

MECANIQUE DES MATERIAUX SOLIDES

ANNALES

ENSMP 1ère année, Mécanique des matériaux solides, 23 juin 1997

Exercice :

On considère un cube de côté 1 dont les arêtes sont parallèles aux axes x_1, x_2, x_3 d'un repère orthonormé. Il est chargé uniformément dans la direction x_1 , tandis que les faces en direction x_2 sont libres, et que les faces en direction x_3 restent bloquées.

1. Indiquer quels sont les termes non nuls du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations dans le repère (x_1, x_2, x_3) , et écrire les relations contrainte-déformation lorsque le comportement est élastique et isotrope, avec un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν .

On est en déformations planes selon l'axe x_3 , si bien que les composantes 13, 23, 33 du tenseur de déformation sont nulles, ainsi que les termes 13 et 23 du tenseur de contrainte. Comme la surface normale à l'axe x_2 est libre, les composantes 12, 22, 23 du tenseur de contrainte sont nulles. En fait, il n'y a pas de cisaillement dans le système pour raison de symétrie. Ceci conduit aux formes simples :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les relations contrainte-déformation sont :

$$E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu\sigma_{33}$$

$$E\varepsilon_{22} = -\nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33}$$

$$E\varepsilon_{33} = -\nu\sigma_{11} + \sigma_{33}$$

La condition $\varepsilon_{33} = 0$ permet d'écrire :

$$\sigma_{33} = \nu\sigma_{11}$$

2. Définir la valeur de la contrainte σ_{11} pour laquelle le matériau atteindra la limite du domaine d'élasticité, pour chacun des cas suivants :

– critère de Tresca, $f(\underline{\underline{\sigma}}) = \max_i(\sigma_i) - \min_j(\sigma_j) - \sigma_y$

– critère de von Mises, $f(\underline{\underline{\sigma}}) = J - \sigma_y$

– critère de Drucker-Prager, $f(\underline{\underline{\sigma}}) = J + (\sigma_y - \alpha I_1)/(1 - \alpha)$, en distinguant ici le cas où la contrainte σ_{11} est en traction ou en compression.

On rappelle que I_1 désigne la trace du tenseur de contraintes, et que, si $\underline{\underline{s}}$ est le déviateur associé au tenseur de contrainte, J est défini par $J = ((3/2)\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{0.5}$

Les trois contraintes principales sont $\sigma_3 = 0 < \sigma_2 = \nu\sigma_{11} < \sigma_1 = \sigma_{11}$. La trace du tenseur de contrainte, son déviateur et le deuxième invariant de celui-ci s'écrivent respectivement

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (1 + \nu)\sigma_{11}$$

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{I_1}{3}\underline{\underline{I}} = \frac{\sigma_{11}}{3} \begin{pmatrix} 2 - \nu & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu - 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} = |\sigma_{11}| \sqrt{1 - \nu + \nu^2}$$

Ceci conduit aux résultats suivants :

– pour le critère de Tresca :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = |\sigma_{11}| - \sigma_y \quad \sigma_{11} = \pm\sigma_y$$

– pour le critère de von Mises :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = |\sigma_{11}| \sqrt{1 - \nu + \nu^2} - \sigma_y \quad \sigma_{11} = \pm \frac{\sigma_y}{\sqrt{1 - \nu + \nu^2}}$$

– pour le critère de Drucker–Prager :

$$f(\underline{\sigma}) = (1 - \alpha)J - \alpha I_1 - \sigma_y$$

donc :

$$(1 - \alpha)|\sigma_{11}| \sqrt{1 - \nu + \nu^2} + \alpha \sigma_{11}(1 + \nu) = \sigma_y$$

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_y}{(1 - \alpha)\sqrt{1 - \nu + \nu^2} \pm \alpha(1 + \nu)}$$

Dans cette dernière expression le signe (+) correspond à la traction, le signe (–) à la compression.

3. On suppose que le matériau suit une loi de comportement viscoplastique à seuil, qui s'écrit sous chargement uniaxial de traction simple, en introduisant deux coefficients supplémentaires K et n pour caractériser la viscosité du matériau, et en posant $\langle x \rangle = \max(x, 0)$:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left\langle \frac{\sigma - \sigma_y}{K} \right\rangle^n$$

On généralise cette loi aux chargements tridimensionnels en utilisant le critère de Tresca. On effectue une mise en charge rapide au cours de laquelle la déformation viscoplastique est négligeable, jusqu'à un état de contrainte tel que $\sigma_{11} > \sigma_y$. Quelle est la direction de l'écoulement viscoplastique ?

L'existence du potentiel viscoplastique fournit l'équation :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

qu'il faut appliquer avec le critère de Tresca : $f(\underline{\sigma}) = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j|$ et la

forme : $\Phi = \frac{K}{n+1} \left(\frac{f}{K} \right)^{n+1}$ d'où il vient :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left(\frac{f}{K} \right)^n \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \sigma_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant : $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ le critère prendra la forme : $f(\underline{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_3|$ d'où :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left(\frac{f(\underline{\sigma})}{K} \right)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Calculer alors l'évolution du système (contrainte, déformation, déformation viscoplastique) dans les deux cas suivants :

– on bloque la contrainte σ_{11} à la valeur maximale atteinte σ_m ;

– on bloque la déformation totale ε_{11} à la valeur maximale atteinte ε_m .

On a :

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_{11}^e + \dot{\varepsilon}_{11}^{vp}$$

$$0 = \dot{\varepsilon}_{33}^e + \dot{\varepsilon}_{33}^{vp}$$

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{11} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{33} + \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_y}{K} \right)^n$$

$$0 = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{33} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{11} - \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_y}{K} \right)^n$$

donc :

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{1 - \nu^2}{E} \dot{\sigma}_{11} + (1 - \nu) \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_y}{K} \right)^n$$

On suppose que la mise en charge est instantanée, si bien que, à $t = 0$:

$$\varepsilon_s = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_s$$

- si on bloque la contrainte à la valeur σ_m , on a $\sigma_s = \sigma_m$, et $\dot{\sigma}_{11} = 0$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_s + (1-\nu) \int_0^t \left(\frac{\sigma_m - \sigma_y}{K} \right)^n dt \\ &= \frac{1-\nu}{E} \sigma_m + (1-\nu) \left(\frac{\sigma_m - \sigma_y}{K} \right)^n t\end{aligned}$$

Nous remarquons que l'évolution de la déformation est linéaire avec le temps.

- si on bloque la déformation à la valeur ε_m , on a $\varepsilon_s = \varepsilon_m$, et $\dot{\varepsilon}_{11} = 0$, si bien que :

$$\dot{\sigma}_{11} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_y}{K} \right)^n + 0$$

L'exposant n est en général plus grand que 1. L'évolution de σ_{11} est donc décrite par une fonction puissance :

$$\sigma_{11} = \sigma_y + K \left(\left(\frac{\sigma_s - \sigma_y}{K} \right)^{1-n} + \frac{E(n-1)}{(1+\nu)K} t \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

Avec :

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_m$$

5. Dans le cas où on choisit au contraire le critère de von Mises pour effectuer l'extension tridimensionnelle du modèle viscoplastique, et en supposant toujours que l'on effectue une mise en charge rapide, la contrainte atteinte étant telle que l'on se trouve hors du domaine d'élasticité :

– donner l'expression du tenseur vitesse de déformation viscoplastique à la fin de la mise en charge,

– en supposant que la contrainte σ_{11} est maintenue constante, montrer que la contrainte σ_{33} tend asymptotiquement vers une limite que l'on calculera. Quelles sont alors les composantes de la vitesse de déformation viscoplastique ?

Dans ce cas on a :

$$J(\underline{\sigma}) = \sqrt{\frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33}}{2}}$$

$$\frac{\partial J(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3s}{2J(\underline{\sigma})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33})}} \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} - \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{11} - \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{33} - \sigma_{11} \end{pmatrix}$$

Les vitesses des déformations viscoplastiques :

$$\dot{\varepsilon}_{11}^{vp} = \left(\frac{\sqrt{\frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33}}{2}} - \sigma_y}{K} \right)^n \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{33}}{\sqrt{2(\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33})}}$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}^{vp} = \left(\frac{\sqrt{\frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33}}{2}} - \sigma_y}{K} \right)^n \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11}}{\sqrt{2(\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33})}}$$

La contrainte σ_{11} reste constante, donc $\dot{\sigma}_{11} = 0$. La déformation dans la direction 3 reste bloquée, on a :

$$\dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_{33}^e + \dot{\varepsilon}_{33}^{vp} = 0$$

$$0 = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{33} + \left(\frac{\sqrt{\frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33}}{2}} - \sigma_y}{K} \right)^n \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11}}{\sqrt{2(\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33})}}$$

On remarque que, hors de la zone élastique :

$$\left(\frac{\sqrt{\frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33}}{2}} - \sigma_y}{K} \right)^n \frac{1}{\sqrt{2(\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33})}} > 0 \quad \forall \sigma_{33}$$

On suppose que σ_{33} a une valeur asymptotique, la condition nécessaire est donc $\dot{\sigma}_{33} = 0$. On obtient donc :

$$2\sigma_{33} - \sigma_{11} = 0$$

ou :

$$\sigma_{33} = \frac{\sigma_{11}}{2} = \frac{\sigma_m}{2}$$

Il est simple de vérifier que si $\sigma_{33} = \frac{\sigma_m}{2}$, on a $\dot{\sigma}_{33} = 0$. Si $\sigma_{33} < \frac{\sigma_m}{2}$, on obtient $\dot{\sigma}_{33} > 0$, ceci montre que σ_{33} augmente jusqu'à la valeur asymptotique $\sigma_{33} = \frac{\sigma_m}{2}$. Cette valeur est ensuite impossible d'augmenter (car $\dot{\sigma}_{33} = 0$), ni diminuer (car si σ_{33} diminue, on obtient à nouveau $\dot{\sigma}_{33} > 0$, ceci est impossible).

Cylindre en torsion

On considère un barreau prismatique d'axe x_3 , de section circulaire (rayon R), et de longueur L dans le repère orthonormé (x_1, x_2, x_3) . Il est "suffisamment long" pour que les contraintes et les déformations soient indépendantes de x_3 .

Résolution en élasticité

Le matériau est supposé élastique isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . Le barreau est encasté dans sa partie inférieure (plan $(x_3 = 0)$), et il subit un champ de déplacement \underline{u} , pour lequel la composante selon 3 est nulle, et :

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3 \quad ; \quad u_2 = \alpha x_1 x_3$$

1. Calculer les composantes du tenseur de déformation.

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1'3} + u_{3'1}) = -\frac{\alpha x_2}{2}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2'3} + u_{3'2}) = \frac{\alpha x_1}{2}$$

Les autres composantes du tenseur de déformation sont nulles.

2. Calculer les composantes du tenseur des contraintes.

$$\sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} = -\mu\alpha x_2$$

$$\sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} = \mu\alpha x_1$$

Les autres composantes du tenseur de contraintes sont nulles.

3. Montrer que les équations d'équilibre sont vérifiées, en l'absence de forces de volume ; calculer le vecteur contrainte sur un point courant de la section latérale, et sur un point courant de la section supérieure.

Les équations d'équilibre sont bien vérifiées, en l'absence de forces de volumes.

Sur un point courant de la section latérale, le vecteur contrainte reste une seule composante de cisaillement :

$$\tau = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \mu\alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \mu\alpha r$$

Le problème est indépendant selon x_3 , le vecteur contrainte de la section supérieure reste inchangé par rapport à celui d'une section latérale.

4. Calculer la force résultante sur la section supérieure, ainsi que le moment \mathcal{M} autour de l'axe x_3 . En déduire que les champs obtenus sont bien la solution d'un problème de torsion autour de l'axe x_3 . Quelle est la signification physique de α ?

La force résultante sur la section supérieure est alors un moment de torsion qui vaut :

$$M = \int_S (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dS = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr = \frac{1}{2} \pi \mu R^4 \alpha$$

α représente l'angle de torsion unitaire, c'est-à-dire, pour une longueur d'unité, la section supérieure tourne d'un angle α par rapport à la section inférieure.

Résolution en plasticité

On suppose que le matériau est élastique-parfaitement plastique, avec une limite d'élasticité en traction simple σ_y .

1. En supposant que σ_{13} et σ_{23} sont les deux seules composantes non nulles du tenseur de contraintes, montrer que, pour le critère de von Mises comme pour celui de Tresca, on aura en régime plastique :

$$\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = \tau_y^2$$

τ_y , étant la limite d'élasticité en cisaillement pur.

Exprimer pour chacun des deux critères τ_y en fonction de σ_y .

En régime plastique, pour notre cas de cisaillement pur, on aura :

$$\tau = \tau_y$$

On obtient donc :

$$\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = \tau_y^2$$

Pour le critère de von Mises :

$$\tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

Pour le critère de Tresca :

$$\tau_y = \frac{\sigma_y}{2}$$

2. Pour quelle valeur M_e du moment M une zone plastique apparaît-elle dans la structure pour le critère de von Mises ? Quelle est sa localisation ?

La plasticité apparaît en premier sur le rayon extérieur, lorsque $\mu\alpha R = \sigma_y/\sqrt{3}$. On a donc à ce moment un angle $\beta_e = \frac{\sigma_y L}{\sqrt{3}\mu R}$, un moment $M_e = \frac{\sigma_y}{2\sqrt{3}}\pi R^3$.

3. Montrer que le problème d'obtention des contraintes dans la zone plastique est statiquement déterminé, c'est-à-dire que l'on peut obtenir les contraintes dans la structure sans référence à la déformation.

En plasticité parfaite, la déformation ainsi que la contrainte sont imposées par le «noyau» qui reste élastique, elles sont toujours linéaires en fonction du rayon. A la frontière entre les zones élastique et plastique, le critère de plasticité est vérifié, on a donc :

$$\tau = \sigma_{\theta z} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

Dans la zone plastique, la contrainte reste constante :

$$\tau = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

Le problème est donc *statiquement déterminé*

4. Donner la forme du tenseur de vitesse de déformation plastique dans la zone plastique. Montrer, pour un point du barreau qui est d'abord en élasticité, puis en plasticité, que le trajet de déformation dans le plan ϵ_{13} - ϵ_{23} est un segment de droite dont la pente reste inchangée lors du passage en plasticité.

On a le tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Tenseur de direction d'écoulement :

$$\underline{\underline{n}} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13}/\sigma_y \\ 0 & 0 & \sigma_{23}/\sigma_y \\ \sigma_{13}/\sigma_y & \sigma_{23}/\sigma_y & 0 \end{pmatrix}$$

Les champs de vitesse de déformation plastique :

$$\dot{\epsilon}_{13}^p = \frac{3\sigma_{13}}{2\sigma_y} \dot{p}$$

$$\dot{\epsilon}_{23}^p = \frac{3\sigma_{23}}{2\sigma_y} \dot{p}$$

Les champs de déformation totale s'écrivent :

$$\epsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2\mu} + \frac{3\sigma_{13}}{2\sigma_y} p$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu} + \frac{3\sigma_{23}}{2\sigma_y} p$$

Dans le plan $\varepsilon_{13} - \varepsilon_{23}$ pour un point qui passe de l'élasticité en plasticité, nous avons toujours :

$$\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{23}} = \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}} = -\frac{x_2}{x_1}$$

Cette dernière équation représente que le trajet de déformation est un segment droite qui reste inchangé pour un point.

5. En déduire que le champ de déplacement utilisé en élasticité reste valide en élasto-plasticité, ce qui justifie en même temps l'hypothèse que seules σ_{13} et σ_{23} sont non nulles. On a donc trouvé une solution plastiquement admissible, compatible avec les conditions statiques et cinématiques imposées à la structure.

Avec un rapport constant $\varepsilon_{13}/\varepsilon_{23} = -\frac{x_2}{x_1}$ pour un point qui passe de l'élasticité en plasticité, le champ de déplacement utilisé reste encore valide en élasto-plasticité.

6. Calculer, pour une valeur donnée de α , la valeur c du rayon où se trouve la frontière entre la zone élastique et la zone plastique. Calculer la valeur du moment obtenue en fonction de c .

A la frontière entre les zones élastique et plastique, le critère de plasticité est vérifié, on a donc :

$$\tau = \mu\alpha c = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

$$c = \frac{\sigma_y}{\mu\alpha\sqrt{3}}$$

On obtient le moment par intégration, soit :

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr \\ &= \frac{2\pi\sigma_y}{\sqrt{3}} \left(\int_0^c \frac{r^3}{c} dr + \int_c^R r^2 dr \right) \\ &= \frac{2}{3}\pi \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left(R^3 - \frac{c^3}{4} \right) \end{aligned}$$

7. Quelle est la valeur maximale théorique \mathcal{M}_M du moment que peut supporter le barreau ?

La valeur limite \mathcal{M}_M est obtenue pour $c = 0$:

$$\mathcal{M}_M = \frac{2}{3}\pi \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} R^3 = \frac{4}{3} M_e$$

8. On suppose qu'on effectue un chargement jusqu'à un moment \mathcal{M}_m , tel que $\mathcal{M}_e < \mathcal{M}_m < \mathcal{M}_M$, puis que l'on ramène le moment à zéro. Tracer la variation de τ (tel que $\tau^2 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$) le long du rayon r ($0 < r < R$) pour le moment maximum et après retour à zéro. Risque-t-on de rencontrer de nouveau le domaine plastique lors de la décharge ?

On suppose que la décharge s'effectue en élasticité et on le vérifiera après. Le résultat du problème est alors la superposition des deux cas : le chargement élastoplastique jusqu'à \mathcal{M}_m et la décharge élastique de \mathcal{M}_m à zéro.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} - \text{ si } \quad r = 0 \quad \tau &= 0 \\ - \text{ si } \quad r = c \quad \tau &= \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} - \frac{2c\mathcal{M}_m}{\pi R^4} \\ - \text{ si } \quad r = R \quad \tau &= \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} - \frac{2\mathcal{M}_m}{\pi R^3} \end{aligned}$$

Notons que l'hypothèse de décharge élastique est vérifiée car :

$$\tau(R) = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} - \frac{2\mathcal{M}_m}{\pi R^3} < \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} - \frac{4\sigma_y}{3\sqrt{3}} = -\frac{\sigma_y}{3\sqrt{3}}$$

On ne pourra pas rencontrer de nouveau la plasticité lors de la décharge.

9. Le type de préchargement décrit dans la question précédente est utilisé industriellement pour traiter par exemple les arbres de transmission. Quel intérêt voyez-vous à un tel traitement en vue d'une

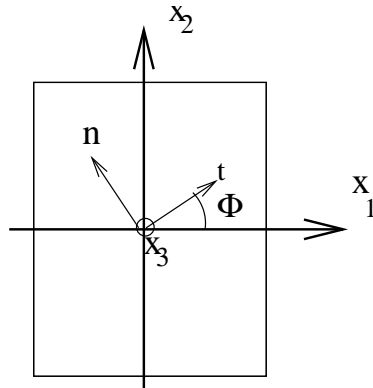
utilisation ultérieure ? Montrer qu'il est fondamental de mémoriser le sens de rotation lors de la précharge, faute de quoi on détériore la valeur du moment élastique apparent au lieu de l'améliorer.

Après la décharge, si l'on continue un chargement dans le même sens avec le préchargement, le trajet reste encore en élasticité jusqu'à $M = \mathcal{M}_m > \mathcal{M}_e$. Nous avons alors une valeur du moment élastique plus grande.

Si l'on effectue le chargement dans le sens inverse avec celui du préchargement, le trajet reste encore en élasticité jusqu'à $M = \mathcal{M}_m - \frac{\pi R^3 \sigma_y}{\sqrt{3}} < \mathcal{M}_e$

ENSMP 1ère année, Mécanique des matériaux solides, 12 juin 1998

Etude de la localisation dans une plaque



On applique sur un parallélépipède dont les arêtes sont respectivement parallèles aux axes x_1 , x_2 et x_3 de vecteurs directeurs $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ un effort caractérisé dans ce repère par un tenseur dont les seules composantes non nulles sont σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} .

On veut caractériser la direction des faces selon lesquelles risque de s'établir une instabilité conduisant à la ruine par déformation excessive. On suppose que le matériau est rigide-plastique (pas de déformation élastique, limite d'élasticité σ_0), et qu'il obéit au critère de von Mises.

On suppose également que la plaque est entièrement plastifiée. La direction de la face recherchée est définie par le vecteur \underline{n} , qui est situé dans le plan (x_1, x_2) , et qui fait un angle Φ avec \underline{e}_2 . Elle contient donc les vecteurs \underline{t} et \underline{e}_3 , le repère $(\underline{t}, \underline{n})$ étant direct. Le problème se résume à démontrer qu'il peut exister une discontinuité du champ de contrainte lorsqu'on traverse une ligne définie par la direction \underline{t} , c'est-à-dire que, connaissant complètement la solution d'un côté de la ligne définie par \underline{t} , il peut être impossible de déterminer complètement la solution de l'autre côté.

1. Indiquer la forme du tenseur des contraintes dans le repère $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{e}_3)$. Ecrire les équations d'équilibre dans ce repère. (On introduira les notations σ_{mn} , σ_{tt} , σ_{nt} et les dérivées partielles $\partial./\partial n = ._n$ et $\partial./\partial t = ._t$).

Dans le repère indiqué, les composantes du tenseur de contrainte sont :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{tt} & \sigma_{nt} & 0 \\ \sigma_{nt} & \sigma_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

avec, en notant $c = \cos \Phi$ et $s = \sin \Phi$:

$$\sigma_{tt} = \sigma_{11}c^2 + \sigma_{22}s^2 \quad \sigma_{nn} = \sigma_{11}s^2 + \sigma_{22}c^2 \quad \sigma_{nt} = (\sigma_{11} - \sigma_{22})cs$$

Les équations d'équilibre s'expriment alors :

$$\sigma_{tt,t} + \sigma_{nt,n} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{nt,t} + \sigma_{nn,n} = 0$$

2. Indiquer quelles sont les dérivées partielles des composantes du tenseur des contraintes qui sont connues en un point de la face définie par $(\underline{t}, \underline{e}_3)$, et dire pourquoi on ne peut pas déterminer $\sigma_{tt,n} = \partial\sigma_{tt}/\partial n$.

On peut suivre dans chaque matériau des lignes parallèles à \underline{t} , donc définir les dérivées partielles par rapport à \underline{t} . Grâce aux équations précédentes, la donnée de $\sigma_{tt,t}$ et $\sigma_{nt,t}$ permet de définir $\sigma_{nt,n}$ et $\sigma_{nn,n}$ au passage de la frontière. Il n'y a par contre pas d'information particulière pour connaître $\sigma_{tt,n}$.

3. En désignant par f la fonction qui définit le critère de von Mises, la condition de plastification de l'ensemble de la plaque impose l'équation

supplémentaire : $\partial f / \partial n = 0$. Exprimer cette condition en fonction des composantes du tenseur des contraintes dans $(\underline{t}, \underline{n})$, et montrer qu'elle permet en général de déterminer la dérivée partielle manquante $\partial \sigma_{tt} / \partial n$, ce qui clôt alors le problème (on suppose pour cela connus l'état de contrainte d'un côté de la ligne \underline{t} , et les dérivées partielles de la question (2)).

