

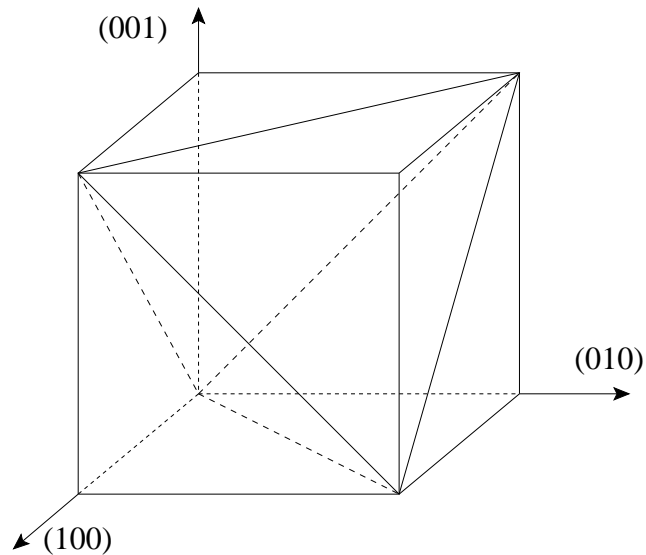
SURFACES DE CHARGE D'UN MONOCRISTAL CFC, D'UN MATÉRIAU DS ET D'UN POLYCRISTAL

MÉCANISMES DE PLASTICITÉ D'UN MONOCRISTAL CFC

Un système de glissement s est caractérisé par son plan (vecteur \underline{n}) et sa direction de glissement (vecteur \underline{m}). La cission résolue τ^s se calcule donc comme :

$$\tau^s = \sigma_{ij}n_i m_j = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(n_i m_j + m_i n_j) = \sigma_{ij}m_{ij}$$

En définissant le tenseur d'orientation par $\underline{\tilde{m}} = \frac{1}{2}(\underline{n} \otimes \underline{m} + \underline{m} \otimes \underline{n})$



Les 4 plans octaédriques d'un cristal cubique

La loi de Schmid postule que le glissement se produit sur un système lorsque la cission résolue atteint un seuil, ou cission résolue critique, notée ici τ_c . Vis-à-vis d'un modèle de plasticité, on est donc conduit à introduire une collection de critères, linéaires en contrainte, tels que :

$$|\tau^s| - \tau_c = 0 \quad \text{ou encore} \quad \underline{\sigma} : \underline{\tilde{m}}^s - \tau_c = 0$$

Les 4 plans octaédriques d'un cristal cubique représentés ci-dessus comportent chacun 3 systèmes. On fait le choix suivant pour les 12 vecteurs \underline{n} et \underline{m} :

num syst	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sqrt{3}n_1$	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
$\sqrt{3}n_2$	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
$\sqrt{3}n_3$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
$\sqrt{2}m_1$	-1	0	-1	-1	0	1	0	1	1	-1	1	0
$\sqrt{2}m_2$	0	-1	1	0	1	1	-1	1	0	1	0	1
$\sqrt{2}m_3$	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1

Les tenseurs d'orientation correspondant sont donc :

num syst	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sqrt{6}m_{11}$	-1	0	-1	-1	0	1	0	-1	-1	-1	1	0
$\sqrt{6}m_{22}$	0	-1	1	0	-1	-1	-1	1	0	1	0	1
$\sqrt{6}m_{33}$	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	-1	-1
$2\sqrt{3}m_{12}$	-1	-1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
$2\sqrt{3}m_{23}$	1	0	1	-1	0	1	0	1	1	-1	1	0
$2\sqrt{3}m_{31}$	0	1	-1	0	1	1	-1	1	0	1	0	1

- Si les seuls termes non nuls du tenseur de contrainte sont σ_{11} , σ_{12} et σ_{21} , le critère s'écrit :

$$|\sigma_{11}m_{11} + 2\sigma_{12}m_{12}| - \tau_c = 0$$

- Si les seuls termes non nuls du tenseur de contrainte sont σ_{11} , et σ_{33} , le critère s'écrit :

$$|\sigma_{11}m_{11} + \sigma_{33}m_{33}| - \tau_c = 0$$

DOMAINE D'ÉLASTICITÉ DANS LE PLAN σ_{11} - σ_{12}

Pour les contraintes σ_{11} et σ_{12} , les valeurs de τ^s sont respectivement :

num syst	1	2	3	4	5	6
τ^s	$-\sigma_{11} - \sigma_{12}$	$-\sigma_{12}$	$-\sigma_{11}$	$-\sigma_{11} + \sigma_{12}$	σ_{12}	σ_{11}
num syst	7	8	9	10	11	12
τ^s	σ_{12}	$-\sigma_{11}$	$-\sigma_{11} + \sigma_{12}$	$-\sigma_{11}$	$\sigma_{11} + \sigma_{12}$	σ_{12}

