier le choix de cette cellule. Quelle est la fraction volumique maximale de fibres au sein de la matrice compatible avec cette hypothèse de périodicité ?

Pour déterminer les modules effectifs pour une telle géométrie, on impose une déformation moyenne  $\tilde{E}$  on cherche le champ de déplacement sous la forme :

$$\underline{u} = \tilde{E} \cdot \underline{x} + \underline{v}$$

où  $\underline{v}$  est une perturbation qui prend des valeurs identiques en deux points homologues du contour extérieur de la cellule :

$$\underline{v}(\underline{x}^+) = \underline{v}(\underline{x}^-)$$

où  $\underline{x}^+ - \underline{x}^-$  est égal à une période de la microstructure. On demande en outre que les efforts en deux points homologues soient opposés. Montrer qu'avec ces conditions aux limites, on a bien

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle_{cellule} = \tilde{E}$$

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle = \langle \underline{\sigma} \rangle : \tilde{E}$$

Pour déterminer les modules effectifs on considère six problèmes aux limites en imposant une composante non nulle du tenseur  $\tilde{E}$  à chaque fois. Le calcul des contraintes moyennes correspondantes fournit les termes de la matrice d'élasticité effective. On illustre par la figure 4c le champ de contrainte  $\sigma_{12}$  obtenu en imposant  $E_{12} = 0.2\%$ , les autres composantes de  $\tilde{E}$  étant nulles. C'est l'état déformé de la cellule qui est présenté. Commenter.



Fig.4 : (a) L'assemblage périodique, (b) la cellule élémentaire et (c) un exemple de résultat en cisaillement

Simulation numérique : On va traiter le problème par éléments finis. On utilise pour cela le code ZéBuLoN sur un serveur web du Centre des Matériaux. Les calculs sont réalisés sous l'hypothèse des déformations planes. Les conditions aux limites sont périodiques sur la cellule élémentaire.

Le choix de la cellule permet de reconstituer une disposition en quinconce des fibres (ou en nid d'abeilles, figure 4a) proche des observations expérimentales. L'empilement a toutefois des limites. Il est dit compact lorsque

$$f = f_c = \sqrt{3}\pi/8 \sim 0.68$$

Montrer que les modules d'élasticité obtenus par homogénéisation périodique sur la cellule considérée sont isotropes dans le plan. Placer les valeurs trouvées pour  $\mu^{eff}$  et  $k^{eff}$  (dans le plan) sur le fuseau de Hill pour différentes fractions volumiques. Que remarquez-vous ? Inverser les propriétés (fibre molle, matrice dure), porter à nouveau les points trouvés sur le fuseau de Hill.

Les variables du calcul sont les modules d'Young et les coefficients de Poisson de chaque matériau, ainsi que la fraction volumique. Pour obtenir un résultat, il suffit de modifier les valeurs affichées dans les champs suivants et de soumettre le calcul à l'aide de la touche Go.

– Fibre	$E_f$	$\nu_f$
– Matrice	$E_m$	$\nu_m$
– Fraction volumique de fibre	$f =$	
	Reset	Go