L'expression de l'invariant de von Mises dans le repère $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{e}_3)$ est :

$$J = \left(\frac{1}{2} [(\sigma_{nn} - \sigma_{tt})^2 + (\sigma_{tt} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{nn})^2] + 3\sigma_{nt}^2 + 3\sigma_{t3}^2 + 3\sigma_{3n}^2 \right)^{1/2}$$

En annulant la dérivée partielle de f par rapport à n , il vient :

$$f_{,n} = (2\sigma_{nn} - \sigma_{tt} - \sigma_{33})\sigma_{nn,n} + (-\sigma_{nn} + 2\sigma_{tt} - \sigma_{33})\sigma_{tt,n} + 3\sigma_{nt}\sigma_{nt,n} = 0$$

Cette équation permet de déterminer $\sigma_{tt,n}$, pourvu que le terme $(-\sigma_{nn} + 2\sigma_{tt} - \sigma_{33})$ soit non nul.

4. Il existe cependant des angles Φ pour lesquels cette détermination est impossible (le terme en facteur de $\partial \sigma_{tt} / \partial n$ est nul), ce qui définit une direction \underline{n} pour laquelle une discontinuité est susceptible de prendre naissance. Chercher l'angle Φ dans les conditions suivantes :

- état de traction simple, seule contrainte non nulle σ_{11} ;
- état de contrainte plane ($\sigma_{33} = 0$), chargement de type cisaillement $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$;
- état de contrainte plane ($\sigma_{33} = 0$), chargement biaxial $\sigma_{11} = \sigma_{22}$;

a. Comme $\sigma_{tt} = \sigma_{11}c^2$ et $\sigma_{nn} = \sigma_{11}s^2$, la condition de la question précédente s'écrit ici :

$$2\sigma_{11}c^2 - \sigma_{11}s^2 = 0$$

L'angle Φ vaut donc :

$$\Phi = \text{atan}(\sqrt{2}) \approx 54,73^\circ$$

b. Comme $\sigma_{tt} = \sigma_{11}(c^2 - s^2)$ et $\sigma_{nn} = \sigma_{11}(s^2 - c^2)$ il vient :

$$3\sigma_{11}(c^2 - s^2) = 0$$

L'angle Φ vaut donc 45° .

c. Comme $\sigma_{tt} = \sigma_{nn} = \sigma_{11}$ il vient :

$$\sigma_{11} = 0$$

Il n'y a pas de localisation dans ce cas.

5. On suppose maintenant que l'on se trouve en déformation plane ($\epsilon_{33} = 0$). Trouver dans ce cas l'expression de σ_{33} en fonction de σ_{11} et σ_{22} . Trouver l'angle Φ dans les trois cas suivants :

- état de traction plane, σ_{22} reste nulle, σ_{11} non nulle ;
- chargement de type cisaillement $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$;
- chargement biaxial $\sigma_{11} = \sigma_{22}$;

Comme le matériau est rigide-plastique, la condition de déformation plane impose que la composante 33 de la vitesse de déformation plastique soit nulle. Elle est proportionnelle à la composante correspondante du déviateur, soit à $(2\sigma_{33} - \sigma_{tt} - \sigma_{nn})$. On a donc $\sigma_{33} = (\sigma_{tt} + \sigma_{nn})/2$. Le terme à annuler devient alors simplement $(3\sigma_{tt} - 3\sigma_{nn})$, on cherche donc à réaliser $\sigma_{tt} = \sigma_{nn}$.

a. En traction plane, σ_{22} restant nulle, il faut assurer $\sigma_{11}s^2 = \sigma_{11}c^2$, on trouve donc $\Phi = 45^\circ$

b. En cisaillement, il faut assurer $\sigma_{11}(s^2 - c^2) = \sigma_{11}(c^2 - s^2)$, on trouve donc de nouveau $\Phi = 45^\circ$.

c. Sous chargement biaxial, on a $\sigma_{nn} = \sigma_{tt} = \sigma_{11}$, toutes les directions sont

susceptibles de voir apparaître une localisation.

6. Apporter un commentaire sur les possibilités de trouver des facettes susceptibles de présenter le phénomène de localisation pour des directions

de \underline{n} qui ne seraient pas dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

Description du phénomène d'endommagement en fluage

Sous contrainte constante, lors d'un chargement de fluage, les matériaux se dégradent. Ainsi des cavités croissent aux joints de grain ou à l'intérieur des grains pour les matériaux métalliques, ce qui a un effet sur les propriétés mécaniques. On cherche ici à étudier un modèle élémentaire qui représente cet endommagement sous la forme d'une variable scalaire, D , qui évolue à partir de 0, dans l'état initial libre de défauts, jusqu'à 1 lorsque le matériau se rompt.

Étude en traction uniaxiale :

1. On suppose que l'évolution de l'endommagement est donnée par l'équation différentielle suivante, où \dot{D} désigne la dérivée temporelle et où A et r sont des coefficients dépendants du matériau :

$$\dot{D} = \left(\frac{\sigma}{A(1-D)} \right)^r$$

Intégrer cette équation entre le temps $t = 0$ et un instant courant t , pour lequel l'endommagement prend la valeur D , la valeur initiale étant $D = 0$. La période de mise en charge est considérée comme négligeable, si bien que $\sigma = \sigma_0$ pour $t > 0$. En déduire l'expression du temps à rupture t_t , lorsque $D = 1$. Donner l'expression de la variation de D en fonction du rapport t/t_t .

L'équation se met sous la forme :

$$(1-D)^r dD = \left(\frac{\sigma_0}{A} \right)^r dt$$

Pour un instant courant, en tenant compte des conditions initiales, il vient :

$$\frac{1}{r+1} (1 - (1-D)^{r+1}) = \left(\frac{\sigma_0}{A} \right)^r t$$

Pour $D = 1$, on obtient le temps à rupture, t_t , dans l'équation précédente :

$$t_t = \frac{1}{r+1} \left(\frac{\sigma_0}{A} \right)^{-r}$$

On obtient ainsi l'expression demandée pour D :

$$D = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_t} \right)^{1/(r+1)}$$

2. L'endommagement augmente la vitesse de déformation viscoplastique. Ainsi un modèle de Norton est-il classiquement modifié de la façon suivante pour tenir compte de la présence d'endommagement (on prendra $K > 0$, $n > 1$, $r > 1$) :

$$\dot{\epsilon}^p = \left(\frac{\sigma}{K(1-D)} \right)^n$$

K et n étant les coefficients matériau caractérisant la viscosité. En remplaçant l'endommagement par son expression dans la question précédente, calculer l'évolution de la déformation viscoplastique en fonction du temps. Montrer que l'on peut avec ce modèle représenter le fluage tertiaire, au cours duquel la vitesse de déformation viscoplastique augmente au cours du temps. Comment varie la valeur de la déformation viscoplastique à rupture en fonction de la charge appliquée ? Discuter sa valeur en fonction des valeurs respectives des exposants n et r .

Le terme $(1-D)$ situé au dénominateur diminue au cours du chargement, si bien que la vitesse de déformation augmente, représentant ainsi du fluage tertiaire. La déformation viscoplastique s'obtient comme solution de l'équation :

$$d\epsilon^p = \left(\frac{\sigma_0}{K} \right)^n \left(1 - \frac{t}{t_t} \right)^{-n/(r+1)} dt$$

L'intégration de cette équation présente un cas particulier si $n = r + 1$. Dans ce cas, il vient :

$$\varepsilon^p = \frac{1}{r+1} \left(\frac{\sigma_0}{K}\right)^n \left(\frac{\sigma_0}{A}\right)^{-r} \text{Ln} \left(\frac{1}{1-t/t_t} \right)$$

Dans les autres cas, l'intégration donne :

$$\varepsilon^p = \frac{1}{r+1-n} \left(\frac{\sigma_0}{K}\right)^n \left(\frac{\sigma_0}{A}\right)^{-r} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{t_t}\right)^{(r+1-n)/(r+1)} \right]$$

La déformation à rupture ε_R^p s'obtient en faisant $t = t_t$ dans la formule précédente :

$$\varepsilon_R^p = \frac{A^r}{K^n} \frac{\sigma_0^{n-r}}{r+n-1}$$

On distingue alors les cas suivants :

- si $r \leq n - 1$, la déformation à rupture théorique est infinie ;
- si $n - 1 < r < n$, la déformation à rupture théorique diminue avec le niveau de contrainte ;
- si $r = n$, la déformation à rupture théorique vaut A^r / K^n quel que soit le niveau de contrainte ;
- si $n < r$, la déformation à rupture théorique augmente avec le niveau de contrainte.

3. On effectue maintenant un chargement à deux niveaux : premier niveau à une contrainte σ_1 pendant un temps t_1 , puis second niveau à une contrainte σ_2 pendant un temps t_2 . En appelant respectivement t_{c1} et t_{c2} les temps à rupture sous une contrainte σ_1 et σ_2 , trouver la valeur de la durée de vie résiduelle t_2 en fonction de t_1 , t_{c1} et t_{c2} , la variable D étant continue lors du changement de niveau de chargement.

A la fin du premier chargement, l'état d'endommagement est tel que :

$$1 - (1 - D_1)^{r+1} = \frac{t_1}{t_{c1}}$$

En appelant τ le temps passé au second niveau, une intégration à partir de D_1 fournit la valeur de l'endommagement au second niveau :

$$(1 - D_1)^{r+1} - (1 - D)^{r+1} = \frac{\tau}{t_{c2}}$$

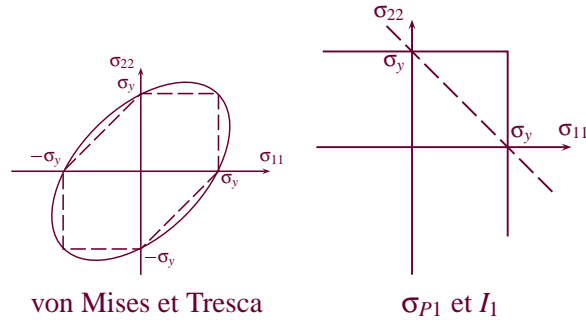
Pour obtenir la relation demandée, il suffit alors d'affecter la valeur 1 à l'endommagement D , et d'ajouter membre à membre les expressions caractéristiques de chaque niveau. On trouve la classique relation de cumul linéaire des endommagements au deux niveaux :

$$\frac{t_1}{t_{c1}} + \frac{t_2}{t_{c2}} = 1$$

Étude en multiaxial

4. En fonction du matériau que l'on considère, la variable critique pour généraliser aux chargements tridimensionnels le modèle précédent peut être le critère de von Mises (ou Tresca), la contrainte normale principale, ou une combinaison de ces variables avec la pression hydrostatique. Comparer ces différentes hypothèses en traçant les courbes qui donneraient alors un endommagement équivalent dans le plan $(\sigma_{11}-\sigma_{22})$, en supposant que toutes les autres composantes sont nulles, avec les valeurs équivalentes suivantes :

- a. critère de von Mises ;
- b. critère de Tresca ;
- c. plus grande contrainte normale principale, σ_{P1} ;
- d. le premier invariant du tenseur de contrainte, $I_1 = \text{trace} \tilde{\sigma}$.



5. Ces variables sont-elles indépendantes? On choisit comme contrainte équivalente en 3D la forme suivante, où k est un paramètre matériau (avec $0 \leq k < 1/2$):

$$\sigma_{eq} = (1 - k)J(\underline{\sigma}) + kI_1$$

et où $J(\underline{\sigma})$ désigne l'invariant de von Mises. L'endommagement, qui est toujours considéré comme scalaire, évolue maintenant en tridimensionnel selon ($A > 0$):

$$\dot{D} = \left(\frac{\sigma_{eq}}{A(1 - D)} \right)^r$$

Déterminer en fonction de la valeur choisie pour k les valeurs des contraintes qui produisent le même endommagement qu'une contrainte σ_0 en traction simple, dans le cas de :

- cisaillement pur $\sigma_{12} = \tau$;
- compression simple $\sigma_{11} = \sigma_c < 0$.

Les valeurs précédentes ne sont pas indépendantes. En se limitant à J et I_1 , on obtient les valeurs équivalentes suivantes :

- en torsion pure ($I_1 = 0$; $J = \tau\sqrt{3}$; $\sigma_{eq} = \tau\sqrt{3}$, donc la valeur de τ cherchée vaut : $\tau = \sigma_0/\sqrt{3}$)
- en compression simple ($I_1 = \sigma$; $J = |\sigma| = -\sigma$, $\sigma_{eq} = -\sigma(1 - 2k)$, d'où : $\sigma_c = -\sigma_0/(1 - 2k)$)

6. On effectue un chargement de fluage cyclique uniaxial, au cours duquel la contrainte passe en un temps négligeable de la valeur σ_0 à la valeur $-\sigma_0$. Indiquer ce qui se passe qualitativement au cours des cycles successifs. Comparer l'expression de l'évolution de la déformation viscoplastique pendant un temps t_0 à σ_0 et pendant le même temps à $-\sigma_0$ pour un état initial identique, et en tirer une valeur approchée de l'évolution de la déformation viscoplastique au cours de l'essai. Quelle la valeur du temps à rupture ?

On introduit la notion de cycle, période de temps $T = 2t_0$ correspondant au chargement défini ci-dessus. En négligeant l'évolution de l'endommagement au cours du cycle, on peut facilement évaluer l'évolution de la déformation viscoplastique au cours d'un cycle, pour une valeur $D = D_N$, en ajoutant la contribution (positive) du temps t_0 passé à σ_0 et celle (négative) du temps t_0 passé à $-\sigma_0$:

$$\Delta \varepsilon_N^p = t_0 \left(\frac{\sigma_0}{K(1 - D_N)} \right)^n (1 - (1 - 2k)^n)$$

Il est par ailleurs possible d'évaluer la valeur de D_N au cycle N à partir de la valeur D_{N-1} atteinte au cycle $N - 1$ en cumulant, au cours d'un cycle, les contributions de chaque période de chargement. L'endommagement évolue alors entre D_{N-1} et D_N , selon la formule suivante, dans laquelle on a introduit t_r , temps à rupture en fluage pur sous la contrainte σ_0 , et t_c , temps à rupture en fluage pur sous la contrainte $-\sigma_0$. On a :

$$(1 - D_{N-1})^{r+1} - (1 - D_N)^{r+1} = \frac{t_0}{t_r} + \frac{t_0}{t_c}$$

En sommant maintenant le résultat de tous les cycles précédant le cycle N , il vient :

$$(1 - D_N)^{r+1} = 1 - \frac{Nt_0}{t_r} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{t_r} = \frac{1}{t_t} + \frac{1}{t_c}$$

L'incrément de déformation plastique par cycle varie donc en fonction du nombre de cycles, en suivant l'expression :

$$\frac{\Delta \varepsilon_N^p}{\Delta N} = t_0 \left(\frac{\sigma_0}{K} \right)^n (1 - (1 - 2k)^n) \left(1 - \frac{Nt_0}{t_r} \right)^{-n/(r+1)}$$

Après intégration en termes de cycles, on trouve une formule tout à fait semblable à la formule obtenue sous charge constante :

$$\varepsilon_N^p = t_r \left(\frac{\sigma_0}{K} \right)^n (1 - (1 - 2k)^n) \left(1 - \frac{Nt_0}{t_r} \right)^{1 - n/(r+1)}$$

Il y a donc une dérive vers les déformations positives dès lors que le coefficient k est positif (il doit aussi rester inférieur à 0.5).

Étude en relaxation uniaxiale

En relaxation, on complète les équations qui définissent le modèle par la relation de décomposition de la déformation :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(1-D)} + \varepsilon^p$$

et l'on écrit que la déformation totale est maintenue constante à une valeur

ε_0 , avec comme conditions initiales $\sigma = \sigma_0 = E\varepsilon_0$, $D = 0$ et $\varepsilon_0^p = 0$.

7. Quelle est l'évolution de la déformation plastique pendant la relaxation ? Quelle est la valeur limite ? Même question pour la contrainte.

Pendant la relaxation, la déformation plastique augmente et la contrainte diminue. Comme il n'y a pas de seuil dans la loi de comportement, la valeur asymptotique de la contrainte est 0, et celle de la déformation viscoplastique ε_0 .

8. Caractériser l'évolution de l'endommagement. La rupture peut-elle se produire pendant la relaxation ? Discuter.

ENSMP, 1^{ère} année, Mécanique des matériaux solides, 15 juin 1999

Plasticité biaxiale

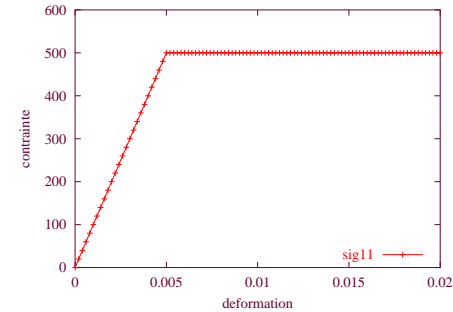
On étudie l'influence du trajet de chargement sur la déformation d'une plaque, dont le plan est normal à l'axe 3. La plaque est constituée d'un matériau élastique-parfaitement plastique, de limite d'élasticité σ_y , et de caractéristiques élastiques E (module de Young) et ν (coefficient de Poisson). Le critère de plasticité est celui de von Mises, défini par la fonction de charge $f(\underline{\sigma}) = J(\underline{\sigma}) - \sigma_y$, avec $J(\underline{\sigma}) = (1.5 \underline{s} : \underline{s})^{0.5}$, \underline{s} désignant le déviateur de $\underline{\sigma}$. Dans un premier temps, on appliquera une traction simple dans la direction 1, puis, à partir de l'état obtenu, on appliquera une traction biaxiale, à la fois en direction 1 et 2. Le résultat obtenu sera comparé avec le résultat d'un chargement qui amène directement au même état final. Dans l'ensemble du problème, tous les cisaillements sont supposés nuls, de même que la contrainte σ_{33} . On notera simplement σ_1 et σ_2 les contraintes principales en direction 1 et 2, ϵ_1 et ϵ_2 les déformations correspondantes. Pour les applications numériques, on choisira les valeurs suivantes :

$$E = 100000 \text{ MPa} \quad ; \quad \nu = 0,3 \quad ; \quad \sigma_y = 500 \text{ MPa}$$

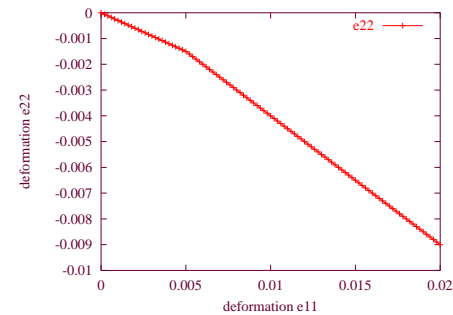
1. On effectue d'abord une traction simple à déformation imposée dans la direction 1, la déformation ϵ_1 variant de 0 à 0.02. On suppose que la contrainte σ_2 reste nulle. Tracer dans ce cas :

- la courbe de traction donnant σ_1 fonction de ϵ_1 ;
- la courbe définissant ϵ_2 en fonction de ϵ_1 , en distinguant bien la partie élastique et la partie plastique ; quelle est la valeur de ϵ_2 en fin de traction ?
- la forme de la surface de charge dans le plan $\sigma_1 - \sigma_2$, en positionnant le point représentatif du régime plastique observé en traction simple.

La courbe de traction donnant σ_1 fonction de ϵ_1 :



La courbe définissant ϵ_2 en fonction de ϵ_1 :



A la plasticité commençante, on a :

$$\epsilon_{11}^e = \frac{\sigma_{11}}{E} = \frac{500}{100000} = 0.005$$

$$\epsilon_{22}^e = -\nu \epsilon_{11} = -0.0015$$

Tenseur déviatorique :

$$\underline{s} = \frac{1}{3} \underline{\sigma} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenseur de direction d'écoulement :

$$\tilde{n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

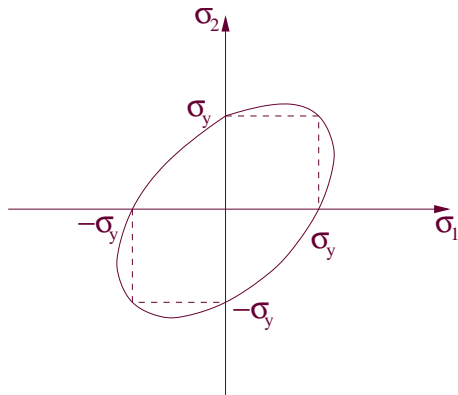
On trouve ainsi :

$$\varepsilon_{22}^p = -\frac{1}{2}\varepsilon_{11}^p = -0.0075$$

En fin de traction, on a donc :

$$\varepsilon_{22} = -0.0015 - 0.0075 = -0.009$$

Dans le plan $\sigma_1 - \sigma_2$, la surface de charge du critère von Mises se représente :



Dont le point représentatif du régime plastique observé en traction simple est $(\sigma_y, 0)$.

2. A partir de l'état de fin de traction simple, on effectue maintenant un trajet de chargement dans lequel les deux déformations ε_1 et ε_2 sont imposées, la contrainte σ_3 restant nulle. On suppose dans les questions suivantes que l'écoulement plastique n'est pas stoppé lors du changement

de trajet de chargement. Ecrire alors le déviateur de contraintes, puis les composantes n_1 et n_2 de la normale à la surface de charge, définie par $\tilde{n} = \partial f / \partial \tilde{\sigma}$.

Tenseur de contrainte :

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déviateur de contraintes :

$$\tilde{s} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} - \sigma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_{22} - \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{11} - \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

$$J(\sigma) = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}} = \sigma_y$$

$$n_1 = \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}}} = \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_y}$$

$$n_2 = \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}}} = \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2\sigma_y}$$

3. Ecrire la vitesse de déformation élastique. Exprimer alors la vitesse de déformation totale en fonction des vitesses de contraintes, de n_1 et n_2 , et du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$.

Vitesse de déformation élastique :

$$\dot{\varepsilon}_{11}^e = \frac{\dot{\sigma}_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{22}$$

$$\dot{\varepsilon}_{22}^e = \frac{\dot{\sigma}_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{11}$$

Vitesse de déformation totale :

$$\dot{\epsilon}_{11} = \frac{\dot{\sigma}_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{22} + n_1 \dot{\lambda}$$

$$\dot{\epsilon}_{22} = \frac{\dot{\sigma}_{22}}{E} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{11} + n_2 \dot{\lambda}$$

4 Ecrire la condition de cohérence, montrer qu'elle impose la direction de la vitesse de contrainte. Comparer les orientations de la vitesse de contrainte et de la vitesse de déformation plastique, commenter.

Condition de cohérence $\dot{f} = 0$ s'écrit :

$$2\dot{\sigma}_{11}\sigma_{11} + 2\dot{\sigma}_{22}\sigma_{22} - \dot{\sigma}_{11}\sigma_{22} - \dot{\sigma}_{22}\sigma_{11} = 0$$

Cette dernière équation nous donne :

$$\frac{\dot{\sigma}_{11}}{\dot{\sigma}_{22}} = \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{22} - \sigma_{11}}$$

ou :

$$\frac{\dot{\sigma}_{11}}{\dot{\sigma}_{22}} = \frac{\dot{\epsilon}_{11}^p}{\dot{\epsilon}_{22}^p}$$

5. On choisit d'appliquer la même vitesse de déformation sur les deux composantes 1 et 2 : $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}$. Montrer en combinant les équations en déformation totale de la question 3 que l'on peut faire apparaître deux équations faisant intervenir respectivement le multiplicateur plastique, la somme et la différence des contraintes σ_1 et σ_2 et de leurs dérivées.