En traction-cisaillement, le domaine d'élasticité initial est donc défini par 4 systèmes

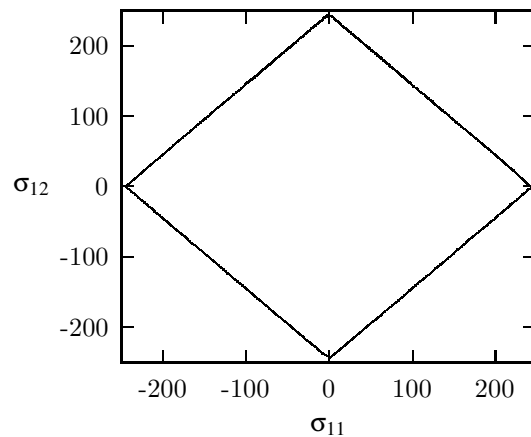
- les systèmes 1 et 11 donnent :

$$|\sigma_{11} + \sigma_{12}| = \tau_c \sqrt{6}$$

- les systèmes 4 et 9 donnent :

$$|\sigma_{11} - \sigma_{12}| = \tau_c \sqrt{6}$$

La figure ci-dessous est construite pour une valeur de τ_c de 100 MPa



DOMAINE D'ÉLASTICITÉ DANS LE PLAN σ_{11} - σ_{33}

Pour les contraintes σ_{11} et σ_{33} , les valeurs de τ^s sont respectivement :

num syst	1	2	3	4	5	6
τ^s	$-\sigma_{11} + \sigma_{33}$	σ_{33}	$-\sigma_{11}$	$-\sigma_{11} + \sigma_{33}$	σ_{33}	σ_{11}
num syst	7	8	9	10	11	12
τ^s	σ_{33}	$-\sigma_{11}$	$-\sigma_{11} + \sigma_{33}$	$-\sigma_{11}$	$\sigma_{11} - \sigma_{33}$	$-\sigma_{33}$

En traction biaxiale, tous les systèmes sont en jeu

- systèmes 1, 4, 9 et 11 :

$$|\sigma_{11} - \sigma_{33}| = \tau_c \sqrt{6}$$

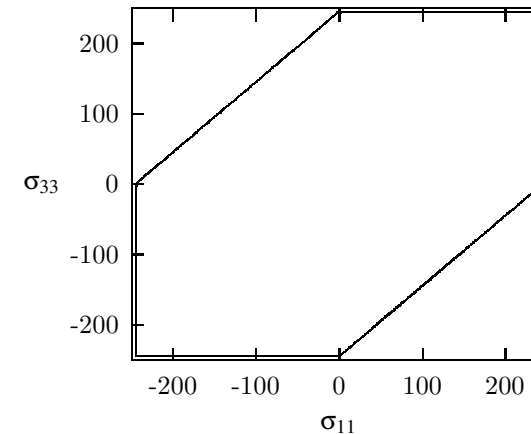
- systèmes 3, 6, 8, 10 :

$$|\sigma_{11}| = \tau_c \sqrt{6}$$

- systèmes 2, 5, 7, 13 :