En combinant les équations en déformation totale de la question 3, on obtient :

$$\frac{1+\nu}{E}(\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22}) + \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_y}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) = 0$$

$$\frac{1-\nu}{E}(\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22}) + \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_y}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 2\dot{\epsilon}$$

6. Montrer que l'on peut exprimer les contraintes admissibles au cours de l'écoulement sous forme paramétrique, en introduisant l'angle ϕ , tel que :

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_y \cos \phi \quad ; \quad \sigma_2 - \sigma_1 = (2/\sqrt{3})\sigma_y \sin \phi$$

A quels états de contrainte particuliers correspondent les points obtenus respectivement pour $\phi = -\pi/3$, $\phi = -\pi/6$, $\phi = 0$?

On a le critère de von Mises :

$$\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}} = \sigma_y$$

Où l'on peut réécrire sous forme :

$$\frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2}{4\sigma_y^2} + \frac{3(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4\sigma_y^2} = 1$$

Il est donc possible de paramétrer l'écoulement en introduisant l'angle ϕ , tel que :

$$\sin \phi = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{(2/\sqrt{3})\sigma_y}$$

$$\cos \phi = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2\sigma_y}$$

Pour $\phi = \pi/3$, on obtient : $\sigma_{22} = \sigma_y$, $\sigma_{11} = 0$, c'est le cas traction simple dans la direction 2.

Pour $\phi = \pi/6$, on obtient : $\sigma_{22} = 2\sigma_{11} = 2/\sqrt{3}\sigma_y$, c'est le cas de cisaillement pur.

Pour $\phi = 0$, on obtient : $\sigma_{22} = \sigma_{11} = \sigma_y$, c'est le cas traction biaxiale.

7. Ecrire l'équation différentielle reliant ϕ et le multiplicateur plastique

(on utilisera les résultats de I.6). En utilisant le fait que le multiplicateur

plastique est égal à la vitesse de déformation plastique cumulée, exprimer l'évolution de cette dernière sur le trajet de chargement $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}$. Trouver la valeur de ϕ lorsque la déformation cumulée est égale à 0.01. En déduire que le point représentatif du chargement devient rapidement stationnaire. Où se situe ce point dans le plan des contraintes $\sigma_1 - \sigma_2$?

Nous avons :

$$\sigma_2 - \sigma_1 = (2/\sqrt{3})\sigma_y \sin \phi$$

$$\dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_1 = (2/\sqrt{3})\sigma_y \cos \phi \dot{\phi}$$

En les remplaçant dans la première équation de la question 5 et en utilisant le fait que $\dot{\lambda} = \dot{p}$, on obtient :

$$\dot{p} = -\frac{2(1+\nu)\sigma_y \cos \phi}{3E} \frac{\dot{\phi}}{\sin \phi}$$

$$p = -\frac{2(1+\nu)\sigma_y}{3E} \ln \left| \frac{\sin \phi}{\sin(\pi/3)} \right|$$

En appliquant les valeurs numériques, on obtient :

$$\phi = 0.086$$

Ce dernier nous donne : $\sin \phi = 0.086$ et $\cos \phi = 0.996$ Et :

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} = 0.099\sigma_y$$

$$\sigma_{22} + \sigma_{11} = 1.992\sigma_y$$

On obtient donc : $\sigma_{22} = 1.045\sigma_y = 522.5$ et $\sigma_{11} = 0.947\sigma_y = 473.5$ Le point représentatif du chargement devient rapidement stable au point (σ_y, σ_y) , ce qui correspond à $\phi = 0$.

8. En utilisant le point précédent, qui définit donc l'état de contrainte, donner l'expression des composantes 1 et 2 du tenseur de déformation plastique en fonction de la déformation courante au cours du trajet de chargement biaxial. Quelle est la valeur obtenue pour $\epsilon_1 = 0,029$; $\epsilon_2 = 0$ (ce résultat n'est qu'approché car l'état de contrainte utilisé n'est en fait atteint qu'asymptotiquement) ?

On a approximativement : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y$ et :

$$\epsilon_1^p - 0.015 = \epsilon_1 - 0.02 + \frac{\nu\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_2^p + 0.0075 = \epsilon_2 + 0.009 - \frac{\sigma_y}{E}$$

Pour $\epsilon_1 = 0,029$; $\epsilon_2 = 0$, on obtient :

$$\epsilon_1^p = 0.0255$$

$$\epsilon_2^p = -0.0035$$

9. On s'intéresse maintenant à l'état final obtenu dans un trajet de chargement "direct", à déformation imposée, la valeur finale étant $\epsilon_1 = 0.029$; $\epsilon_2 = 0$, en conservant toujours $\sigma_3 = 0$. Quel est le point représentatif sur la surface de charge ? En déduire la valeur des déformations plastiques atteintes en fin de chargement (la question I.9 peut être traitée indépendamment du reste du problème, même remarque qu'en I.8).

II. Estimation de la zone plastique en pointe de fissure

Le champ de contrainte calculé en élasticité présente une singularité en pointe de fissure, caractérisée par exemple par les équations de Westergaard. Il est donc vraisemblable que le matériau à proximité de la pointe se plastifie. On étudie ici quelques cas très simples, qui permettent de se faire une idée de la forme des zones plastiques qui se développent. On utilisera les équations correspondant au mode I, données en page 34 du polycopié. On suppose par ailleurs que le matériau est élastique-parfaitement plastique, et qu'il obéit au critère de Tresca.

II.1 Exprimer les valeurs de σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} pour des angles θ de 0 et $\pi/2$. Les équations pour le mode I sont les suivantes :

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

Les valeurs de σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} pour les angles $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$ sont :

$$\theta = 0 \longrightarrow \sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \sigma_{12} = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \sigma_{11} = \frac{K_I}{4\sqrt{\pi r}}, \quad \sigma_{22} = \frac{3}{4} \frac{K_I}{\sqrt{\pi r}}, \quad \sigma_{12} = -\frac{K_I}{4\sqrt{\pi r}}$$

II.2 Pour un chargement extérieur donné, caractérisé par K_I , définir la distance $r(\theta)$ pour laquelle la valeur de la limite d'élasticité est atteinte, pour les deux valeurs de la question précédente, dans le cas où l'on est en contrainte plane. Cela donne une approximation de la forme de la zone plastique. Pourquoi cette méthode n'est elle qu'approchée ?

La taille de la zone plastique est souvent approchée par la condition : $\sigma_{22} = \sigma_Y$, donc, dans le cas où $\theta = 0$:

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = \sigma_Y$$

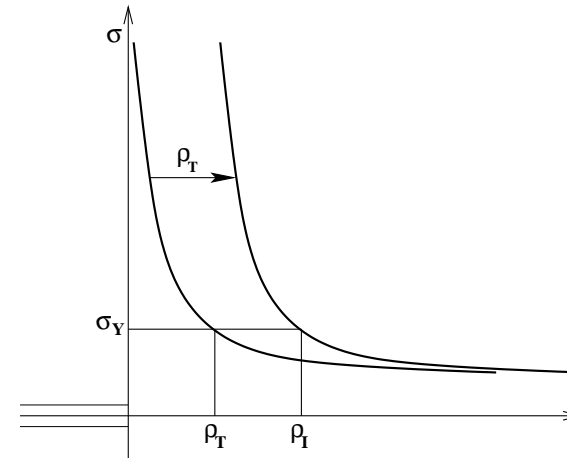
si bien que :

$$\rho_T = r = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

Pour $\theta = \pi/2$ il vient alors :

$$\frac{3}{4} \frac{K_I}{\sqrt{\pi r}} = \sigma_Y \implies \rho_T = \frac{9}{16\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

Cette approche souffre d'un double défaut. Avant tout, on écrit une condition de plasticité unidimensionnelle alors que l'état de contrainte est multiaxial. En second lieu, en présence d'un comportement parfaitement plastique, il faut prendre en compte la majoration de la contrainte par σ_y dans la zone plastique, qui rend la solution élastique caduque. Une redistribution de contrainte est alors nécessaire pour préserver l'équilibre dans la section.



L'hypothèse choisie pour effectuer la redistribution consiste simplement à translater selon X la courbe de σ_{22} déterminée en élasticité.

$$\int_0^{\rho_T} \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} - \sigma_Y \right) dx = \int_{\rho_T}^{\rho_T+X} \left(\sigma_Y - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \right) dx + \int_{\rho_T}^{\infty} \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x+X)}} - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \right) dx$$

On obtient successivement :

$$X = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 = \rho_T$$

et le rayon de la zone plastique :

$$\rho_I = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

II.3 Dans le cas où la structure est en déformation plane selon la direction 3, donner la forme de la contrainte σ_{33} en fonction de σ_{11} et σ_{22} . En déduire les valeurs $r(\theta)$ pour les deux angles précédents. Expliquer qualitativement pourquoi il est normal de trouver une taille de zone plastique plus petite dans ce dernier cas.

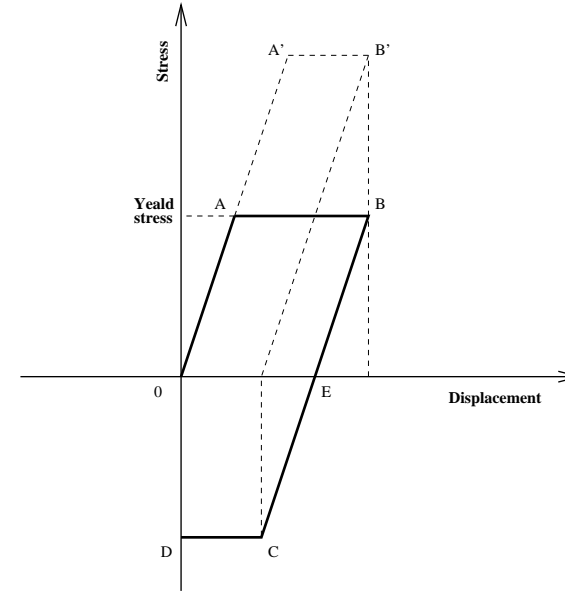
Dans un chargement de type déformation plane, la composante σ_{33} peut être déterminée par :

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\sigma_{33}(0) = \nu\sqrt{2} \frac{K_I}{\sqrt{\pi r}} \quad ; \quad \sigma_{33}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \nu \frac{K_I}{\sqrt{\pi r}}$$

II.4 En se replaçant maintenant en contrainte plane, on imagine qu'après avoir chargé jusqu'à une valeur K_I , on relâche le chargement jusqu'en 0. Montrer que dans ce cas il existe une zone plastique de recompression au voisinage de la pointe, dont la taille est environ le quart de la zone plastique de traction.

Lors du déchargement, on applique un champ élastique tel que la force résultante finale corresponde au nouveau chargement. Après une phase purement élastique, on observe de l'écoulement plastique de compression dans une petite zone au voisinage de la pointe de fissure.



Cet écoulement plastique en compression est présent dans la zone pour laquelle la décharge dépasse $-2\sigma_y$. On peut l'évaluer à partir des valeurs respectives des facteurs d'intensité de contrainte min et max. Dans le cas présent, la contrainte min est nulle, si bien que $\Delta\sigma = \sigma_M$. La taille de la zone plastique est obtenue par :

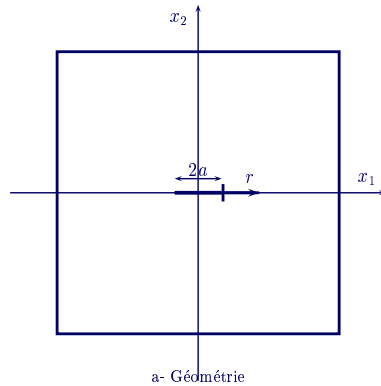
$$\sigma_{22} = 2\sigma_y \quad \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = 2\sigma_y$$

d'où :

$$r = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 = \rho_{comp} \quad \rho_{comp} = \frac{\rho_T}{4}$$

ENSMP 1ère année, Mécanique des matériaux solides, 19 juin 2000

Zone plastique et effet de retard en propagation de fissure



On considère une fissure de longueur $2a$ située en $-a \leq x_1 \leq a$ sur l'axe x_1 dans une plaque carrée comprise entre $\pm b$ en x_1 et x_2 , avec $a \ll b$. On applique une contrainte normale σ_M en $x_2 = \pm b$. Dans ces conditions, le facteur d'intensité de contrainte de la fissure (mode I) est $K_I = \sigma_M \sqrt{\pi a}$. La structure étant symétrique par rapport aux axes, on étudiera la pointe de fissure située en $x_1 = a$.

1. On rappelle que dans ce cas, le champ de contrainte σ_{22} au voisinage de la pointe de fissure est équivalent à $K_I / \sqrt{2\pi r}$, r étant la distance à la pointe. Commenter.

L'analyse du champ de contrainte en pointe de fissure conduit à l'écriture d'un champ biaxial comportant trois composantes σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} dans le cas d'une plaque, que l'on supposera donc chargée en contraintes planes. On traitera le problème de la zone plastique en réduisant le problème à un problème unidimensionnel sur la composante σ_{22} , sur l'axe

x_2 . Dans ce cas, l'expression générale

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

devient ($\theta = 0$) :

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

2. Une pratique classique pour évaluer la taille de la zone plastique en pointe consiste à comparer l'expression précédente à σ_Y , en supposant le matériau élastique-parfaitement plastique. Quelle valeur obtient-on pour ρ_T , rayon de zone plastique pour une contrainte appliquée σ_M ?

Dans le cas d'un modèle parfaitement plastique, il vient :

$$\sigma_{22} = \sigma_Y$$

avec :

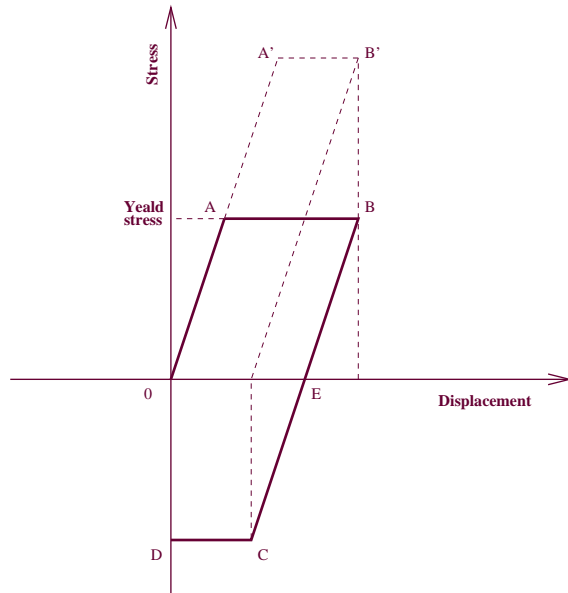
$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

si bien que :

$$r = \rho_T = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

3. Si on ramène le chargement extérieur à zéro, il se développe au voisinage de la pointe une zone où l'on replastifie en compression. Indiquer en suivant toujours la même approche simplifiée la dimension ρ_C de cette zone en fonction de ρ_T .

Lors du déchargement, on suit le trajet indiqué sur la figure ci-dessous, et on atteint la plasticité en compression lorsque la variation de la contrainte locale est de $2\sigma_y$.



La zone plastique correspondante est donc définie par :

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi\rho_C}} = 2\sigma_Y$$

soit :

$$r = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 = \rho_{comp}$$

et :

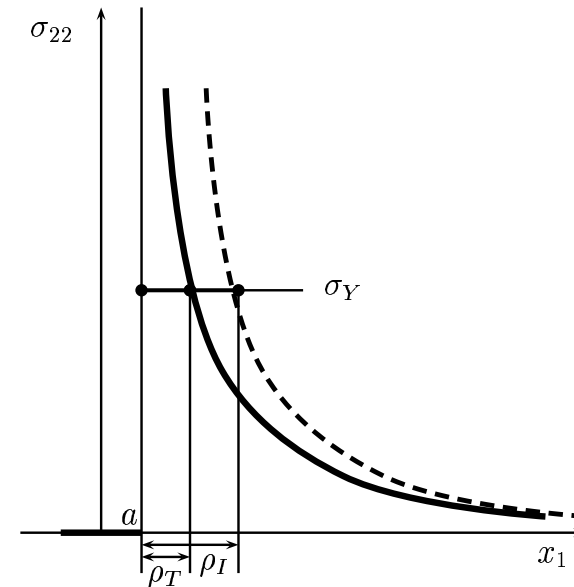
$$\rho_C = \frac{\rho_T}{4}$$

4. La méthode précédente ne conserve pas la résultante selon x_2 . La véritable zone plastique en traction a donc une taille ρ_I plus grande que ρ_T . On reprend donc la question 2, en utilisant maintenant un autre modèle approché (Irwin), qui consiste à compenser la troncature de la distribution élastique en supposant que le niveau de contrainte entre ρ_T et ρ_I est encore

σ_Y , et que le champ élastique est reporté au-delà de ρ_I (figure ci-dessous).

Montrer que l'on trouve alors :

$$\rho_I = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$



b- Construction de Irwin

En plus de ne considérer que l'aspect uniaxial, la méthode précédente détruit l'équilibre, au sens où elle se contente de tronquer un champ obtenu en élasticité. Il est possible d'améliorer l'évaluation en distribuant la force ainsi négligée en avant de la pointe de la fissure. Cette force correspond à la partie de σ_{22} qui dépasse σ_Y pour $x \leq \rho_T$. La construction d'Irwin consiste à former alors un profil de contrainte modifié, suivant la figure ci-dessus, dans lequel la taille de la zone plastique est maintenant ρ_I . On suppose alors

que la distribution élastique de σ_{22} est translaté d'une quantité X selon x_1 , et que l'aire au dessus de σ_y est compensée par celle qui sépare le nouveau profil de la courbe originale. On écrit donc :

$$\int_0^{\rho_T} \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} - \sigma_Y \right) dx = \int_{\rho_T}^{\rho_T+X} \left(\sigma_Y - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \right) dx + \int_{\rho_T}^{\infty} \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x+X)}} - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \right) dx$$

D'où on tire :

$$X = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 = \rho_T$$

La nouvelle évaluation de la zone plastique est donc :

$$\rho_I = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

5. Indiquer les faiblesses des méthodes précédentes.

Comme indiqué précédemment, la faiblesse principale est le traitement uniaxial du problème.

6. On veut maintenant étudier la propagation de fissure en fatigue, avec un chargement extérieur appliqué entre 0 et σ_M . On suppose que la loi de propagation définit la vitesse d'avancée de fissure par cycle par :

$$\frac{da}{dN} = C(K_I - K_S)^\eta$$

où $K_I = \sigma_M \sqrt{\pi a}$, $K_S = k \sigma_Y \sqrt{\pi \rho}$ ($0 < k < 1$) et où ρ est la taille actuelle de la zone plastique (définition de Irwin). Simplifier l'expression précédente en introduisant a , σ_M et σ_Y .

L'expression de la vitesse de propagation en chargement cyclique est :

$$\frac{da}{dN} = C(K_I - K_S)^\eta$$

En tenant compte du fait que $K_I = \sigma_M \sqrt{\pi a}$, $K_S = k \sigma_Y \sqrt{\pi \rho}$ et $\rho = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$, il vient :

$$K_S = k \sigma_Y \sqrt{\pi \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2} = k K_I$$

$$\frac{da}{dN} = C(K_I(1-k))^\eta = C(\sigma_M \sqrt{\pi a}(1-k))^\eta$$

7. Pour une longueur de fissure telle que $x_1 = a_1$, on effectue une surcharge à σ_M^* , avec $\sigma_M < \sigma_M^* < \sigma_Y$. Donner la nouvelle valeur de la zone plastique en a_1 , que l'on notera ρ^* .

Pour une longueur de fissure a_1 et une contrainte appliquée de σ_M^* , le nouveau facteur d'intensité de contrainte est K_I^* et la nouvelle taille de zone plastique ρ^* , tels que :

$$K_I^* = \sigma_M^* \sqrt{\pi a_1}$$

$$\rho^* = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I^*}{\sigma_Y} \right)^2$$

8. On reprend ensuite le chargement initial entre 0 et σ_M . Montrer que, si la surcharge a été suffisamment élevée, la fissure ne progresse plus.

La nouvelle loi de propagation fait intervenir un nouveau seuil K_S^* calculé à partir de ρ^* :

$$\frac{da}{dN} = C(K_I - K_S^*)^\eta$$

avec :

$$K_S^* = k \sigma_Y \sqrt{\pi \rho^*} = k \sigma_M^* \sqrt{a_1}$$

Il n'y a pas de propagation de fissure en $a = a_1$ si $K_I \leq K_S^*$, soit :

$$K_I = \sigma_M \sqrt{\pi a_1} \leq K_S^* = k \sigma_M^* \sqrt{a_1}$$

soit :

$$\sigma_M \leq k \sigma_M^*$$

9. Indiquer pourquoi la propagation est ralentie dans tous les autres cas. Indiquer la longueur de fissure a_2 pour laquelle la fissure retrouvera sa vitesse initiale, et la loi de propagation entre a_1 et a_2 . Dessiner l'allure de la courbe $a(N)$.

La vitesse de progression de fissure est définie par :

$$\frac{da}{dN} = C (\sigma_M \sqrt{\pi a} - k \sigma_M^* \sqrt{\pi a_1})$$

Elle est donc plus faible que la vitesse de référence pour une longueur $a > a_1$ donnée. Un modèle raisonnable consiste à supposer que la zone

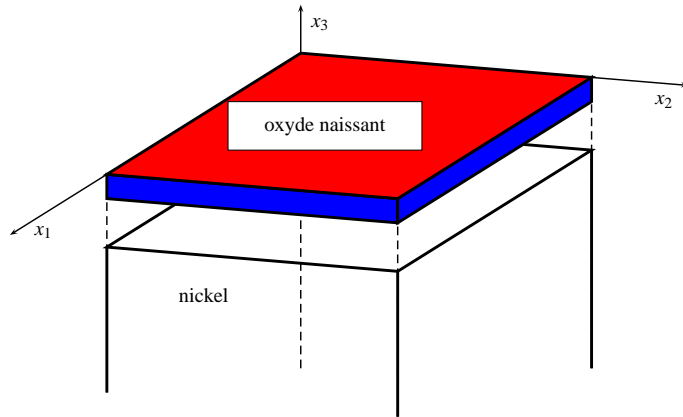
plastique reste à la dimension créée par la surcharge, tant que la zone plastique «normale» attachée au chargement courant n'a pas atteint cette valeur. La fissure traverse donc à petite vitesse la zone plastique élargie. On retrouve la vitesse de progression normale pour une longueur de fissure a_2 telle que :

$$\sigma_M \sqrt{\pi a_2} - k \sigma_M^* \sqrt{\pi a_1} = \sigma_M (1 - k) \sqrt{\pi a_2}$$

soit :

$$a_2 = a_1 \frac{\sigma_M^*}{\sigma_M}$$

Contraintes développées lors de l'oxydation



On cherche à caractériser l'état de contrainte qui se développe dans une couche d'oxyde de nickel (NiO) en formation sur un substrat de nickel (Ni). Cette couche se forme par diffusion de nickel, l'oxyde se formant sur la surface extérieure. L'oxyde apparaît sous forme d'îlots, qui se rassemblent ensuite pour former une couche de plus en plus compacte.

On choisit pour modéliser ce système très complexe une représentation très simplifiée constituée de 2 couches *indépendantes* sans contact en direction x_3 .

La couche S (substrat) est élastoviscoplastique, on note respectivement $\tilde{\sigma}^S$, $\tilde{\varepsilon}^S$, $\tilde{\varepsilon}^{vS}$ les tenseurs des contraintes, des déformations et des déformations viscoplastiques.

La couche *naissante* N est constituée de vide et de NiO . On considérera son comportement *homogénéisé*, caractérisé par une fraction volumique z de NiO , qui permettra de définir les propriétés mécaniques (élasticité, viscoplasticité).

On y note respectivement $\tilde{\sigma}^N$, $\tilde{\varepsilon}^N$, $\tilde{\varepsilon}^{vN}$ les tenseurs des contraintes, des déformations et des déformations viscoplastiques.

Par ailleurs, lors de la transformation de nickel en oxyde, il apparaît un changement de volume, représenté par un tenseur $\tilde{\varepsilon}^{cp}$ dans la couche N .

L'élasticité est supposée isotrope dans chaque couche, les modules de Young et coefficients de Poisson valant respectivement (E^S, ν^S) , et (E^N, ν^N) . Les lois viscoplastiques s'écrivent :

$$\tilde{\varepsilon}^{vI} = \left(\frac{J(\tilde{\sigma}^I) - \sigma_{YI}}{K_I} \right)^{n_I} \frac{\partial J(\tilde{\sigma}^I)}{\partial \tilde{\sigma}^I}$$

en introduisant les six coefficients dépendant du matériau σ_{YI} , K_I , n_I , avec $I = N, S$, $J(\tilde{\sigma}^I)$ étant formé à partir du déviateur \tilde{s}^I de $\tilde{\sigma}^I$, suivant : $J(\tilde{\sigma}^I) = \sqrt{(3/2)\tilde{s}^I : \tilde{s}^I}$. On définit par ailleurs la forme de $\tilde{\varepsilon}^{cp}$ par la diagonale $(z\varepsilon^t, z\varepsilon^t, z\varepsilon^z)$.

1. On suppose que les tenseurs $\tilde{\varepsilon}^S$ et $\tilde{\varepsilon}^N$ sont diagonaux, que leurs

composantes 11 et 22 sont égales, et que leurs composantes 33 sont libres. Justifier ce choix, et montrer alors que le tenseur de contrainte est biaxial dans chaque matériau. Ecrire dans chaque couche l'expression de la composante 11 de la déformation en fonction des contraintes, de la déformation viscoplastique et de la dilatation de changement de phase dans la couche N .

Le problème est symétrique dans les sens 11 et 22, donc ses composantes sont égales. Les termes 12 n'interviennent pas car il n'y a pas de cisaillement entre ces deux directions. La couche d'oxydation est très mince, il est donc raisonnable d'enlever les composantes de cisaillement 13 et 23. Tenseur de déformation de la couche N :

$$\tilde{\varepsilon}^N = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^N & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^N & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^N \end{pmatrix}$$

Tenseur de contrainte de la couche N :

$$\tilde{\sigma}^N = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^N & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{11}^N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{11}^N = \frac{1-\nu}{E^N} \sigma_{11}^N + z\varepsilon^t + \varepsilon_{11}^{vN}$$

ou :

$$\dot{\varepsilon}_{11}^N = \frac{1-\nu}{E^N} \dot{\sigma}_{11}^N + \dot{\varepsilon}_{11}^{vN}$$

2. L'épaisseur de la couche N , e_N , est très inférieure à celle du substrat, e_S (par exemple $e_N/e_S < 10^{-4}$). Montrer que, dans ce cas, le niveau de contrainte dans le substrat va rester très faible, et que les déformations latérales ε_{11} et ε_{22} sont également négligeables.

Dans le cas où la couche de dépôt est très mince par rapport à celle de substrat, la couche de substrat devient très "rigide". Les déformations latérales sont donc considérées négligeables.

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$$

3. On s'intéresse maintenant à la couche N . On note respectivement par (E_o, ν_o) et $(K_o, n_o \sigma_o)$ les coefficients élastiques et viscoplastiques du matériau massif ($z = 1$). On suppose que la couche se met en place instantanément. Evaluer le niveau de contrainte résultant en appliquant la déformation de transformation ε^t dans le plan (x_1, x_2) .

Dans ce cas la déformation viscoplastique est négligée car la couche N se met en place instantanément. On a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^N &= \frac{1-\nu}{E^N} \sigma_{11}^N + z\varepsilon^t = 0 \\ \sigma_{11}^N &= \sigma_s = -z\varepsilon^t \frac{E^N}{1-\nu} = -\varepsilon^t \frac{E^N}{1-\nu} \end{aligned}$$

4. Le développement de la déformation viscoplastique permet ensuite la relaxation des contraintes. Donner l'expression de l'évolution obtenue en fonction du temps, et préciser la valeur asymptotique.

En prenant la déformation viscoplastique, on a :

$$\dot{\varepsilon}_{11}^N = \frac{1-\nu}{E^N} \dot{\sigma}_{11}^N + \dot{\varepsilon}_{11}^{vN}$$

Tenseur de contrainte de la couche N :

$$\tilde{\sigma}^N = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^N & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{11}^N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $\sigma_1 = \sigma_{11}^N$, $\sigma_2 = \sigma_{11}^N$, $\sigma_3 = 0$, et :

$$J(\tilde{\sigma}) = \frac{|\sigma_{11}^N|}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial J(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}} = \frac{3s}{2J(\tilde{\sigma})} = \frac{\sigma_{11}^N}{\sqrt{2}|\sigma_{11}^N|} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{\text{signe}(\sigma_{11}^N)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\dot{\varepsilon}_{11}^{vN} = \left(\frac{\frac{|\sigma_{11}^N|}{\sqrt{2}} - \sigma_{yN}}{K_N} \right)^{n_N} \text{signe}(\sigma_{11}^N)$$

Nous avons donc :

$$\frac{1-\nu}{E^N} \dot{\sigma}_{11}^N + \left(\frac{\frac{|\sigma_{11}^N|}{\sqrt{2}} - \sigma_{yN}}{K_N} \right)^{n_N} \text{signe}(\sigma_{11}^N) = 0$$

si $n = 1$:

$$\frac{(1-\nu)K_N\sqrt{2}}{E^N} \left(\ln \left| \frac{|\sigma_{11}| - \sqrt{2}\sigma_y}{\sqrt{2}K_N} \right| - \ln \left| \frac{|\sigma_s| - \sqrt{2}\sigma_y}{\sqrt{2}K_N} \right| \right) = t$$

$$|\sigma_{11}| = \sqrt{2}\sigma_y + (|\sigma_s| - \sqrt{2}\sigma_y) \exp\left(\frac{-tE_N}{(1-\nu)K_N\sqrt{2}}\right)$$

$$|\sigma_{11}| = \sqrt{2}\sigma_y + (|\varepsilon^t| \frac{E^N}{1-\nu} - \sqrt{2}\sigma_y) \exp\left(\frac{-tE_N}{(1-\nu)K_N\sqrt{2}}\right)$$

si $n > 1$:

$$-\frac{(1-\nu)K_N\sqrt{2}}{E_N(n-1)} \left(\frac{1}{\left(\frac{|\sigma_{11}| - \sqrt{2}\sigma_y}{\sqrt{2}K_N}\right)^{n-1}} - \frac{1}{\left(\frac{|\sigma_s| - \sqrt{2}\sigma_y}{\sqrt{2}K_N}\right)^{n-1}} \right) = t$$

$$|\sigma_{11}| = \sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{2}K_N \left(\left(\frac{\sqrt{2}K_N}{|\sigma_s| - \sqrt{2}\sigma_y}\right)^{n-1} - \frac{E_N(n-1)}{(1-\nu)\sqrt{2}K_N} t \right)^{-\frac{1}{n-1}}$$

La valeur asymptotique obtenue quand $t \rightarrow \infty$, on a donc :

$$|\sigma_{11}| = \sqrt{2}\sigma_y$$

Dans ce cas les paramètres sont constants : $E_N = E_o$, $K_N = K_o$.

5. Les états de contraintes résultant de l'approche précédente n'étant pas réalistes, on cherche maintenant à représenter plus finement les phénomènes, en suivant l'évolution des contraintes au cours de la construction de la couche. On suppose pour cela que les différents coefficients varient de la manière suivante :

$$\text{Si } z < \frac{1}{2} : E^N = 0 \quad , \quad K^N = 0 \quad (\text{contrainte nulle})$$

$$\text{Si } z \geq \frac{1}{2} : E^N = E_o(2z-1) \quad , \quad K^N = K_o(2z-1)$$

Dont z est une fonction du temps t : $z = z(t)$. On considérera par ailleurs

que le coefficient de Poisson vaut toujours ν_o , et que σ_Y est nul. Ecrire dans ce cas les expressions définissant l'évolution de la contrainte pendant le développement de la couche. Caractériser la valeur maximale atteinte et la valeur asymptotique.

Dans ce cas, on examine pour $z > 1/2$. On a donc :

$$\frac{1-\nu}{E_o(2z-1)} \sigma_{11}^N + \left(\frac{\frac{|\sigma_{11}^N|}{\sqrt{2}} - \sigma_{yN}}{K_o(2z-1)} \right)^{nN} \text{signe}(\sigma_{11}^N) = 0$$

. Si $n = 1$, on obtient le résultat :

$$|\sigma_{11}| = \sqrt{2}\sigma_y - \sqrt{2}\sigma_y \exp\left(\frac{-tE_o}{(1-\nu)K_o\sqrt{2}}\right)$$

La contrainte augmente à la valeur asymptotique $|\sigma_{11}| = \sqrt{2}\sigma_y$.

Si $n > 1$:

$$\frac{1-\nu}{E_o} \sigma_{11}^N + \frac{1}{(2z-1)^{nN-1}} \left(\frac{\frac{|\sigma_{11}^N|}{\sqrt{2}} - \sigma_{yN}}{K_o} \right)^{nN} \text{signe}(\sigma_{11}^N) = 0$$

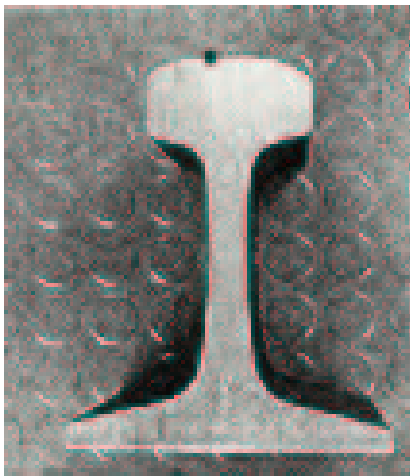
$$-\frac{(1-\nu)K_o\sqrt{2}}{E_o(n-1)} \left(\frac{1}{\left(\frac{|\sigma_{11}| - \sqrt{2}\sigma_y}{\sqrt{2}K_o}\right)^{n-1}} - \frac{1}{\left(\frac{-\sqrt{2}\sigma_y}{\sqrt{2}K_o}\right)^{n-1}} \right) = \int \frac{dt}{(2z(t)-1)^{nN-1}}$$

$$|\sigma_{11}| = \sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{2}K_o \left(\left(\frac{\sqrt{2}K_o}{-\sqrt{2}\sigma_y}\right)^{n-1} - \frac{E_o(n-1)}{(1-\nu)\sqrt{2}K_o} \int \frac{dt}{(2z(t)-1)^{nN-1}} \right)^{-\frac{1}{n-1}}$$

ENSMP 1ère année, Mécanique des matériaux solides, 24 juin 2002

Les trois exercices proposés ci-dessous sont parfaitement indépendants. A l'intérieur de chacun, certaines questions sont également indépendantes. Tous les documents sont autorisés.

Mécanique de la rupture



Une fissure de surface de profondeur 3 mm a été détectée (au niveau du point sur la coupe ci-jointe) dans un rail de chemin de fer, de hauteur totale 20 cm. Elle s'est amorcée sous l'action de la corrosion, et croît lentement par fatigue sous l'effet des chargements cycliques provoqués par le passage des trains. Les calculs indiquent que le passage d'une roue produit une charge dans l'axe du rail, donc normale à la fissure, variant entre -20 MPa et +107 MPa.

Des spécimens de laboratoire sont chargés entre $K_{min} = 0$ et K_{max} . Les vitesses de propagation sont respectivement de 10^{-3} mm/cycle et 10^{-2} mm/cycle pour des valeurs de K_{max} de 20 et 35 MPa \sqrt{m} . La rupture brutale intervient pour une valeur $K_{max}=45$ MPa \sqrt{m} .

1. Trouver les valeurs des coefficients C et m de la loi de Paris.

La loi de Paris s'écrit :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m$$

avec

$$\Delta K = K_{max} - K_{min}$$

Les données précédentes permettent donc d'écrire :

$$\begin{cases} C \times 20^m = 10^{-6} \\ C \times 35^m = 10^{-5} \end{cases}$$

ce qui donne (unités : m, MPa) :

$$m \approx 4.11 \quad , \quad C \approx 4.510^{-12}$$

2. On néglige le caractère tridimensionnel de la fissure, ce qui permet de supposer que le facteur d'intensité de contrainte en mode I est donné en fonction de la profondeur de fissure a et de la contrainte axiale dans le rail σ par $K = 1.12\sigma\sqrt{\pi a}$. Donner la vitesse de propagation pour la longueur de fissure initiale, et la longueur de fissure qui provoque la rupture brutale.

On évalue la vitesse de propagation de fissure à partir du facteur d'intensité de contrainte

$$\Delta K = 1.12\Delta\sigma\sqrt{\pi a}$$

avec :

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 107 - (-20) = 127 \text{ MPa}, \text{ et } a = a_0 = 0.003 \text{ m}$$

En remplaçant les paramètres m et C de la loi de Paris par leur valeur :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \approx 0.22 \cdot 10^{-6} \text{ m/cycle}$$

La rupture brutale est obtenue en comparant le facteur d'intensité de contrainte critique au facteur d'intensité de contrainte obtenue avec la contrainte maximale (et non $\Delta\sigma$) :

$$a_{crit} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{crit}}{1.12\sigma_{max}} \right)^2 \approx 44.88 \text{ mm}$$

3. *Ecrire l'équation qui détermine la courbe (nombre de cycles–longueur de fissure) entre la valeur initiale $a_0 = 3\text{mm}$ et une valeur courante a .*

Ce résultat provient directement de l'application de la loi de Paris :

$$\frac{da}{dN} = C(Y\Delta\sigma\sqrt{\pi a})^m$$

avec $Y=1.12$, ce qui correspond au cas d'une demi-plaque infinie portant une fissure perpendiculaire à la surface extérieure.

La relation entre le nombre de cycles (N) et la longueur de fissure (a) est alors :

$$CY^m(\Delta\sigma)^m\pi^{m/2} \int_0^N dN = \int_{a_0}^a \frac{da}{a^{m/2}}$$

d'où :

$$N = \frac{2}{(m-2)CY^m(\Delta\sigma)^m\pi^{m/2}} \left\{ \frac{1}{(a_0)^{(m-2)/2}} - \frac{1}{a^{(m-2)/2}} \right\}$$

4. *Indiquer le nombre de passages de trains pour lequel on aura une rupture brutale. On indiquera clairement les hypothèses ou approximations qui sont faites pour arriver à cette prévision.*

On calcule alors un nombre de cycles de $N_f = 12281$. Si on prend l'exemple d'un TGV 10 voitures (plus deux motrices), il faut compter 48 cycles par passage. Ceci ramène donc le nombre de passages à 255 !

Contraintes thermiques en plasticité

On considère un prisme d'axe x_1 dont le déplacement axial est bloqué. Ses faces latérales sont libres, et on étudie le comportement dans une section courante, en négligeant l'effet des encastresments. L'état de contrainte est donc supposé uniaxial en direction x_1 . Le chargement extérieur appliqué est dû uniquement à la température, la déformation totale restant nulle. On notera respectivement σ , ε , ε^e , ε^p , ε^{th} , la contrainte, la déformation totale, la déformation élastique, la déformation plastique et la dilatation thermique. On notera par T la variation de température par rapport à l'état de référence à contrainte et déformation nulles. En introduisant le coefficient de dilatation thermique linéaire α , on a donc $\varepsilon^{th} = \alpha T$.

Ecrouissage isotrope

On suppose que le matériau est élastoplastique, et qu'il obéit à une règle d'écrouissage isotrope linéaire. Le module de Young, E , le module plastique, H (on suppose que $H < E$), et la limite d'élasticité initiale σ_y sont supposés indépendants de la température. R dépend donc uniquement de la déformation plastique cumulée, p , nulle à l'origine, et définie par $\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^p|$:

$$\sigma = E\varepsilon^e$$

$$f(\sigma, R) = |\sigma| - \sigma_y - R \quad R(p) = Hp$$

1. Définir l'augmentation de température T_e pour laquelle on atteint la

limite d'élasticité du matériau.

La déformation totale reste nulle durant la variation de température :

$$\frac{\sigma}{E} + \alpha T = 0$$

ce qui fournit la valeur de température demandée, pour $\sigma = \sigma_y$:

$$T_e = \frac{\sigma_y}{E\alpha}$$

2. On suppose que T passe de 0 à T_m (avec $T_m > T_e$). Exprimer le fait que le critère de plasticité f reste nul pendant l'écoulement plastique, et définir les valeurs de contrainte σ_m et de déformation plastique ε_m^p à la fin de la montée en température.

La déformation totale comporte maintenant un terme de déformation plastique, si bien que :

$$\frac{\sigma}{E} + \varepsilon^p + \alpha T = 0$$

Comme l'écoulement plastique s'effectue en compression, on a $\varepsilon^p = -p$, si bien que le fait que le critère reste nul s'écrit :

$$\sigma = -\sigma_y + H\varepsilon^p$$

La résolution de ce petit système fournit alors :

$$\varepsilon_m^p = -\frac{E\alpha(T_m - T_e)}{H + E}$$

$$\sigma_m = -\frac{EH}{H + E} (\sigma_y + H\alpha T_m)$$

3. On ramène maintenant T à zéro. Exprimer la condition correspondante en déformation. En supposant dans un premier temps que le matériau reste élastique pendant la décharge, indiquer quelle sont alors les valeurs de la déformation plastique et de la contrainte lors du retour à $T = 0$? Indiquer à quelle condition le matériau reste effectivement élastique en fin de refroidissement.

Il faut simplement annuler la déformation thermique. Si le matériau reste élastique, la déformation plastique est inchangée, et la contrainte en

fin de refroidissement est σ_r est telle que $\varepsilon_m^p + \sigma_r/E = 0$. La comparaison avec l'expression de la question précédente donne immédiatement :

$$\sigma_r = \sigma_m + E\alpha T_m = \frac{EH}{H+E} (E\alpha T_m - \sigma_y) = \frac{E^2\alpha}{H+E} (T_m - T_e)$$

Cette expression sera valide tant que la contrainte obtenue reste inférieure à la limite d'élasticité actuelle, qui, après le premier chargement, vaut $-\sigma_m$; il faut donc assurer :

$$\frac{EH}{H+E} (E\alpha T_m - \sigma_y) < \frac{EH}{H+E} (\sigma_y + H\alpha T_m)$$

Cette condition sera vérifiée si la température ne dépasse pas un certain seuil lors du premier chauffage :

$$T_m < \frac{2\sigma_y}{\alpha(E-H)}$$

4. Calculer la déformation plastique et la contrainte à $T = 0$ pour le cas où il y a replastification à la décharge.

Si le seuil précédent est dépassé, on repart de ε_m^p en déformation plastique, avec un seuil actuel à $-\sigma_m$, et le matériau subit un incrément de déformation δ^p positif tel que :

$$p_r = -\varepsilon_m^p + \delta\varepsilon^p \quad \varepsilon_r^p = \varepsilon_m^p + \delta\varepsilon^p$$

A la fin du refroidissement, il faut vérifier les deux égalités suivantes, correspondant respectivement à la loi de comportement (déformation nulle, déformation thermique nulle) et à la condition de plasticité :

$$\begin{aligned} \sigma &= -E\varepsilon_m^p - E\delta\varepsilon^p \\ \sigma &= \sigma_y - H\varepsilon_m^p + H\delta\varepsilon^p \end{aligned}$$

On trouve :

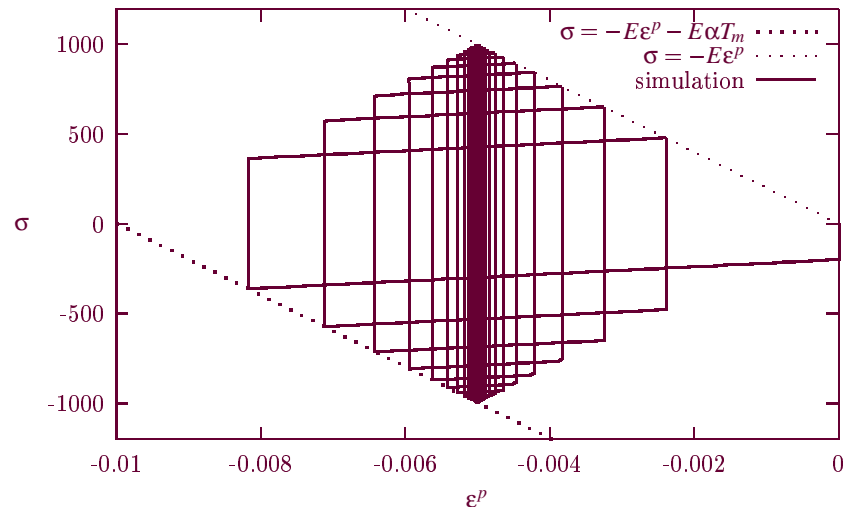
$$\begin{aligned} \delta\varepsilon^p &= \frac{((E-H)\alpha T_m - 2\sigma_y)E}{(E+H)^2} \\ \varepsilon_r^p &= -\frac{2EH\alpha T_m + (E-H)\sigma_y}{(E+H)^2} \end{aligned}$$

La contrainte vient ensuite simplement :

$$\sigma_r = -E\varepsilon_r^p = \frac{E}{(E+H)^2} (2EH\alpha T_m + (E-H)\sigma_y)$$

5. En supposant que l'on applique un grand nombre de cycles de température entre 0 et T_m , décrire qualitativement l'évolution de l'écoulement plastique et définir l'état final du matériau, en se plaçant dans le plan (déformation mécanique–contrainte).

La déformation mécanique que subit le prisme varie entre 0 et $-\alpha T_m$ au cours des cycles. Les deux courbes limites sur lesquelles se retrouvent les points représentatifs au chauffage et au refroidissement sont donc respectivement $\sigma = -E\varepsilon^p - E\alpha T_m$ et $\sigma = -E\varepsilon^p$. Au cours des cycles, la limite d'élasticité augmente peu à peu. L'état limite correspond au moment où la taille du domaine d'élasticité (deux fois la limite élastique) sera égale à $2E\alpha T_m$. Une illustration de cette évolution est donnée sur la simulation ci-dessous, réalisée avec $E = 10000$ MPa, $\alpha = 10^{-5}$, $T_m = 1000^\circ\text{C}$. On vérifie bien qu'à l'état asymptotique la taille du domaine élastique est de 2000 MPa.



6. En faisant $H = 0$ dans les équations précédentes, commenter le cas

d'un comportement élastique parfaitement plastique.