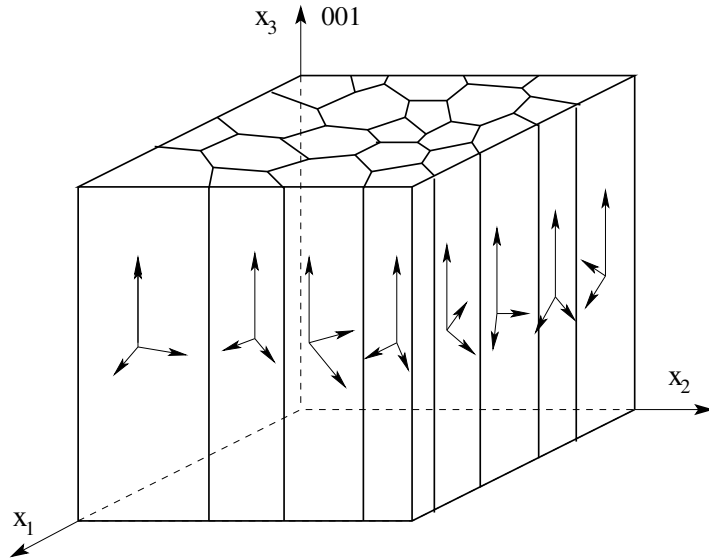
$$|\sigma_{33}| = \tau_c \sqrt{6}$$

La figure ci-dessous est construite pour une valeur de τ_c de 100 MPa

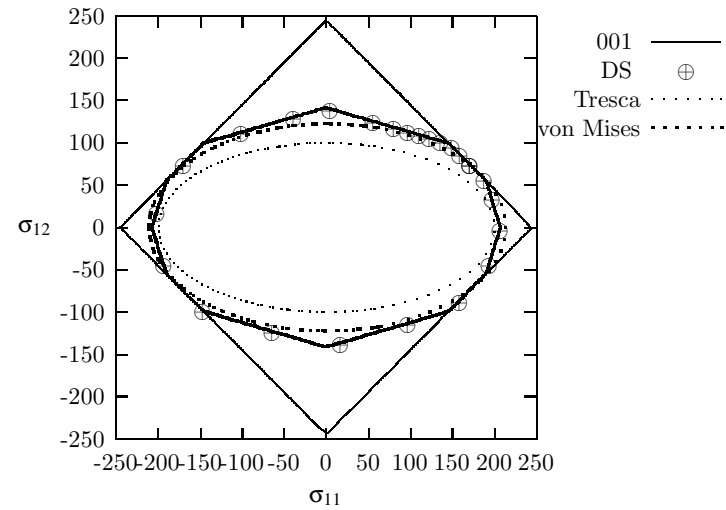


DOMAINE D'ÉLASTICITÉ INITIAL D'UN MATÉRIAU À SOLIDIFICATION DIRIGÉE

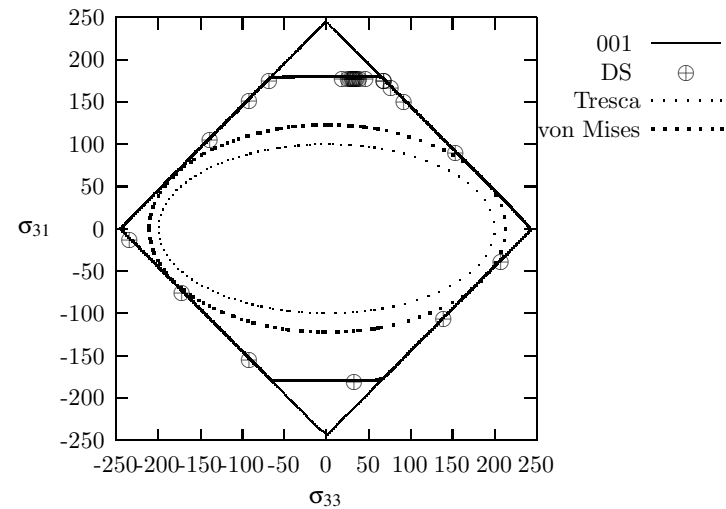
- On construit ici un matériau à solidification dirigée en considérant un agrégat de plusieurs cristaux, dont l'axe (001) reste parallèle à l'axe x_3 du repère laboratoire. L'orientation de chaque grain est donc définie par un seul angle, qui, en raison de la symétrie cubique, varie entre 0 et 90°. Les orientations sont régulièrement espacées, ainsi dans le cas de deux grains, la direction (100) de chacun d'eux fera un angle de 0° et 45° avec l'axe x_1 , pour trois grains un angle de 0°, 30° et 60°, etc...
- On suppose que l'élasticité est homogène dans l'agrégat (c'est-à-dire qu'on ne prend pas en compte le caractère cubique de l'élasticité), si bien que les contraintes sont homogènes dans l'agrégat tant que la limite élastique n'est pas atteinte.
- Dans le plan σ_{11} - σ_{12} , la multiplication des systèmes fait rapidement tendre la forme du critère vers Tresca ou von Mises; ce n'est pas le cas dans le plan σ_{33} - σ_{13} , car on rajoute relativement peu de nouvelles possibilités de glissement dans cette direction



Calculer de nouvelles configurations



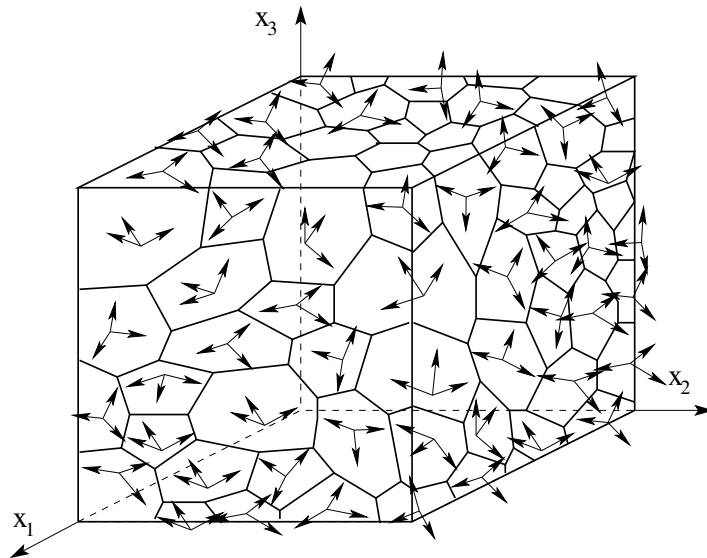
Surface dans σ_{11} - σ_{12} d'un matériau DS à 3 orientations