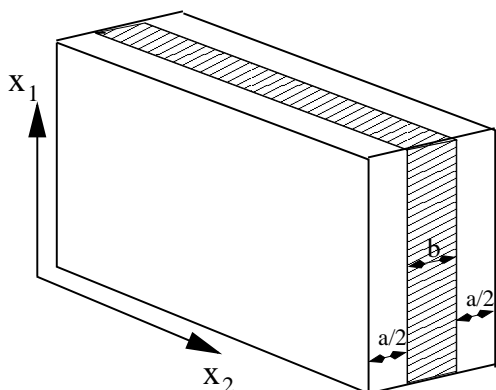
Le raisonnement de la question précédente ne tient plus si $H = 0$. Dans ce cas, il n'y a pas d'évolution de la taille du domaine d'élasticité, et l'état asymptotique, atteint dès le deuxième cycle, est caractérisé par des contraintes variant entre $\pm\sigma_y$. Le cycle reste ouvert au lieu qu'il soit réduit à une ligne comme dans le cas précédent.

Écrouissage cinématique Reprendre les questions 3, 4, 5 de la section précédente en supposant maintenant que le matériau obéit à une règle d'écrouissage cinématique linéaire :

$$f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y \quad X = H\varepsilon^p$$

...

Etude d'une plaque composite



Une plaque composite est formée des matériaux A et B . Le plan de la plaque est parallèle à (x_1, x_2) . L'intérieur de la plaque est constitué par le matériau B (épaisseur b selon x_3), qui est enserré par deux plaques du matériau A , chacune d'épaisseur $a/2$. On suppose que les dimensions de la plaque dans le plan (x_1, x_2) sont grandes devant l'épaisseur. Les fractions volumiques de A et B sont respectivement C_A et C_B (avec $C_A + C_B = 1$). Dans l'ensemble du problème, on supposera que les champs de contrainte et de déformation sont uniformes dans chaque matériau. On notera respectivement $\underline{\sigma}_A$ et $\underline{\sigma}_B$ le tenseur des contraintes dans A et B , et $\underline{\varepsilon}_A$ et $\underline{\varepsilon}_B$ les tenseurs de déformation.

Comportement élastique

On cherche, à caractériser, pour certaines sollicitations particulières, le comportement *homogène équivalent* qu'il faudrait affecter à un matériau unique pour qu'il reproduise le comportement global de la plaque. On suppose que les deux matériaux ont un comportement élastique isotrope, caractérisé par les modules de compressibilité (resp. K_A et K_B) et les modules de cisaillement (resp. μ_A et μ_B).

1. Indiquer ce que sont les bornes de Voigt et de Reuss, et écrire les valeurs extrêmes correspondantes que peuvent prendre le module de

compressibilité (resp. K_V et K_R) et le module de cisaillement (resp. μ_V et μ_R) du matériau homogène équivalent, en fonction des coefficients K_A , K_B , μ_A et μ_B .

Les bornes de Voigt et Reuss sont :

$$\forall \underline{E} \quad \underline{E} : (\underline{C} - \langle \underline{c} \rangle) : \underline{E} \leq 0$$

$$\forall \underline{\Sigma} \quad \underline{\Sigma} : (\underline{S} - \langle \underline{s} \rangle) : \underline{\Sigma} \leq 0$$

Dans le cas de l'élasticité isotrope, les équations précédentes deviennent simplement :

$$\frac{1}{K_R} = \frac{C_A}{K_A} + \frac{C_B}{K_B} \quad K_V = C_A K_A + C_B K_B$$

$$\frac{1}{\mu_R} = \frac{C_A}{\mu_A} + \frac{C_B}{\mu_B} \quad \mu_V = C_A \mu_A + C_B \mu_B$$

2. On suppose que les matériaux A et B ont même coefficient de Poisson, ν , et que leurs modules de Young sont respectivement E_A et E_B . Donner dans ces conditions un encadrement du module de Young du matériau homogène équivalent (resp. E_V et E_R). On rappelle que :

$$E = 2\mu(1 + \nu) = 3K(1 - 2\nu) \quad \frac{3}{E} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{3K}$$

Indiquer, sans faire le calcul, ce que deviendrait ce résultat si les coefficients de Poisson étaient différents dans chaque matériau.

La relation linéaire entre E et K permet d'appliquer à E la relation concernant la loi de Reuss connue pour K . Celle qui existe entre les inverses

de E , K et μ permet d'appliquer à E celles qui concernent la loi de Voigt. Il vient donc :

$$E_R = \frac{E_A E_B}{C_A E_B + C_B E_A} \quad E_V = C_A E_A + C_B E_B$$

3. On effectue une traction équilibrée à déplacement imposé dans le plan (x_1, x_2) sur un carré de matière ($\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon$). On suppose que les seules composantes non nulles du tenseur de contrainte sont 11 et 22. Justifier. Ecrire la loi de Hooke dans chaque matériau. Exprimer la valeur de la contrainte moyenne $\sigma = C_A \sigma_{A11} + C_B \sigma_{B11} = C_A \sigma_{B22} + C_B \sigma_{B22}$ en fonction de ϵ , et en déduire la valeur du module de Young apparent du matériau homogène équivalent selon les composantes 11 et 22.

Les composantes σ_{13} , σ_{23} , σ_{33} sont nulles sur la surface libre de direction x_3 . En raison de la symétrie du chargement, il n'y a pas non plus de cisaillement σ_{12} . Le tenseur de contrainte s'écrit donc :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'application de la loi de Hooke, pour les matériaux A et B donne successivement :

$$\begin{aligned} E_A \epsilon &= \sigma_{A11} - \nu \sigma_{A22} & E_A \epsilon &= \sigma_{A22} - \nu \sigma_{A11} \\ E_B \epsilon &= \sigma_{B11} - \nu \sigma_{B22} & E_B \epsilon &= \sigma_{B22} - \nu \sigma_{B11} \end{aligned}$$

D'où :

$$\sigma_{A11} = \sigma_{A22} = \frac{\epsilon E_A}{1 - \nu} \quad \text{et} \quad \sigma_{B11} = \sigma_{B22} = \frac{\epsilon E_B}{1 - \nu}$$

La valeur moyenne de la contrainte dans la plaque composite s'écrit ainsi :

$$\sigma = \frac{C_A E_A \epsilon}{1 - \nu} + \frac{C_B \epsilon E_B}{1 - \nu} = \frac{C_A E_A + C_B E_B}{1 - \nu} \epsilon$$

d'où :

$$E^{hom} = C_A E_A + C_B E_B$$

4. En suivant une procédure identique, donner la valeur du module de Young équivalent pour une traction selon l'axe x_3 .

La déformation de la plaque selon la composante 33 est la moyenne des valeurs obtenues dans chaque matériau. Par ailleurs, la contrainte de traction σ est la même dans les deux matériaux, si bien que :

$$\epsilon_{33} = C_A \frac{\sigma}{E_A} + C_B \frac{\sigma}{E_B}$$

La moyenne E^{hom} est alors telle que :

$$\frac{1}{E^{hom}} = \frac{C_A}{E_A} + \frac{C_B}{E_B}$$

5. Effectuer la même détermination en cisaillement :

- dans le cas d'un cisaillement 12 ;
- dans le cas d'un cisaillement 13.

- Pour le cas du cisaillement 12, dans le plan de la plaque, ce sont les déformations qui sont égales dans chaque matériau. On obtient :

$$\mu = C_A \mu_A + C_B \mu_B$$

- Pour le cas du cisaillement 13, ce sont les contraintes qui sont égales dans chaque matériau. On retrouve le cas de la question 4 :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{C_A} \mu_A + \frac{1}{C_B} \mu_B$$

6. Comparer les résultats obtenus avec les bornes des questions 1 et 2. Commenter.

Selon la direction considérée, les valeurs obtenues avec nos solutions approchées réalisent l'une ou l'autre borne.

Comportement viscoélastique

Cette partie est indépendante de la partie précédente

On suppose maintenant que le matériau B est viscoélastique. La vitesse de déformation peut se décomposer en une partie élastique (idem section précédente) et une partie purement visqueuse, dépendante du déviateur de contrainte, $\dot{\varepsilon}$, où s'introduit le coefficient de viscosité η :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \text{ avec } \dot{\varepsilon}^v = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}}{\eta}$$

7. On étudie d'abord le matériau B isolé. On suppose que l'on applique très rapidement un chargement équi-biaxial à contrainte imposée sur ce matériau ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_0$). Donner l'expression de la réponse, supposée élastique, à la mise en charge, et celle de la déformation différée en fluage biaxial à la contrainte σ_0 , en fonction du temps depuis la mise en charge, t .

Le critère de von Mises pour le chargement biaxial indiqué vaut σ_0 . On a vu précédemment les relations en élasticité. L'expression de la vitesse de déformation totale et de la déformation totale en fluage sont donc respectivement :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1-\nu}{E} \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{2\eta}$$

et :

$$\varepsilon = \frac{1-\nu}{E} \sigma_0 + \frac{\sigma_0}{2\eta} t$$

8. On considère maintenant de nouveau le cas de la plaque, et on suppose que l'on applique le même chargement biaxial à contrainte

moyenne imposée, les déformations ε_{11} et ε_{22} restant identiques dans chaque matériau. Définir l'état de contrainte dans chaque couche à la fin de la mise en charge élastique. Ecrire les relations de comportement dans chaque couche (on posera $\varepsilon = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$, identique pour les deux matériaux, $\sigma_A = \sigma_{A11} = \sigma_{A22}$ dans le matériau A et $\sigma_B = \sigma_{B11} = \sigma_{B22}$ dans le matériau B, avec $\sigma_0 = C_A \sigma_A + C_B \sigma_B$).

A la fin de la mise en charge, supposée très rapide, on a :

$$\sigma_A = \frac{E_A}{1-\nu} \varepsilon = \frac{E_A}{1-\nu} \frac{1-\nu}{E} \sigma_0$$

Soit :

$$\sigma_A = \frac{E_A}{E} \sigma_0 \quad \sigma_B = \frac{E_B}{E} \sigma_0$$

La loi de comportement n'est pas la même dans chaque matériau :

$$\dot{\varepsilon}_A = \frac{1-\nu}{E_A} \dot{\sigma}_A \quad \dot{\varepsilon}_B = \frac{1-\nu}{E_B} \dot{\sigma}_B + \frac{\sigma_B}{2\eta}$$

9. Donner sans calcul les valeurs asymptotiques de σ_A , σ_B . Intégrer les équations différentielles et donner les évolutions de σ_A , σ_B , et ε . Quel module élastique équivalent voit-on apparaître dans la constante de temps du fluage ? A quel modèle rhéologique se retrouve-t-on ramené dans cette configuration ?

Dans le matériau viscoélastique, la contrainte va chuter au cours de la déformation, pour atteindre 0 à l'état stabilisé, car il n'y a pas de seuil d'écoulement. A ce moment, l'effort extérieur sera tout entier supporté par le matériau élastique. On trouve donc :

$$\sigma_A = \frac{\sigma_0}{C_A} \quad \sigma_B = 0$$

En remplaçant σ_A par son expression en fonction de σ et de σ_B dans sa loi de comportement, on peut exprimer la vitesse de déformation totale de deux manières :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_A = \frac{1-\nu}{E_A C_A} (\dot{\sigma} - C_B \dot{\sigma}_B)$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_B = \frac{1-\nu}{E_B} \dot{\sigma}_B + \frac{\sigma_B}{2\eta}$$

L'évolution de σ_B est donc gouvernée par l'équation :

$$C_A E_A E_B \frac{\sigma_B}{2\eta} + (1-\nu)(E_A C_A + E_B C_B) \dot{\sigma}_B = (1-\nu) E_B \dot{\sigma}$$

En fluage, il faut faire $\dot{\sigma} = 0$ dans l'équation précédente, ce qui conduit après intégration à :

$$\sigma_B = \frac{E_B}{E} \sigma_0 \exp(-t/\tau) \text{ avec } \tau = 2\eta(1-\nu)C_B \left(\frac{1}{E_A C_A} + \frac{1}{E_B C_B} \right)$$

Les caractéristiques du présent système sont celles d'un modèle de Kelvin-Voigt.

Etude de la rupture différée

10. Le critère de rupture du matériau A prévoit que le matériau se rompt lorsque la contrainte normale principale atteint une valeur limite

σ_u . Décrire les différents régimes de «fonctionnement» possibles de la plaque composite, en indiquant dans quels cas elle peut (i) se rompre à la mise en charge, (ii) présenter une rupture différée, (iii) résister à la charge appliquée.

On distingue les cas suivants :

- Il y a rupture à la mise en charge si la contrainte atteinte en élasticité dans le matériau A dépasse la limite de rupture ;
- le matériau résistera à la charge si la contrainte asymptotique dans A reste inférieure à la contrainte à rupture ;
- dans le cas intermédiaire, la contrainte dans le matériau A augmente au cours du fluage, et le matériau rompt lorsque σ_A atteint la limite de rupture.

On établit alors le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll} \sigma_0 < \sigma_u \frac{C_A E_A + C_B E_B}{E_A} & : \text{ pas de rupture à la mise en charge} \\ \sigma_0 < \sigma_u C_A & : \text{ pas de rupture} \\ \sigma_u C_A < \sigma_0 < \sigma_u \frac{C_A E_A + C_B E_B}{E_A} & : \text{ rupture différée} \end{array}$$

Le temps pour lequel on a une rupture différée est tel que

$$\sigma_B = (\sigma_0 - C_A \sigma_A) / C_B = \sigma_u$$

ENSMP 1ère année, Mécanique des matériaux solides, 26 mai 2003

Traction sur une fibre entourée d'un cylindre de matrice

On cherche à caractériser le comportement équivalent en traction simple d'un composite à fibres longues. On considère pour cela une cellule élémentaire cylindrique, d'axe z . En coordonnées cylindriques, la fibre, de section circulaire (diamètre $2a$), occupe l'espace $r < a$, et la matrice l'espace $a < r < b$. Le cylindre est «suffisamment» allongé en direction z (longueur h); on suppose donc que la déformation axiale est uniforme, et que les composantes en rr et $\theta\theta$ des tenseurs de contraintes et déformations sont indépendantes de z . La fraction volumique de fibre est $f = (a/b)^2$. Le déplacement est libre dans le plan r - θ sur les sections extrêmes du cylindre. On bloque en direction z la section inférieure (en $z=0$), et on applique un déplacement U_z uniforme sur la surface supérieure (en $z = h$). La surface latérale du cylindre est une surface libre.

Géométrie et sollicitations extérieures étant axisymétriques, les relations déformation-déplacement se réduisent à $\varepsilon_{rr} = u_{r,r}$, $\varepsilon_{\theta\theta} = u_r/r$ et $\varepsilon_{zz} = u_{z,z}$. On admettra le résultat classique définissant la forme des champs de déplacement radial et de déplacement axial :

$$u_r = Ar + \frac{B}{r} \quad u_z = Cz$$

Les constantes A et B sont bien entendu différentes dans la fibre et dans la matrice, elles dépendent des conditions aux limites. Dans la suite de l'exercice, on évalue ces constantes, ainsi que l'expression des contraintes, pour en déduire l'expression de E_z , module de Young équivalent en direction z et de ν_{zr} , coefficient de Poisson.

1. En considérant l'expression générale du déplacement, calculer les composantes du tenseur de déformation.

$$\varepsilon_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \quad \varepsilon_{zz} = C$$

2. On rappelle que $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, et $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$. Montrer que les composantes du tenseur de contrainte se mettent sous la forme :

$$\sigma_{rr} = H \left(A + \nu C - (1 - 2\nu) \frac{B}{r^2} \right) \quad \sigma_{\theta\theta} = H \left(A + \nu C + (1 - 2\nu) \frac{B}{r^2} \right)$$

$$\sigma_{zz} = H (2\nu A + (1 - \nu) C) \quad \text{avec } H = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Ceci provient de l'application directe des équations de Hooke, valides en coordonnées cylindriques, dans lesquelles la trace du tenseur de contrainte σ_{ii} vaut simplement $(2A + C)$, et où i et j prennent successivement les valeurs r , θ , et z :

$$\sigma_{ij} = \lambda \sigma_{ii} + 2\mu \sigma_{ij}$$

On note que le repère (r, θ, z) est le repère principal. Tous les cisaillements sont donc nuls.

3. Justifier le fait que C est le même dans la fibre et dans la matrice. Quelle est l'expression de C en fonction de la déformation axiale ε ?

La déformation axiale est supposée uniforme. On a bien $\varepsilon = \varepsilon_{zz} = C$.

4. Justifier le fait que B est nul pour la fibre. Quelle particularité peut-on en déduire pour les champs de contrainte et de déformation dans la fibre ? On posera dans la suite :

$$\text{fibre : } u_r = A_f r \quad \text{matrice : } u_r = A_m r + \frac{B_m}{r}$$

On appellera respectivement E_f et E_m les modules de Young de la fibre et de la matrice, ν_f et ν_m les coefficients de Poisson.

Si le paramètre B n'était pas nul dans la fibre, les déformations et les contraintes seraient infinies sur l'axe, en $r = 0$. On est donc amené à prendre $B = 0$ dans la fibre, ce qui implique alors que les déformations radiales et circonférentielles sont uniformes. Comme la déformation axiale est uniforme, les contraintes le sont également :

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = A \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = H(A + \nu C)$$

5. Ecrire les deux conditions de continuité à l'interface fibre-matrice (en $r = a$).

Il doit y avoir continuité de la composante radiale du déplacement, et de la composante rr de la contrainte, ce qui fournit respectivement les deux conditions suivantes :

$$A_f a = A_m a + \frac{B_m}{a}$$

$$H_f(A_f + \nu_f C) = H_m \left(A_m + \nu_m C - (1 - 2\nu_m) \frac{B_m}{a^2} \right)$$

6. Ecrire la condition à la frontière $r = b$.

En $r = b$, on a une surface libre, la contrainte σ_{rr} est donc nulle.

$$A_m + \nu_m C - (1 - 2\nu_m) \frac{B_m}{b^2} = 0$$

7. En utilisant les trois conditions précédentes, trouver A_f , A_m , B_m .

Après quelques manipulations, il vient :

$$A_m = - \frac{(1 - 2\nu_m)(H_f \nu_f - H_m \nu_m) + (H_m \nu_m(1 - 2\nu_m) + H_f) \frac{b^2}{a^2}}{(1 - 2\nu_m)(H_f - H_m) + (H_m(1 - 2\nu_m) + H_f) \frac{b^2}{a^2}}$$

On en tire également A_f et B_m .

8. Calculer la résultante des efforts \mathcal{F} sur la surface supérieure du cylindre, en introduisant la fraction volumique de fibre, et en déduire E_z , module de Young équivalent en direction z .

La composante axiale du tenseur de contrainte est uniforme par morceau. On note $S = \pi b^2$ la section de la cellule élémentaire. On obtient tout simplement \mathcal{F} en sommant les contributions dans la fibre (contrainte σ_{zz}^f , section πa^2) et dans la matrice (contrainte σ_{zz}^m , section $\pi(b^2 - a^2)$) :

$$\mathcal{F} = \pi a^2 H_f (2\nu_f A_f + (1 - \nu_f)C) + \pi(b^2 - a^2) H_m (2\nu_m A_m + (1 - \nu_m)C)$$

Le module d'Young apparent E de l'ensemble est tel que $\sigma = E\varepsilon$, avec $\sigma = \mathcal{F}/S$ et $\varepsilon = C$. On peut ainsi calculer E .

9. Evaluer également le coefficient de Poisson apparent ν_{zr} pour une traction selon z .

Le déplacement en $r = b$ définit la contraction radiale associée à une traction selon z . On obtient alors le coefficient de Poisson demandé à partir de $\nu_{rz} = -E\varepsilon_{\theta\theta}/\sigma$, avec $\varepsilon_{\theta\theta}(b) = u_r(b)/b$:

$$\nu_{rz} = -\frac{E}{\sigma} \frac{u_r(b)}{b} = -\frac{1}{C} \left(A_m + \frac{B_m}{b^2} \right)$$

10. Comparer les valeurs obtenues avec celles que fournit une évaluation de type «groupement» parallèle, ne tenant pas compte des champs triaxiaux :

$$E_z = fE_f + (1 - f)E_m \quad \nu_{zr} = f\nu_f + (1 - f)\nu_m$$

Commenter.

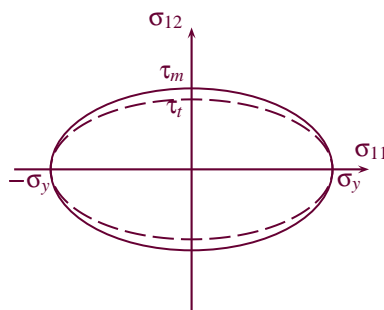
Critères de Tresca et von Mises

On considère un matériau isotrope dont la limite d'élasticité en traction est σ_y .

1. Indiquer les valeurs de la limite d'élasticité en cisaillement pur, (i) si le matériau vérifie le critère de von Mises, (ii) si le matériau vérifie le critère de Tresca.

La limite d'élasticité en cisaillement pur est donnée par $\tau_m = \sigma_y / \sqrt{3}$ si le matériau vérifie le critère de von Mises, et par $\tau_t = \sigma_y / 2$ s'il obéit au critère de Tresca.

2. Tracer la frontière du domaine d'élasticité, pour Tresca et von Mises, dans le plan $(\sigma_{11}-\sigma_{12})$, en supposant que toutes les autres composantes du tenseur de contrainte sont nulles.



Les équations des ellipses sont respectivement :

$$\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2 = \sigma_y^2 \quad (\text{von Mises})$$

$$\sigma_{11}^2 + 4\sigma_{12}^2 = \sigma_y^2 \quad (\text{Tresca})$$

3. Quelle est la frontière du domaine d'élasticité pour le critère de von Mises dans le plan $(\sigma_{11}-\sigma_{23})$, en supposant que toutes les autres composantes du tenseur de contrainte sont nulles ?

Pour le critère de von Mises, tous les cisaillements jouent le même rôle vis-à-vis de chaque contrainte axiale. La frontière du domaine d'élasticité est donc la même que sur la figure précédente ; l'équation de l'ellipse correspondante est :

$$\sigma_{11}^2 + 4\sigma_{23}^2 = \sigma_y^2$$

4. On suppose que les seules composantes non nulles du tenseur de contrainte sont σ_{11} et σ_{23} , et que le matériau vérifie le critère de Tresca. Trouver les 3 contraintes normales principales. Indiquer les différentes expressions du critère en fonction de σ_{11} et σ_{23} dans le premier quadrant du plan $(\sigma_{11}-\sigma_{23})$, en fonction des valeurs relatives de σ_{11} et σ_{23} . Conclure sur la forme du domaine d'élasticité dans le plan $(\sigma_{11}-\sigma_{23})$.

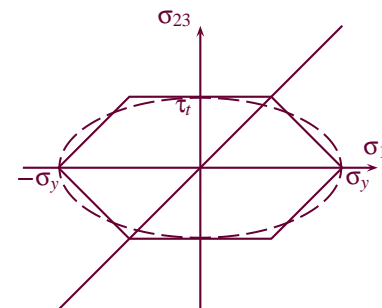
Les trois contraintes normales principales sont $-\sigma_{23}$, σ_{23} , σ_{11} . Dans le premier quadrant, au-dessous de la première bissectrice, elles se rangent dans l'ordre $-\sigma_{23} \leq \sigma_{23} \leq \sigma_{11}$, l'expression du critère est donc :

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{23} - \sigma_y$$

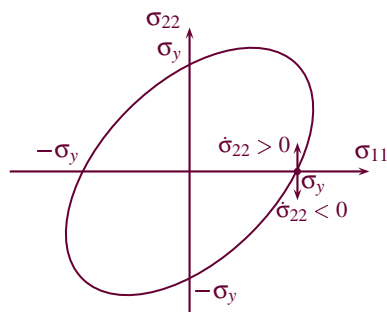
Au-dessus de la première bissectrice, la composante σ_{11} est comprise entre $-\sigma_{23}$ et σ_{23} , si bien que le critère s'écrit maintenant :

$$f(\underline{\sigma}) = 2\sigma_{23} - \sigma_y$$

La forme du critère dans le plan $(\sigma_{11}-\sigma_{23})$ s'obtient ensuite par symétrie par rapport aux axes σ_{11} et σ_{23} . On obtient la courbe continue de la planche ci-dessous, sur laquelle on a également reporté, pour référence, la courbe obtenue en question 2. Contrairement au critère de von Mises, celui de Tresca fait une différence entre les divers cisaillements.



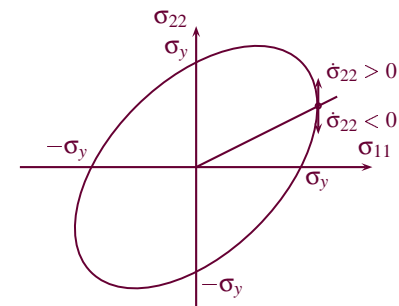
5. On suppose que le matériau vérifie le critère de von Mises. On charge en traction simple jusqu'au point $\sigma_{11} = \sigma_y$. Indiquer si l'on est ensuite en élasticité ou en plasticité, si toutes les composantes de la vitesse de contrainte sont nulles sauf $\dot{\sigma}_{22}$, avec (i) $\dot{\sigma}_{22} > 0$, (ii) $\dot{\sigma}_{22} < 0$. Lequel des deux cas n'est pas plastiquement admissible si le matériau est parfaitement plastique ?



A partir du point $\sigma_{11} = \sigma_y$, situé sur la frontière du domaine d'élasticité :

- une *augmentation* de la contrainte σ_{22} *diminue* la valeur du critère, et fait donc entrer dans le domaine d'élasticité.
- une *diminution* de la contrainte σ_{22} *augmente* la valeur du critère, ce qui n'est pas plastiquement admissible si le matériau est parfaitement plastique.

6. On suppose que le matériau vérifie le critère de von Mises. On charge en traction biaxiale jusqu'au point $\sigma_{11} = 2\sigma_y/\sqrt{3}$, $\sigma_{22} = \sigma_y/\sqrt{3}$. Vérifier que l'on est toujours en élasticité. Indiquer si l'on est ensuite en élasticité ou en plasticité, si toutes les composantes de la vitesse de contrainte sont nulles sauf $\dot{\sigma}_{22}$, avec (i) $\dot{\sigma}_{22} > 0$, (ii) $\dot{\sigma}_{22} < 0$.



Le point de fonctionnement indiqué est l'intersection de la demi-droite d'équation $\sigma_{11} = 2\sigma_{22}$ et de l'ellipse définissant la frontière du domaine d'élasticité, d'équation :

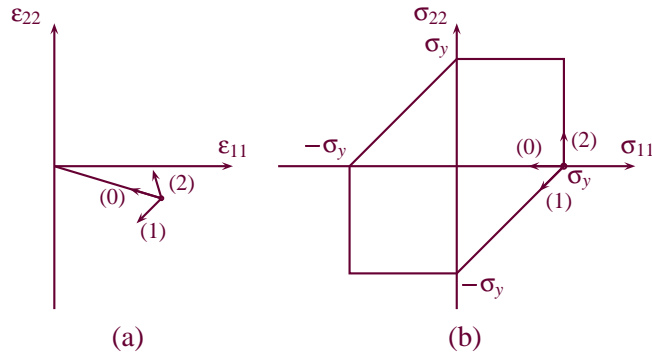
$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} = \sigma_y^2$$

Il correspond par exemple au chargement que subit un cylindre sous pression avec «effet de fond». La pente de la tangente à cette courbe se définit comme :

$$\frac{d\sigma_{22}}{d\sigma_{11}} = -\frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{22} - \sigma_{11}}$$

On a une tangente verticale au point $\sigma_{11} = 2\sigma_{22}$. Les deux cas (i) et (ii) produisent donc de l'écoulement plastique.

7. Le matériau vérifie le critère de Tresca. On effectue un chargement en déformation imposée depuis l'origine jusqu'à $\epsilon_{11} = \sigma_y/E$ et $\epsilon_{22} = -\nu\sigma_y/E$ en conservant $\sigma_{33} = 0$, de même que les composantes de cisaillement. En conservant le même type de pilotage, on veut réaugmenter la valeur de ϵ_{22} . Quelles sont les valeurs limites du rapport $\dot{\epsilon}_{22}/\dot{\epsilon}_{11}$ pour le chargement soit toujours élastique ?



Le point indiqué correspond à un état de traction simple. Il est à la limite du domaine d'élasticité. En supposant que le comportement reste élastique à partir de ce point, les composantes 11 et 22 des contraintes et des déformations doivent vérifier les équations :

$$E\dot{\epsilon}_{11} = \dot{\sigma}_{11} - \nu\dot{\sigma}_{22}$$

$$E\dot{\epsilon}_{22} = \dot{\sigma}_{22} - \nu\dot{\sigma}_{11}$$

Il vient :

$$\dot{\sigma}_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}) \quad \dot{\sigma}_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{11})$$

Soit, en posant $k = \dot{\epsilon}_{22}/\dot{\epsilon}_{11}$:

$$\frac{\dot{\sigma}_{22}}{\dot{\sigma}_{11}} = \frac{k + \nu}{k\nu + 1}$$

Le domaine pour lequel le comportement est effectivement élastique correspond à un rapport $\dot{\sigma}_{22}/\dot{\sigma}_{11}$ compris entre 1 et $-\infty$ (respectivement

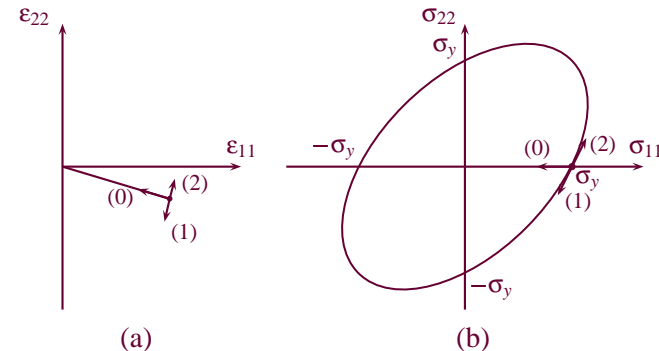
directions (1) et (2) dans le plan des contraintes (σ_{11} - σ_{22})), avec les signes adéquats pour chaque composante. L'examen de ces conditions conduit à la détermination du domaine dans le plan des déformations (ϵ_{11} - ϵ_{22}) : le cas (1) fournit une pente 1, le cas (2) une pente $-1/\nu$, tandis que, naturellement, un simple retour en compression uniaxiale redonne la pente $-\nu$.

8. Même question que précédemment avec le critère de von Mises.

La pente $d\sigma_{22}/d\sigma_{11}$ à l'ellipse de von Mises vaut 2 au point $\sigma_{11} = \sigma_y$ en traction simple. Les points admissibles correspondent au demi-espace supérieur. La limite admissible pour k est alors :

$$k = \frac{2 - \nu}{1 - 2\nu}$$

Les limites (1) et (2), similaires au cas précédent, sont reportées sur la figure ci-dessous.



ENSMMP 1ère année, Mécanique des matériaux solides, juin 2004

L'exercice et le problème proposés ci-dessous sont parfaitement indépendants. L'exercice porte sur une poutre en élasticité. Le problème traite de la torsion d'un prisme, en élasticité puis en plasticité. Tous les documents sont autorisés.

1 Exercice :

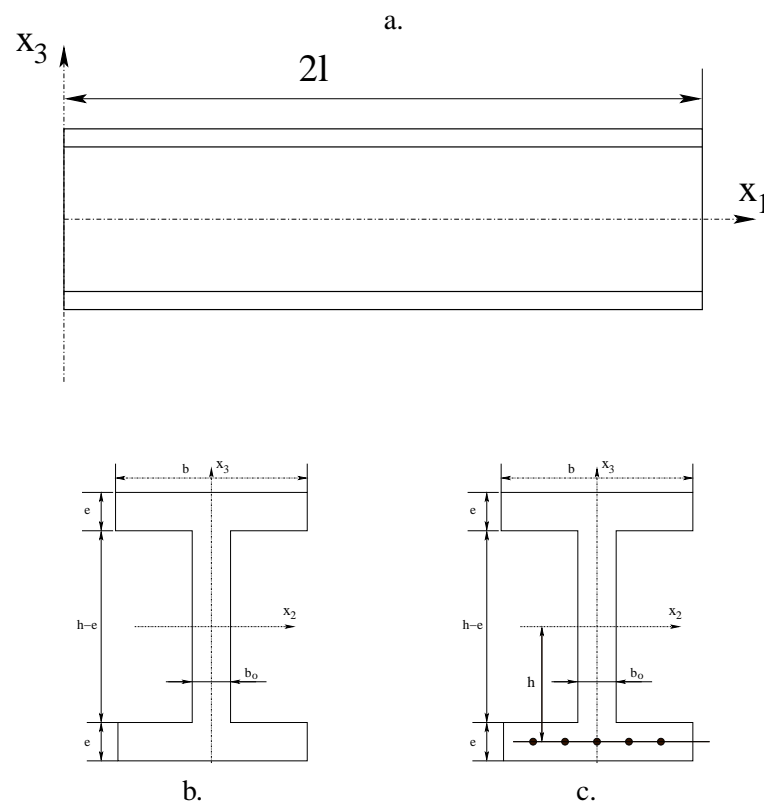


Figure 1 : Vue de la poutre, (a) de profil, (b) en section. (c) Poutre renforcée.

Une poutre de longueur $2l$ (figure 1a) présente une section en I, comme

indiqué sur la figure 1b. Elle sera sollicitée en traction, cisaillement et flexion dans le plan (x_1, x_3) . On suppose dans un premier temps qu'elle est constituée d'un matériau homogène, de module de Young E , et de module de cisaillement μ .

1. Calculer la rigidité en flexion autour de x_2 , EI . Justifier le fait que l'on retienne souvent uniquement la contribution des deux parties de largeur b . Donner la valeur approchée de EI dans ce cas, en supposant que e est suffisamment petit devant h .

Le moment quadratique I par rapport à l'axe x_2 se calcule selon la formule :

$$I = \int \int x_3^2 dS = 2b_0 \int_0^{(h-e)/2} x_3^2 dx_3 + 2b \int_{(h-e)/2}^{(h+e)/2} x_3^2 dx_3$$

Ceci donne donc une rigidité :

$$EI = \frac{Eb_0}{12}(h-e)^3 + \frac{Eb}{12}((h+e)^3 - (h-e)^3)$$

On constate que le terme dominant correspond à la contribution des deux parties de largeur b . Lorsque e est petit devant h , cette rigidité est approchée par la quantité $Ebeh^2/2$.

2. On cherche la forme que prend la poutre lorsqu'elle est simplement posée à ses deux extrémités (moment nul aux extrémités), et soumise uniquement à son propre poids. On notera p la charge correspondante par unité de longueur. On applique la théorie de Timoshenko. Rappeler les hypothèses cinématiques attachées à cette approche.

L'hypothèse de base porte sur la schématisation du champ de déplacement à l'intérieur du solide : le solide est assimilé à un milieu

curviligne, le champ de déplacement du milieu continu étant ensuite évalué à partir de la solution trouvée en supposant qu'une section droite initialement plane et perpendiculaire à la « ligne moyenne » ainsi définie reste plane.

3. Donner la valeur des réactions sur les supports, ainsi que la variation de l'effort tranchant T en fonction de x_1 .

Le poids total est égal à $2ql$; il est uniformément réparti sur toute la longueur de la poutre. Il donne naissance à deux réactions de valeur $-ql$ sur chaque support. On obtient simplement l'effort tranchant :

$$\frac{dT}{dx_1} = -q \quad T = q(l - x_1)$$

4. En intégrant T , et en tenant compte des conditions aux limites aux extrémités de la poutre, évaluer l'évolution du moment M en fonction de x_1 .

Le moment M doit être nul à chaque extrémité de la poutre. On obtient dans ces conditions :

$$\frac{dM}{dx_1} = T \quad M = q \left(lx_1 - \frac{x_1^2}{2} \right)$$

5. Calculer l'angle θ caractérisant la rotation d'une section de la poutre.

L'angle θ caractérisant la rotation d'une section de la poutre s'obtient en intégrant la quantité M/EI par rapport à x_1 et en tenant compte du fait que, pour des raisons de symétrie, l'angle est nul au milieu de la poutre, soit pour $x_1 = l$. On obtient ainsi :

$$\frac{d\theta}{dx_1} = \frac{M}{EI} \quad \theta = \frac{q}{EI} \left(\frac{lx_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{6} - \frac{l^3}{3} \right)$$

On vérifie bien que les angles obtenus en $x_1 = 0$ et en $x_1 = 2l$ sont opposés, de valeur $\pm \frac{ql^3}{3EI}$.

6. Trouver finalement l'expression de la flèche, en identifiant la contribution de l'effort tranchant et celle du moment de flexion. Dans quelle condition cette dernière est-elle largement prépondérante ? Donner la valeur de la flèche maximale, au centre de la poutre (point $x_1 = l$).

La flèche V s'obtient au travers de l'équation

$$\frac{dV}{dx_1} = -\theta + \frac{T}{\mu S}$$

L'intégration de $-\theta$ fournit donc le terme V_f lié au moment de flexion :

$$V_f = \frac{q}{EI} \left(-\frac{lx_1^3}{6} + \frac{x_1^4}{24} + \frac{l^3x_1}{3} \right)$$

Le terme provenant de l'effort tranchant est quant à lui égal à :

$$V_t = \frac{qx_1}{\mu S} \left(l - \frac{x_1}{2} \right)$$

Ces expressions s'annulent bien en $x_1 = 0$ et en $x_1 = 2l$. La flèche est maximale en $x_1 = l$, et vaut :

$$V_{max} = \frac{5ql^4}{24EI} + \frac{ql^2}{2\mu S}$$

7. Quelle est l'expression de la contrainte σ_{11} ?

Il n'y a pas d'effort normal ; la contrainte se calcule donc simplement en fonction du moment de flexion :

$$\sigma_{11} = \frac{Mx_3}{EI} = \frac{qx_1x_3}{2I}(2l - x_1)$$

8. Proposer une application numérique réaliste.

On suppose que la poutre est en acier ($E=210$ MPa, $\mu=80$ GPa, masse volumique $\rho=7800$ kg/m³) et que la section a pour dimensions $h=80$ mm, $b=45$ mm, $b_0=3$ mm, $e=6$ mm. La surface S de la section vaut

$$S = 2be + b_0(h - e) = 762 \text{ mm}^2$$

La charge répartie par unité de longueur de poutre q est donnée par le produit $\rho g S$. On peut tout exprimer en N et mm ($1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$), et on calcule successivement la charge linéique q et le moment quadratique I :

- $q = 7800 \times 9,81 \times 762 \times 10^{-6} = 58,306 \text{ N/m} = 0,058306 \text{ N/mm}$,
- $I = 501716 \text{ mm}^4$.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de V_f et V_t pour différentes valeurs de l :

l (m)	V_f (mm)	V_t (mm)
1	0,012	0.00047
2	1,937	0.00190
4	30,990	0.00761

La contribution de l'effort tranchant est donc toujours négligeable, ce qui est normal dans le cas d'une poutre élancée. La flèche est sensible pour une poutre de longueur 4 m ($l = 2$ m), et tout à fait impressionnante pour une portée entre appuis de 8 m.

9. On suppose maintenant que la poutre est en béton. Ce matériau ne supportant pas les contraintes de traction, on le met en compression (technique du béton précontraint) en insérant dans la partie inférieure de la poutre des cables en acier que l'on met en tension (figure 1.c). On veut évaluer les modifications apportées à l'état de contrainte. Pour cela, on ne considère plus l'effet du poids propre de la poutre, que l'on pourra rajouter par superposition, mais seulement celui de la force F appliquée par le cable, au point $x_3 = -h$ de la section. On néglige la variation de

section du béton liée au passage des cables. Donner la nouvelle expression du profil de contrainte dans la section. A quelle condition le béton est-il totalement en compression ?

Dans ces conditions, l'effort normal est égal à $-F$ et le moment de flexion autour de x_2 est égal à Fh . La contrainte σ_{11} est alors obtenue en combinant l'effet de l'effort normal et du moment de flexion :

$$\sigma_{11} = -\frac{F}{S} + \frac{Fhx_3}{I}$$

La plus grande valeur est obtenue en surface, soit pour $x_3 = h$, en négligeant e devant h . Le béton est totalement en compression pour une valeur de h telle que :

$$-\frac{F}{S} + \frac{Fh^2}{I} < 0 \quad \text{soit } h < \left(\frac{I}{S}\right)^{1/2}$$

10. Calculer successivement la rotation des sections et la flèche de la poutre. Comparer le degré des polynômes obtenus dans ce cas et en question 6. Quelle est la valeur de la flèche au centre ? Pourrait-on trouver une valeur de F qui annule la flèche au centre, si on prend de nouveau en compte le poids propre ?

La rotation des sections s'obtient en intégrant la quantité M/EI et en tenant compte des conditions aux limites aux extrémités de la poutre. On obtient successivement :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx_1} &= Fh & \theta &= \frac{Fh}{EI}(x_1 - l) \\ \frac{dV}{dx_1} &= -\theta & V &= \frac{Fh}{EI} \left(lx_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) \end{aligned}$$

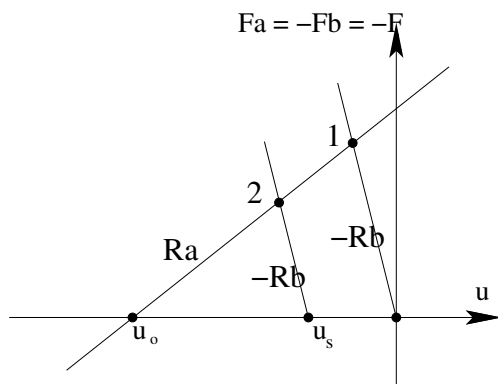
Cette flèche est maximale au centre de la poutre et égale à $Fhl^2/2EI$. Le polynôme obtenu est de degré 2 alors qu'il était de degré 4 à la question 6. En comparant la valeur obtenue avec la flèche de la question 6, on observe

(en négligeant l'effet de l'effort tranchant) que la flèche totale s'annule en choisissant une valeur de F telle que :

$$F = -\frac{5ql^2}{12h}$$

Cette flèche ne peut être nulle sur toute la poutre puisque les degrés des polynômes définissant l'expression des flèches ne sont pas les mêmes.

11. Au cours du séchage, le béton se rétracte. On supposera ici simplement que ceci se manifeste par une variation $\Delta\varepsilon_s$ selon chaque composante diagonale du tenseur de déformation. En déduire la variation du profil de contrainte σ_{11} . Montrer que cela fait chuter la force de précontrainte, et indiquer quelle est la nouvelle valeur de la flèche.



La figure ci-dessus montre le fonctionnement du système de mise en précontrainte dans un diagramme déplacement-force. Les câbles d'acier ont une dimension au repos qui est plus courte par rapport à la structure béton. La différence de longueur est notée u_0 . Le zéro de l'axe des abscisses correspond à l'état initial du béton, si bien que l'état initial de l'acier est à l'abscisse u_0 . On reporte en ordonnée la force dans l'acier, F_a , qui est en traction pendant la mise en charge, et opposée à la force dans le béton, $F_b = F$. La mise en charge de l'acier est donc représentée par le segment de

droite qui part du point $(u_0, 0)$ et qui rejoint le point (1), tandis que celle du béton joint l'origine à ce même point (1). La force qui sera obtenue vaut :

$$F = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} u_0$$

Si le béton se rétracte, son nouvel état neutre dans ce même diagramme sera $(u_s, 0)$. Le même raisonnement que précédemment conduit donc au point de fonctionnement (2), si bien que la chute de précontrainte, ΔF , vaut :

$$\Delta F = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} u_s$$

La valeur de u_s est simplement égale à $l\Delta\varepsilon_s$. En notant respectivement par S_a et S_b les sections de l'acier et du béton, puis E_a et E_b leur module de Young, on peut exprimer les raideurs, $R_i = E_i S_i / l$ ($i = a, b$), si bien que la formule précédente devient :

$$\Delta F = \frac{E_a E_b S_a S_b}{E_a S_a + E_b S_b} \Delta\varepsilon_s$$

Comme la section du béton est bien plus grande que celle de l'acier, on peut approcher la chute de force de précontrainte par :

$$\Delta F = E_a S_a \Delta\varepsilon_s$$

Cette valeur de ΔF permet de déterminer la variation de la flèche. La variation de précontrainte selon σ_{11} correspondante sur le béton est quant à elle :

$$\Delta\sigma_{11} = E_a \Delta\varepsilon_s \frac{S_a}{S_b}$$

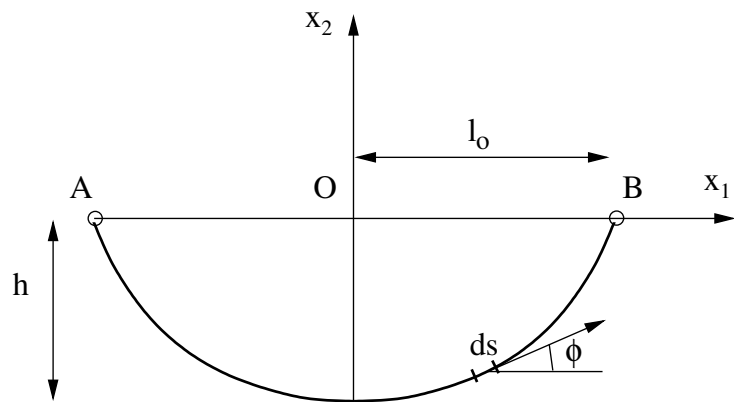
2 Problème : Cylindre en torsion

Voir la solution en 1997 !

ENSMP 1ère année, Mécanique des matériaux solides, 06 juin 2005

Tous les documents sont autorisés.

Problème mécanique d'un fil pesant



On considère un fil pesant de longueur $2L_0$ dont la masse par unité de longueur est ρ . Le fil est suspendu entre les points A et B de distance $2l_0$. On recherche la forme du fil quand il n'est soumis qu'à son propre poids. Le seul effort dans le fil est la traction T .

1. Etablir l'équation d'équilibre pour un élément ds du fil. En tirer la relation entre s et α .

L'équilibre d'un élément du fil s'écrit :

$$\rho ds \vec{g} + d\vec{T} = 0$$

On obtient ainsi :

$$T \cos \alpha = H \quad T \sin \alpha = \rho g s + V$$

où H et V représentent les réactions transversale et verticale aux appuis A et B. On obtient la relation entre s et α :

$$\tan \alpha = \frac{\rho g}{H} s + \frac{V}{H} \quad ds = \frac{H d\alpha}{\rho g \cos^2 \alpha}$$

2. En calculant x et y en fonction de α , montrer que la forme du fil vérifie l'équation :

$$y = ach \frac{x}{a} + y_0$$

où a et y_0 sont des constantes que l'on calculera.