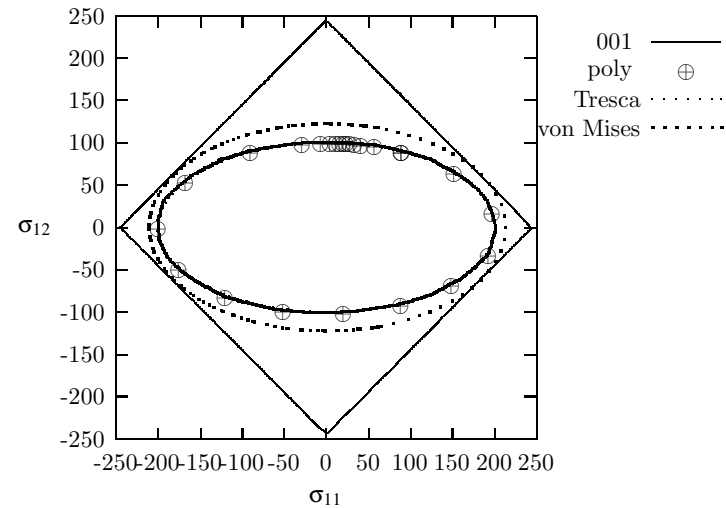
Surface dans σ_{33} - σ_{13} d'un matériau DS à 3 orientations

DOMAINE D'ÉLASTICITÉ INITIAL D'UN AGRÉGAT POLYCRISTALLIN

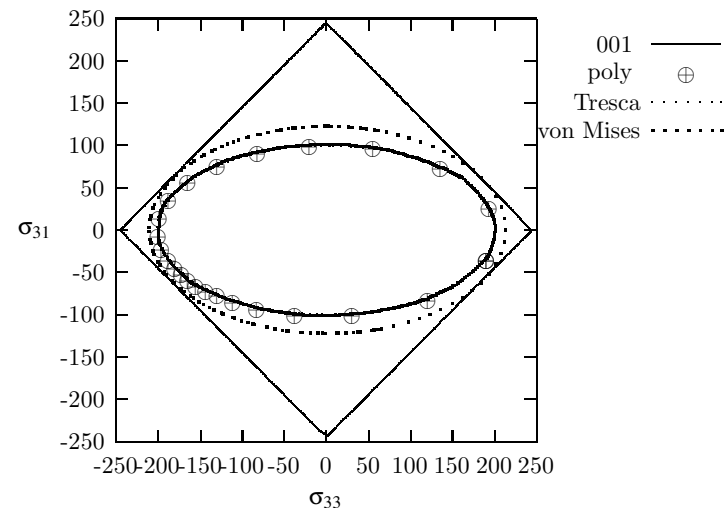
- On construit ici un un agrégat de plusieurs cristaux, dont l'orientation est définie par 3 angles d'Euler par rapport au repère du laboratoire (ϕ_1 , Φ , ϕ_2 , définissant successivement une rotation autour de l'axe x_3 , puis autour du nouvel axe x'_1 , et enfin autour du nouvel axe x''_3). Les orientations sont définies aléatoirement.
- On suppose que l'élasticité est homogène dans l'agrégat (c'est-à-dire qu'on ne prend pas en compte le caractère cubique de l'élasticité), si bien que les contraintes sont homogènes dans l'agrégat tant que la limite élastique n'est pas atteinte.
- Contrairement au cas du matériau à solidification dirigée, les nouvelles possibilités de glissement sont maintenant réparties dans tout l'espace, si bien que l'évolution vers le critère de Tresca s'effectue aussi bien dans le plan σ_{33} - σ_{13} que dans le plan σ_{11} - σ_{12} . Dans l'exemple à 100 grains ci-dessous, le résultat est pratiquement confondu avec celui que donne le critère de Tresca (quelle que soit la direction, il existe maintenant une direction "favorablement" orientée)



Calculer de nouvelles configurations



Surface dans σ_{11} - σ_{12} d'un polycristal à 100 orientations



Surface dans σ_{33} - σ_{13} d'un polycristal à 100 orientations