En posant $a = \frac{H}{\rho g}$, il vient :

$$dx = ds \cos \alpha \quad dy = ds \sin \alpha$$

donc :

$$x = a \ln \left| \tan \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right| \quad y = \frac{a}{\cos \alpha} + y_0$$

On obtient finalement la forme du fil :

$$y = ach \frac{x}{a} + y_0$$

3. Construire sans la résoudre l'équation qui permet de trouver a en fonction de la longueur L_0 du fil. En déduire la flèche maximale y_m et la valeur de y_0 .

On a :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + dy^2/dx^2} = ch\left(\frac{x}{a}\right)dx$$

On trouve donc :

$$L_o = \int_0^{l_o} ch\left(\frac{x}{a}\right)dx = ash\left(\frac{l_o}{a}\right)$$

Cette dernière équation n'a pas de solution analytique, mais, pour chaque valeur de l_o et L_o , on peut trouver numériquement la valeur de a . On obtient ensuite :

$$y_o = -ach\frac{l_o}{a} \quad y_m = a\left(1 - ch\frac{l_o}{a}\right)$$

4. On suppose que l'allongement du fil est très petit, qu'il ne fait pas changer la valeur a trouvée dans la question précédente, et que le fil travaille toujours en élasticité. Calculer l'allongement ΔL du fil, en supposant que l'on a la valeur de a trouvée de la question précédente.

On calcule d'abord les réactions aux appuis :

$$H = \rho ga \quad V = \rho gL_o$$

L'effort normal dans le fil est alors :

$$T = \rho g \sqrt{a^2 + (s - L_o)^2}$$

L'allongement du fil est :

$$\Delta L = 2 \int_0^{L_o} \frac{T}{ES} ds = 2 \frac{\rho g}{ES} \int_0^{L_o} \sqrt{a^2 + (s - L_o)^2} ds$$

$$\Delta L = \frac{\rho g}{ES} \left(L_o \sqrt{a^2 + L_o^2} + a^2 \ln \frac{a}{\sqrt{a^2 + L_o^2} - L_o} \right)$$

5. Application numérique pour : $l_o = 1m$, $L_o = 1.5m$, $m = \rho/S = 7872kg/m^3$, $E = 200GPa$, $g = 9,8$.

On obtient :

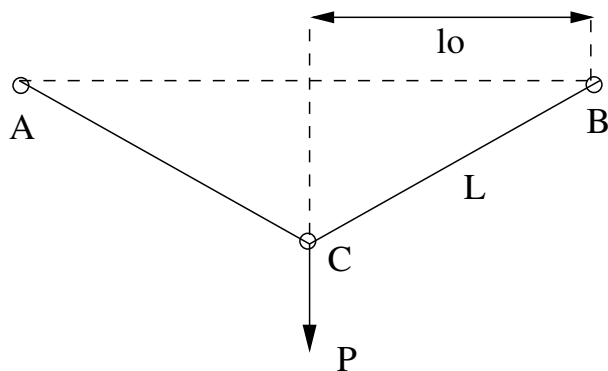
$$a = 0.616m$$

$$y_m = -0.62m$$

$$\Delta L = 0.59mm$$

:

Allongement mécanique et thermique d'un fil



On considère un système de deux fils (AC et BC) sur lequel est appliquée une charge P au point C. L'effet du poids propre est négligé. On chauffe l'ensemble depuis la température initiale T_0 jusqu'à la température finale T_{max} , puis on refroidit de nouveau à la température T_0 . Un changement de phase se produit lors du chargement, et la transformation inverse lors de la décharge. La déformation de changement de phase a la forme :

$$\tilde{\epsilon}^{cp} = \delta \tilde{z} I$$

La variable z est fonction de la température T , lors du chauffage :

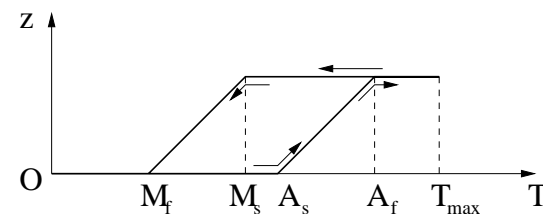
$$z = 0 \quad \text{si} \quad T < A_s$$

$$z = T \quad \text{si} \quad A_s \leq T \leq A_f$$

et lors du refroidissement :

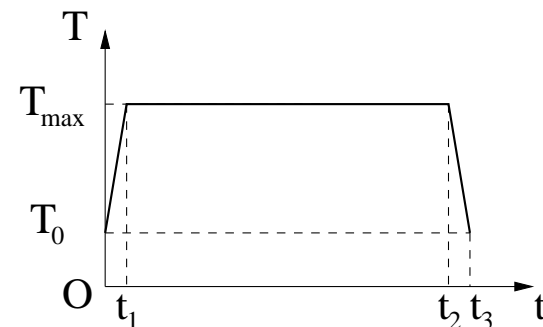
$$z = A_f + M_s - T \quad \text{si} \quad M_f \leq T \leq M_s$$

$$z = 0 \quad \text{si} \quad T < M_f$$



Le trajet de température se compose de trois phases (comme le montre la figure ci-dessous) :

- le chauffage de T_0 à T_{max} linéairement selon le temps, de $t = 0$ à $t = t_1$;
- le maintien à température $T = T_{max}$ entre $t = t_1$ à $t = t_2$;
- le refroidissement de T_{max} à T_0 , linéairement en fonction du temps, de $t = t_2$ à $t = t_3$;



Pendant le chauffage et le refroidissement, on considère qu'il n'y a pas de déformation plastique. La déformation plastique se produit lors du maintien de la température à T_{max} :

$$\dot{\epsilon}^p = \left(\frac{\sigma}{K(T_{max})} \right)^n$$

1. On examine tout d'abord le problème mécanique simple, lorsque le fil n'est pas encore chauffé. A l'état initial, chaque fil est de longueur L_0 .

Sous l'effet du P , les fils s'allongent de $\Delta L = L - L_o$. Calculer les efforts normaux ainsi que la contrainte σ^e et la déformation ε^e existant dans le fil en fonction de L . Calculer l'allongement ΔL du fil selon L . Etablir sans la résoudre l'équation qui permet de calculer L .

L'effort normal dans le fil est :

$$T = \frac{PL}{2\sqrt{L^2 - l_o^2}}$$

La contrainte élastique est donc :

$$\sigma^e = \frac{T}{S} = \frac{PL}{2S\sqrt{L^2 - l_o^2}}$$

La déformation élastique :

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma^e}{E} = \frac{PL}{2ES\sqrt{L^2 - l_o^2}}$$

On a donc l'équation pour calculer L :

$$L = L_o \left(1 + \frac{PL}{2ES\sqrt{L^2 - l_o^2}} \right)$$

L'allongement est donc :

$$\Delta L = L_o \frac{\sigma^e}{E}$$

2. Dans les questions suivantes, on considère que L , ε^e et σ^e sont connus. On suppose alors que le fil subit une déformation libre supplémentaire ε . Montrer que, si ε reste faible ($\varepsilon < 0.02$) et si le rapport L/l_o est assez grand ($L/l_o > \sqrt{2}$), la variation de la contrainte dans le fil est négligeable.

Si le fil subit une déformation ε , la longueur du fil est :

$$L' = L(1 + \varepsilon)$$

La contrainte dans le fil est donc :

$$\sigma^e = \frac{PL(1 + \varepsilon)}{2S\sqrt{L^2(1 + \varepsilon)^2 - l_o^2}}$$

Avec $L/l_o = \sqrt{2}$ et $\varepsilon = 0.02$, on trouve :

$$\Delta\sigma^e = \frac{PL(1 + \varepsilon)}{2S\sqrt{L^2(1 + \varepsilon)^2 - l_o^2}} - \frac{PL}{2S\sqrt{L^2 - l_o^2}}$$

$$\frac{\Delta\sigma^e}{\sigma^e} = -0.0188$$

On peut donc considérer la contrainte constante.

3. On considère que $L/l_o > \sqrt{2}$. Ecrire la loi de comportement. Calculer la déformation totale puis l'allongement du fil à la fin du chargement de T_o à T_{max} .

Dans la première étape, il n'y a pas de déformation plastique. On a :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^{th} + \dot{\varepsilon}^{cp}$$

De T_o à A_s :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{th} = \alpha \dot{T}$$

$$\varepsilon_{A_s} = \frac{PL}{2ES\sqrt{L^2 - l_o^2}} + \alpha(A_s - T_o)$$

De A_s à A_f :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{th} + \dot{\varepsilon}^{cp} = \alpha \dot{T} + \delta \dot{z}$$

$$\varepsilon_{A_f} = \frac{PL}{2ES\sqrt{L^2 - l_o^2}} + \alpha(A_f - T_o) + \delta(A_f - A_s) \frac{PL}{2S\sqrt{L^2 - l_o^2}}$$

De A_f à T_{max} :

$$\varepsilon_s = \frac{PL}{2ES\sqrt{L^2 - l_o^2}} + \alpha(T_{max} - T_o) + \delta(A_f - A_s) \frac{PL}{2S\sqrt{L^2 - l_o^2}}$$

L'allongement du fil est donc :

$$\Delta L = L \left(\frac{PL}{2ES\sqrt{L^2 - l_o^2}} + \alpha(T_{max} - T_o) + \delta(A_f - A_s) \frac{PL}{2S\sqrt{L^2 - l_o^2}} \right)$$

4. Calculer la déformation totale puis déduire l'allongement du fil à la fin de la maintenance de $T = T_{max}$.

Dans cette deuxième étape, on a seulement la déformation plastique :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^p$$

$$\epsilon_f - \epsilon_s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\sigma}{K} \right)^n dt$$

$$\epsilon_f = \epsilon_s + \left(\frac{\sigma^e}{K} \right)^n (t_2 - t_1)$$

5. Calculer la déformation totale puis déduire l'allongement du fil à la fin de la décharge de T_{max} à T_o .

Allongement de transformation de phase d'un fil

On considère le même système et les résultats des questions 1 et 2 de l'exercice précédent. A la fin du refroidissement, le matériau subit un changement de phase. On suppose que la transformation produit une déformation de transformation telle que :

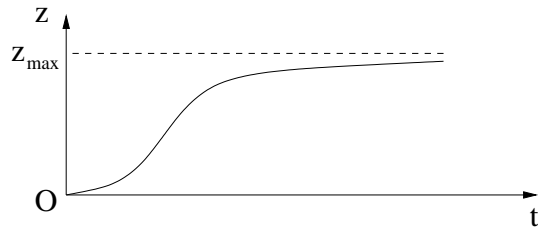
$$\dot{\epsilon}^{pt} = \frac{3}{2}\beta(1-z)\dot{z}s$$

et une déformation de changement de phase :

$$\dot{\epsilon}^{cp} = \delta\dot{z}l$$

dont la variable z est en fonction du temps t , telle que :

$$z = z_{max}(1 - \exp(-(t^*/\tau)^n))$$



On note par ϵ^{tot} la déformation totale finale de l'exercice précédent.

On rappelle que :

$$l = \text{trace} \underline{\underline{\sigma}} \cdot l$$

$$s = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{trace} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{1}}$$

crire la loi de comportement qui représente la vitesse de déformation totale selon vitesse de déformation de changement de phase et vitesse de déformation de transformation. Calculer la déformation du fil en fonction du temps.

On a :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{pt} + \dot{\epsilon}^{cp}$$

$$\dot{\epsilon} = (\delta + \beta(1-z))\dot{z}\sigma$$

$$\epsilon = \epsilon^{tot} + \int_{z_{max}}^{z(t)} \sigma(\delta + \beta(1-z)) dz$$

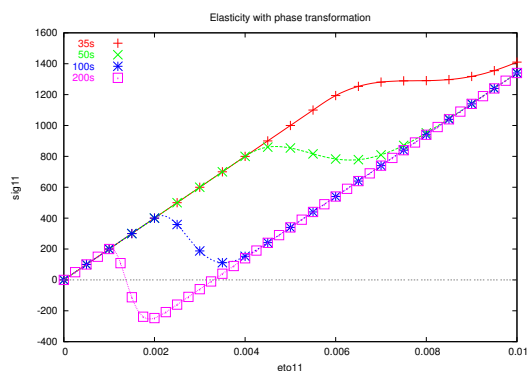
$$\epsilon = \epsilon^{tot} + \sigma(\delta z + \beta z - \beta \frac{z^2}{2}) \Big|_{z_{max}}^{z(t)}$$

L'allongement final est donc :

$$\Delta L = L_0 \epsilon$$

Conséquences mécaniques des transformations de phase

On a réalisé la simulation numérique de quatre essais de traction pendant lesquels se produit un changement de phase. Dans la mesure où vous avez peu de temps pour résoudre cet exercice, on a supposé que le comportement est simplement élastique, ce qui n'est pas très réaliste d'un point de vue physique, mais pragmatique pour l'examen. On suppose que la transformation obéit à une loi de Johnson–Mehl–Avrami. Le but est d'expliquer quantitativement les phénomènes observés.



Les essais sont réalisés en vitesse de déformation imposée, et en isotherme, de façon à atteindre une déformation de 1% en un temps t_f , qui prend respectivement les valeurs 35, 50, 100 et 200s. Le modèle de la transformation comporte une première partie, de germination, pendant laquelle il n'y a aucun effet apparent au niveau macroscopique, et qui, à une température T dure un temps $\tau_g(T)$. Le changement de phase lui-même débute donc lorsque cette période est achevée ; l'apparition de la nouvelle phase est quantifiée par une variable z , variant de 0 à z_{max} , selon l'équation suivante, pour une température donnée (t est le temps depuis le début de l'expérience, et $t^* = t - \tau_g$) :

$$z = z_{max}(1 - \exp(-(t^*/\tau)^n))$$

L'effet mécanique est réduit à une augmentation de volume, proportionnelle à z , de composantes δz sur la diagonale du tenseur de dilatation.

Les calculs ont été effectués avec les valeurs suivantes des coefficients matériau (où E désigne le module de Young) :

E	δ	τ_g	n	τ	z_{max}
200000	0.0033	20	2	10	1

1. Dire quelles sont les unités des différents coefficients

E est en MPa, τ et τ_g sont en secondes, les autres coefficients sont sans unité.

2. On note respectivement σ et ε la contrainte et la déformation totale dans la direction de traction. Ecrire la loi de comportement qui relie σ , ε et z . Caractériser le décalage entre les deux droites de la figure précédente.

La déformation totale est la somme de la dilatation de changement de phase et de la déformation élastique, soit $\varepsilon = \delta z + \sigma/E$. Les deux droites de la figure sont décalées horizontalement d'une quantité δ .

3. Exprimer la vitesse de changement de phase \dot{z} pendant la période de croissance ($t > \tau_g$).

La dérivation de l'expression de z fournit :

$$\dot{z} = \frac{n}{\tau}(z_m - z) \left[-\ln \left(1 - \frac{z}{z_m} \right) \right]^{(n-1)/n}$$

4. Quelle est la condition sur t_f pour que l'effet de la transformation soit invisible pendant l'essai ?

Il suffit bien entendu que l'essai soit terminé avant la fin de la germination, soit $t_f < \tau_g$

5. *Quelle est la condition sur t_f pour que la courbe de traction soit toujours croissante ?*

Il faut s'assurer que la vitesse de contrainte reste toujours positive. Pour cela, il suffit que, pour tout z , $\dot{\epsilon} - \delta \dot{z} > 0$. L'expression de la dérivée de z est

donnée en question 2 ; la vitesse de déformation totale est égale à $0,01/t_f$.

6. *Quelle est la condition sur t_f pour que la contrainte passe par des valeurs négatives au cours de l'essai ?*

Il faut vérifier que, lorsque la vitesse de contrainte s'annule, la contrainte est exactement égale à 0. Ceci fournit une borne supérieure pour t_f .

ENSMP 1ère année, Mécanique des matériaux solides, 9 juin 2006

Problème A

Partie A.1 Elasticité linéaire Les relations de l'élasticité linéaire isotrope peuvent s'écrire comme deux relations de proportionnalité, respectivement entre les parties sphériques et les déviateurs des tenseurs des contraintes et de déformations.

$$\sigma_{ll} = 3\kappa \varepsilon_{ll} \quad s_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad (\text{ou } s = 2\mu e) \quad (1)$$

1. Exprimer le tenseur d'élasticité $\underline{\underline{\Lambda}}$ (tel que $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction de κ et μ , et des tenseurs $\underline{\underline{K}}$ et $\underline{\underline{J}}$ tels que

$$\underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{3} \varepsilon_{ll} \underline{\underline{I}} \quad \underline{\underline{J}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = e \quad (2)$$

où $\underline{\underline{I}}$ est le tenseur unité du second ordre.

Les composantes du tenseur des contraintes s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ij} = 2\mu e_{ij} + \kappa \varepsilon_{ll} \delta_{ij}$$

Par conséquent :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (2\mu \underline{\underline{J}} + 3\kappa \underline{\underline{K}}) : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

2. Donner les expressions des composantes des tenseurs $\underline{\underline{K}}$ et $\underline{\underline{J}}$, notées respectivement K_{ijkl} et J_{ijkl} .

Les composantes des tenseurs $\underline{\underline{K}}$ et $\underline{\underline{J}}$ sont :

$$K_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}$$

$$J_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} = I_{ijkl} - K_{ijkl}$$

3. Donner les valeurs numériques des invariants K_{iijj} , K_{ijij} , J_{iijj} , J_{ijij} . Les relations de la question précédente permettent d'établir :

$$K_{iijj} = 3 \quad K_{ijij} = 1 \quad J_{iijj} = 5 \quad J_{ijij} = 0$$

Partie A.2 Homogénéisation On veut maintenant utiliser les résultats de la partie précédente pour trouver les propriétés homogènes équivalentes d'un matériau constitué de fibres orientées de façon aléatoire, la probabilité de présence étant uniforme pour toutes les directions de l'espace. Chaque fibre est définie par sa direction \underline{n}^f et son module d'élasticité E_f . On suppose que le comportement de ces fibres est uniaxial, si bien que, pour une fibre de direction \underline{n}^f , les tenseurs de contraintes, $\underline{\underline{\sigma}}^f$ et de déformation, $\underline{\underline{\varepsilon}}^f$ s'expriment simplement :

$$\underline{\underline{\sigma}}^f = \sigma^f \underline{n}^f \otimes \underline{n}^f \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^f = \varepsilon^f \underline{n}^f \otimes \underline{n}^f \quad (3)$$

avec $\sigma^f = E_f \varepsilon^f$.

On note $\underline{\underline{\Lambda}}^f$ le tenseur d'élasticité de la fibre f :

$$\underline{\underline{\sigma}}^f = \underline{\underline{\Lambda}}^f : \underline{\underline{\varepsilon}}^f \quad (4)$$

La fraction volumique de fibres est f . On applique sur l'assemblage une déformation homogène aux frontières, représentée par le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$. On se propose d'évaluer le tenseur du milieu homogène équivalent $\underline{\underline{\Lambda}}$.

4. Montrer que $\underline{\underline{\Lambda}}^f$ se met sous la forme $\underline{\underline{\Lambda}}^f = E_f \underline{n}^f \otimes \underline{n}^f \otimes \underline{n}^f \otimes \underline{n}^f$.

On va vérifier que la forme suggérée pour le tenseur $\underline{\underline{\Lambda}}^f$ convient. Sous forme indicielle, on a :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= E_f n_i^f n_j^f n_k^f n_l^f \varepsilon_{kl} \\ &= E_f n_i^f n_j^f n_k^f n_l^f \varepsilon^f n_k^f n_l^f \\ &= \sigma^f n_i^f n_j^f\end{aligned}$$

qui correspond à la forme du tenseur donné.

5. Justifier l'expression suivante, dans laquelle $\langle . \rangle$ représente l'opération de moyenne :

$$\underline{\underline{\Lambda}} = f \langle \underline{\underline{\Lambda}}^f \rangle$$

On effectue l'opération de moyenne sur le volume des fibres. Le terme multiplicatif f vient ensuite du rapport entre le volume de matière et celui de l'élément de volume total.

6. On obtiendra facilement $\langle \underline{\underline{\Lambda}}^f \rangle$ si on connaît $\langle \underline{n}^f \otimes \underline{n}^f \otimes \underline{n}^f \otimes \underline{n}^f \rangle$. Comme la distribution des orientations est aléatoire, ce dernier tenseur est nécessairement un tenseur isotrope, que l'on pourra identifier à celui qui a été trouvé à la question 1, avec des valeurs de μ et κ à identifier. Déterminer ces deux valeurs en calculant les deux invariants $\langle n_i n_j n_i n_j \rangle$ et $\langle n_i n_j n_i n_j \rangle$.

On calcule les invariants Λ_{iijj} et Λ_{ijij} :

$$\begin{aligned}\Lambda_{iijj} &= 2\mu J_{iijj} + 3\kappa K_{iijj} = 9\kappa = f \langle n_i n_i n_j n_j \rangle = f \\ \Lambda_{ijij} &= 2\mu J_{ijij} + 3\kappa K_{ijij} = 10\mu + 3\kappa = f \langle n_i n_i n_j n_j \rangle = f\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\kappa = \frac{fE_f}{9} \quad \mu = \frac{fE_f}{15}$$

8. Calculer enfin le module de Young et le coefficient de Poisson du milieu homogène équivalent en utilisant les expressions :

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{3\mu} + \frac{1}{9\kappa} \quad \nu = \frac{3\kappa - 2\mu}{6\kappa + 2\mu} \quad (5)$$

Le module de Young vaut donc $E = fE_f/6$. Le coefficient de Poisson est indépendant de f et de E_f , il vaut 0,25.

Problème B

En plasticité cristalline, le glissement cristallographique est un mécanisme élémentaire produisant de la déformation plastique par translation de réseau atomique selon certains plans, dits plan de glissement, selon certaines directions, les directions de glissement. Un système de glissement s est ainsi caractérisé par le couple $(\underline{n}^s, \underline{m}^s)$, le premier vecteur déterminant le plan de glissement, le second la direction de glissement. On va dans un premier temps étudier la forme de la déformation plastique ou viscoplastique attachée à un système de glissement, puis on cherchera à caractériser le fluage d'un monocristal de glace. Dans l'un et l'autre cas, on se place dans le formalisme des petites perturbations.

1. On suppose qu'un système de glissement s reste dans son domaine élastique si la valeur absolue de la cission τ^s sur ce système reste inférieure à une certaine valeur critique τ_c :

$$f^s(\tau^s) = |\tau^s| - \tau_c \quad (6)$$

avec $\tau^s = \underline{\sigma} : \underline{\tilde{m}}^s$ et $m_{ij}^s = \frac{1}{2}(n_i^s m_j^s + n_j^s m_i^s)$.

Comparer τ^s avec le cisaillement en direction $\underline{\tilde{m}}^s$ dans la facette de normale \underline{n}^s .

La cission τ^s correspond au cisaillement en direction $\underline{\tilde{m}}^s$ dans la facette de normale \underline{n}^s .

2. En reprenant le formalisme développé dans le cours de plasticité indépendante du temps classique, indiquer quelles sont maintenant les conditions correspondant au domaine d'élasticité, à la décharge élastique et à l'écoulement plastique. Donner l'expression géométrique de $\underline{\xi}^p$ en introduisant un multiplicateur plastique.

Le domaine élastique est caractérisé par $f^s < 0$, la décharge élastique par $f^s = 0$ et $\dot{f}^s < 0$, l'écoulement plastique par $f^s = 0$ et $\dot{f}^s = 0$. L'expression de $\underline{\xi}^p$ est donnée par

$$\underline{\xi}^p = \dot{\lambda}^s \frac{\partial f^s}{\partial \underline{\sigma}}$$

où $\dot{\lambda}^s$ est un multiplicateur plastique.

3. Dans toute la suite, on travaillera en viscoplasticité, en postulant l'expression suivante pour le potentiel viscoplastique du système s :

$$\Omega(\tau^s) = \frac{K}{n+1} \left\langle \frac{f^s}{K} \right\rangle^{n+1}$$

où K et n sont des paramètres matériau caractérisant la viscosité et où $\langle . \rangle$ désigne la partie positive : $\langle x \rangle = \max(x, 0)$.

A quelle condition a-t-on de l'écoulement viscoplastique, et quelle est l'expression de celui-ci ?

L'écoulement viscoplastique a lieu lorsque $f^s > 0$. L'expression de l'écoulement est obtenue en utilisant la relation $\partial \Omega / \partial \underline{\sigma}$. On obtient ainsi :

$$\underline{\xi}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial f^s} \frac{\partial f^s}{\partial \underline{\sigma}} = \left\langle \frac{f^s}{K} \right\rangle^n \frac{\partial f^s}{\partial \underline{\sigma}}$$

Comme

$$f^s = |\tau^s| - \tau_c = |\underline{\tilde{m}}^s : \underline{\sigma}| - \tau_c$$

Il vient :

$$\underline{\xi}^p = \left\langle \frac{f^s}{K} \right\rangle^n \underline{\tilde{m}}^s \text{signe}(\tau^s)$$

4. Montrer que le mécanisme étudié représente bien un écoulement plastique ou viscoplastique sans variation de volume.

Le mécanisme étudié s'effectue bien sans variation de volume puisque $\text{trace}(\underline{\xi}^p) = 0$, car $\text{trace}(\underline{\tilde{m}}^s) = 0$

5. On définit un système de glissement dans le repère du cristal (X_1, X_2, X_3) par :

$$\underline{n}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{m}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer l'expression du tenseur $\underline{\tilde{m}}^0$ dans le même repère. Calculer τ^0 pour un tenseur appliqué $\underline{\sigma}$.

Le tenseur $\underline{\tilde{m}}^0$ se calcule grâce à la relation $m_{ij}^s = \frac{1}{2}(n_i^s m_j^s + n_j^s m_i^s)$. On obtient :

$$\underline{\tilde{m}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La cission τ^0 se déduit de la relation $\tau^0 = \underline{\sigma} : \underline{\tilde{m}}^0$ et est égal à σ_{13} .

6. Tracer la forme de la surface de charge dans le plan $(\sigma_{13} - \sigma_{23})$, le tenseur des contraintes étant exprimé dans le repère (X_1, X_2, X_3) .

La surface de charge s'écrit $f^s(\tau^s) = |\sigma_{13}| - \tau_c$. Par conséquent, sa forme dans le plan $(\sigma_{13} - \sigma_{23})$ est constituée par deux droites d'équations $\sigma_{13} = \pm \tau_c$.

7. La glace est un matériau de structure hexagonale compacte qui glisse selon trois systèmes dans le plan (X_1, X_2) , appelé plan de base. Outre le système s_0 présenté en question 5, on observe les systèmes s_1 et s_2 tels que :

$$\underline{n}^1 = \underline{n}^2 = \underline{n}^0 \quad \underline{m}^1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{m}^2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les directions de glissement font un angle $(s.\pi/3)$ avec le premier axe cristallographique X_1 ($s=0,1,2$). Calculer \underline{m}_2 et \underline{m}_3 dans le repère cristallographique.

Dans le repère cristallographique, on a :

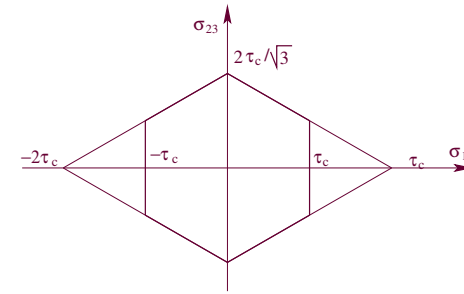
$$\underline{m}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ 1/4 & \sqrt{3}/4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{m}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ -1/4 & \sqrt{3}/4 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Donner la forme de la surface de charge, formée par les 3 systèmes, dans le plan $(\sigma_{13} - \sigma_{23})$.

La surface de charge est définie par les trois fonctions de charges f^s , définies pour $s = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} f^0(\tau^s) &= |\sigma_{13}| - \tau_c \\ f^1(\tau^s) &= |\sigma_{13}/2 + \sqrt{3}\sigma_{23}/2| - \tau_c \\ f^2(\tau^s) &= |-\sigma_{13}/2 + \sqrt{3}\sigma_{23}/2| - \tau_c \end{aligned}$$

Par conséquent, la forme de la surface de charge susceptible d'activer les 3 systèmes est la suivante :



Surface de charge pour les trois systèmes

9. On fabrique un cylindre de glace de section circulaire de rayon R , formé d'un seul monocristal, l'axe du cylindre étant confondu avec X_3 , et le repère de charge étant confondu avec le repère cristallographique. On soumet ce cylindre à une torsion autour de X_3 . On admet que l'état de contraintes est indépendant de X_3 . On repère un point M de la section circulaire en coordonnées polaires, par un couple (r, φ) , l'angle φ étant nul sur l'axe X_1 . Dans ce cas, les seuls termes non nuls du tenseur des contraintes sont :

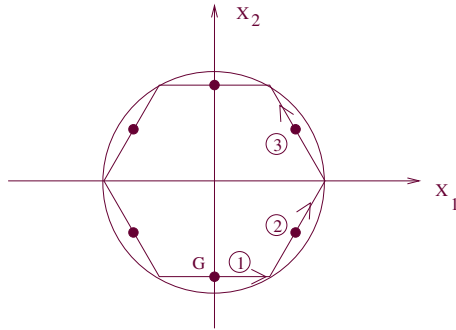
$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = -T \sin \varphi \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = T \cos \varphi$$

où T désigne l'intensité du cisaillement, qui est proportionnelle à r et à l'angle de torsion en élasticité. On considère alors les écoulements viscoplastiques à la sortie du domaine d'élasticité, en négligeant les éventuelles redistributions de contraintes liées à l'écoulement viscoplastique.

En traitant par exemple le cas du système s_0 , dire quels sont les endroits de la section où commence le glissement lorsqu'on augmente progressivement T ? Exprimer T en fonction de τ_c à cet instant.

On considère le cas du système s_0 . Le critère ne fait intervenir que la composante σ_{31} du tenseur, et le seuil est atteint lorsque $\tau_c = |T \sin \varphi|$. Les points les plus critiques sont donc ceux pour lesquels le sinus vaut ± 1 . Par conséquent, le glissement apparaît au niveau du rayon extérieur du cylindre,

au point G tel que $\varphi = -\pi/2$ et au point diamétralement opposé. Par raison de symétrie, on trouve finalement que l'écoulement viscoplastique apparaît en six points de la circonférence, qui sont distribués tous les 60 degrés, comme l'indique la figure suivante. Le seuil est atteint dès que $T = \tau_c$.



Structure de la glace : les 3 systèmes de glissement

10. Si on utilise une valeur T_0 de T plus grande que la valeur de la question précédente, calculer en fonction de T et de τ_c l'élargissement de la zone plastique.

La taille de la zone plastique est caractérisée par un angle β , tel que la cission critique τ_c soit atteinte en bord de zone. En considérant par exemple le système de glissement s_0 , la condition s'écrit :

$$T_0 \sin(\beta) = \tau_c \quad \text{soit} \quad \beta = \arcsin\left(\frac{\tau_c}{T_0}\right)$$

L'étendue de la zone plastique est donnée par l'angle $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

11. En déduire les conditions sur T pour qu'il y ait, en chaque point de la circonférence du cylindre :

- au moins un système actif
- deux systèmes actifs.

Pour qu'un système soit actif, il suffit que les zones plastiques se rejoignent, ce qui est réalisé lorsque l'angle α est égal à $\pi/6$, soit $\beta = \pi/3$. Ceci correspond à une valeur du cisaillement T_1 de $T_1 = 2\tau_c/\sqrt{3}$.

Pour obtenir partout deux systèmes actifs, l'angle α doit être égal à $\pi/3$, soit $\beta = \pi/6$, ce qui correspond à une valeur $T_2 = 2\tau_c$.

12. En considérant l'état de contrainte au point caractérisé par φ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -T \sin \varphi \\ 0 & 0 & T \cos \varphi \\ -T \sin \varphi & T \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer successivement, pour chaque système s_0, s_1, s_2 :

- les cissions τ_0, τ_1, τ_2
- les vitesses de glissement $\dot{v}_0, \dot{v}_1, \dot{v}_2$
- les composantes des vitesses de déformations viscoplastiques $\dot{\epsilon}_{13}^p, \dot{\epsilon}_{23}^p$
- l'expression de la norme de la vitesse de déformation plastique $\|\dot{\epsilon}^p\| = \frac{4}{3}((\dot{\epsilon}_{13}^p)^2 + (\dot{\epsilon}_{23}^p)^2)^{1/2}$

Les cissions sont calculées à partir de la relation $\tau^s = \sigma : m^s$ ($s = 0, 1, 2$). Les vitesses de glissement v^s sont déterminées par la relation $\langle f^s/K \rangle^n \text{signe}(\tau^s - \tau_c)$. Enfin, les composantes des vitesses de déformations viscoplastiques se calculent à l'aide de la formule $\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}_0^p + \dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_2^p$.

On obtient les résultats suivants :

$$\tau^0 = T \sin \varphi \quad \tau^1 = T \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) \quad \tau^2 = T \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$v^s = \left\langle \frac{\tau^s - \tau_c}{K} \right\rangle^n \quad \text{avec} \quad s = 0, 1, 2$$

$$\dot{\epsilon}_{13}^p = \frac{1}{2} \left\langle \frac{|\tau^0| - \tau_c}{K} \right\rangle^n + \frac{1}{4} \left\langle \frac{|\tau^1| - \tau_c}{K} \right\rangle^n - \frac{1}{4} \left\langle \frac{|\tau^2| - \tau_c}{K} \right\rangle^n$$

$$\dot{\epsilon}_{23}^p = \frac{\sqrt{3}}{4} \left\langle \frac{|\tau^1| - \tau_c}{K} \right\rangle^n + \frac{\sqrt{3}}{4} \left\langle \frac{|\tau^2| - \tau_c}{K} \right\rangle^n$$

ENSMP 1ère année, Mécanique des matériaux solides, 4 juin 2007

A. Etude de modèles de fatigue

Un élément de volume de matière est sollicité en régime de fatigue à grand nombre de cycles (*High Cycle Fatigue*, ou *HCF*) lorsqu'on lui applique un chargement cyclique de faible amplitude, en général nettement en dessous de la limite d'élasticité. Dans ces conditions, des microfissures peuvent se développer en son sein. Si le chargement est suffisamment faible, ces petites fissures, dont la taille est comparable à celle de la microstructure environnante (fibres pour les matériaux composites, grains pour les matériaux métalliques), vont voir leur progression stoppée après quelques dizaines de micromètres au plus. On peut donc appliquer un très grand nombre de cycles, de l'ordre de 10^7 , sans rompre l'élément de volume. Au contraire, si l'une des fissures s'échappe et devient géométriquement significative, elle conduit à la rupture de l'élément de volume. La frontière entre les deux cas correspond à la limite de fatigue, qui est une donnée fondamentale dans la plupart des opérations de conception des pièces mécaniques. Dans la mesure où les sollicitations appliquées sont en général complexes, il faut être capable de définir cette limite de fatigue sous conditions de chargement multiaxial, donc définir un critère de fatigue. Cet exercice se propose d'étudier deux critères de fatigue, formulés respectivement par Sines (en 1955) et Crossland (en 1956).

Les deux modèles définissent une valeur de critère, f_s pour le critère de Sines, f_c pour le critère de Crossland, fonctions à valeur scalaire qui dépendent de l'historique du tenseur de contraintes sur un cycle. La limite de fatigue est atteinte dès que cette valeur dépasse zéro. On pose :

$$f_s(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \Delta J + b_s I_{moy} - \sigma_l$$

$$f_c(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} (1 - b_c) \Delta J + b_c I_{max} - \sigma_l$$

Dans ces formules, $\Delta J/2$ est une amplitude de cisaillement octaédrique, calculée en prenant le maximum de la variation de l'invariant de von Mises pour tous les couples d'instant du cycle (t_i, t_j) , I_{max} le maximum de la trace du tenseur des contraintes au cours du cycle, I_{moy} la moyenne arithmétique de la trace du même tenseur. On a donc :

$$\Delta J = \text{Max}_{t_i, t_j} J(\underline{\sigma}(t_i) - \underline{\sigma}(t_j))$$

$$J(\underline{\sigma}) = \left(\frac{3}{2} \underline{s} : \underline{s} \right)^{1/2} \quad (\text{avec } \underline{s} \text{ déviateur de } \underline{\sigma})$$

et :

$$I_{max} = \text{Max}_{t_i} I(\underline{\sigma}(t_i))$$

$$I_{moy} = \frac{1}{2} (\text{Max}_{t_i} I(\underline{\sigma}(t_i)) + \text{Min}_{t_j} I(\underline{\sigma}(t_j)))$$

Les paramètres b_s , b_c et σ_l , dépendent du matériau considéré, et doivent être identifiés en utilisant des résultats expérimentaux.

A.1. On désigne :

- par **A** un chargement alterné à contrainte imposée en traction-compression : seul le terme σ_{11} du tenseur de contraintes est non nul ; le chargement varie entre $-\sigma_{max}$ et σ_{max} ;
- par **B** un chargement répété à contrainte imposée en traction-compression : seul le terme σ_{11} du tenseur de contraintes est non nul ; le chargement varie entre 0 et σ'_{max} ;
- par **C** un chargement alterné à contrainte imposée en cisaillement : seuls les termes $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ du tenseur de contraintes sont non nuls ; le chargement varie entre $-\tau_{max}$ et τ_{max} .

Pour chacun de ces chargements, donner dans un tableau les valeurs de $\Delta J/2$, I_{moy} , I_{max} en fonction des caractéristiques du chargement, et en déduire les expressions de f_s et f_c .

	$\Delta J/2$	I_{moy}	I_{max}	f_s	f_c
A	σ_{max}	0	σ_{max}	$\sigma_{max} - \sigma_l$	$\sigma_{max} - \sigma_l$
B	$\sigma'_{max}/2$	$\sigma'_{max}/2$	σ'_{max}	$\sigma'_{max} \frac{1+b_s}{2} - \sigma_l$	$\sigma'_{max} \frac{1+b_c}{2} - \sigma_l$
C	$\tau_{max}\sqrt{3}$	0	0	$\tau_{max}\sqrt{3} - \sigma_l$	$(1-b_c)\tau_{max}\sqrt{3} - \sigma_l$

A.2. Expliquer pourquoi on ne peut pas identifier le critère de Sines avec des essais de type **A** et **C** uniquement, alors que l'opération est possible avec le critère de Crossland. Préciser le sens physique du paramètre σ_l .

Les expressions du critère de Sines en traction alternée et en cisaillement alterné ne font pas intervenir le paramètre b_s . Celui-ci ne peut donc pas être déterminé si on ne dispose que d'essais de type **A** et **C**. L'autre conséquence de cette particularité est que le rapport des limites de fatigue prévues par le critère pour **A** et **C** est fixe, et égale à $\sqrt{3}$. Si cette propriété n'est pas vérifiée par le matériau que l'on considère, le critère de Sines ne pourra pas approcher la donnée expérimentale. Au contraire, le paramètre b_c est présent dans l'expression du critère de Crossland pour **C**, ce qui permet d'étalonner totalement le critère. Les deux critères ont la même expression dans le cas **A** : le paramètre σ_l correspond à la limite de fatigue en traction/compression alternée lorsque le rapport $R = \sigma_{max}/\sigma_{min}$ vaut -1 .

A.3. On réalise des essais de type **A** et **B**, qui permettent d'obtenir expérimentalement les valeurs des contraintes maximales σ_l et σ'_l caractérisant respectivement la limite de fatigue dans chaque cas. Exprimer les paramètres b_s et b_c en fonction de σ_l et σ'_l .

On vient de voir que chacun des critères est étalonné pour redonner directement σ_l pour le cas **A**. L'utilisation de la donnée expérimentale obtenue dans le cas **B** permet d'obtenir la valeur des paramètres b_s et b_c , qui ont la même expression. On trouve ainsi pour b_s :

$$\sigma'_l \frac{1+b_s}{2} - \sigma_l = 0$$

si bien que :

$$b_s = \frac{2\sigma_l - \sigma'_l}{\sigma'_l}$$

Les critères s'expriment donc finalement :

$$f_s = \sigma'_l i \frac{\Delta J}{2} + (2\sigma_l - \sigma'_l) I_{moy} - \sigma_l \sigma'_l$$

$$f_c = 2(\sigma'_l - \sigma_l) \frac{\Delta J}{2} + (2\sigma_l - \sigma'_l) I_{max} - \sigma_l \sigma'_l$$

On retrouve le fait que les deux critères sont équivalents lorsque $2\sigma_l = \sigma'_l$, puisqu'il n'y a pas d'influence de la contrainte moyenne dans ce cas.

A.4. Calculer en fonction de σ_l et σ'_l la limite de fatigue en cisaillement alterné prévue par chacun des critères.

On a déjà vu que la valeur τ_{ls} prévue par le critère de Sines est :

$$\tau_{ls}\sqrt{3} = \sigma_l$$

Pour le critère de Sines, la valeur est reliée à la fois à σ_l et à σ'_l :

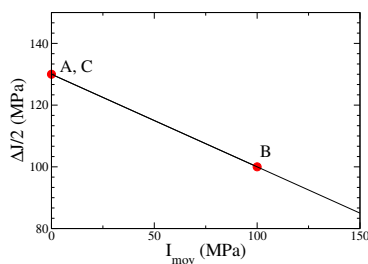
$$\tau_{lc}\sqrt{3} = \frac{\sigma_l \sigma'_l}{2(\sigma'_l - \sigma_l)}$$

A.5. On suppose que $\sigma_l = 130$ MPa, et $\sigma'_l = 200$ MPa. Tracer la frontière du critère de Sines dans un plan où l'on portera respectivement en abscisse et en ordonnée I_{moy} et $\Delta J/2$. Placer sur cette frontière les points représentatifs des chargements de type **A**, **B** et **C**.

Les valeurs précédentes conduisent à :

$$f_s = \frac{\Delta J}{2} + 0,3I_{moy} - 130$$

La courbe représentative dans le plan (I_{moy} , $\Delta J/2$) est donc une droite de pente $-0,3$ et d'ordonnée à l'origine 130 MPa, la zone "dangereuse" se situant au-dessus de cette courbe.



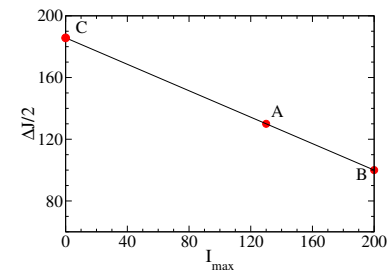
A.6. Reprendre la question précédente pour le critère de Crossland, dans le plan I_{max} - $\Delta J/2$.

Les valeurs précédentes conduisent à :

$$f_s = 0,7 \frac{\Delta J}{2} + 0,3I_{max} - 130$$

Dans le plan (I_{max} , $\Delta J/2$), la courbe de fonctionnement est donc la droite d'équation :

$$\frac{\Delta J}{2} = 185,7 - 0,4286I_{max}$$



A.7. Quelles valeurs de τ'_l en cisaillement répété (entre 0 et τ_{max}) prévoient chacun des critères ?

Aucun des deux critères ne prévoit d'influence du cisaillement moyen sur la limite de fatigue, ce qui correspond d'ailleurs aux observations expérimentales. En conséquence, l'amplitude de contrainte de cisaillement acceptable en chargement de cisaillement répété est la même que celle qui est acceptable en chargement alterné :

$$\tau'_l = 2\tau_l$$

A.8. Quelles valeurs de limite de fatigue prévoient chacun des critères en traction biaxiale, pour des chargements alternés (Σ_l), et pour des chargements répétés (Σ'_l) (les contraintes $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ variant respectivement entre $-\sigma_{max}$ et σ_{max} , ou entre 0 et σ'_{max}) ?

On calcule les valeurs de $\Delta J/2$, I_{moy} et I_{max} et on les substitue dans les expressions des critères déduites en A.3 :

	$\Delta J/2$	I_{moy}	I_{max}	Sines	Crossland
Σ_l	σ_{max}	0	$2\sigma_{max}$	σ_l	$\sigma'_l/2$
Σ'_l	$\sigma'_{max}/2$	σ'_{max}	$2\sigma'_{max}$	$\frac{2\sigma_l\sigma'_l}{4\sigma_l - \sigma'_l}$	$\frac{\sigma_l\sigma'_l}{3\sigma_l - \sigma'_l}$

L'application numérique donne alors :
 – Sines : $\Sigma_l = 130$ MPa, $\Sigma'_l = 162.50$ MPa ;
 – Crossland : $\Sigma_l = 100$ MPa, $\Sigma'_l = 136.84$ MPa.

B. Poutre soumise à son propre poids

On considère une poutre dont la section S , située dans le plan x_2x_3 , est symétrique par rapport aux axes x_2 et x_3 ; elle a pour longueur $2L$, et sa ligne neutre est confondue avec l'axe x_1 ($-L \leq x_1 \leq L$). Elle est soumise à son propre poids — on note ρ la masse volumique et $-ge_3$ l'accélération de la pesanteur, si e_3 est le vecteur unitaire de l'axe 3 — et simplement posée sur deux appuis simples, situés respectivement en $-l$ et $+l$ (avec $l < L$). On note par I le moment quadratique principal autour de x_2 et par E le module d'Young.

B.1. Caractériser l'effort extérieur réparti sur la poutre, que l'on notera p . Quelle est son unité ?

L'effort réparti sur la poutre n'est dû qu'à son poids et s'exprime en N/m. Son intensité est donnée par :

$$p = \rho g S$$

B.2. Ecrire les équations qui permettent de trouver successivement l'effort tranchant T , le moment de flexion M , l'angle de rotation des sections de la poutre θ et la flèche v , dans le cadre de la théorie de Timoshenko.

Dans le cadre de la théorie de Timoshenko, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} T_{,1} + p &= 0 & M_{,1} - T &= 0 \\ \theta_{,1} &= \frac{M}{EI} & v_{,1} &= \frac{T}{\mu S} - \theta \end{aligned}$$

B.3. Définir l'ensemble des conditions aux limites, en indiquant en particulier à quels endroits T , M , θ et V sont nuls.

La poutre étant en appui simple, l'effort tranchant T est nul à ses extrémités (en $x_1 = \pm L$). Le moment de flexion M est lui aussi nul aux extrémités ($M(-L) = M(L) = 0$) et devra être continu au niveau des appuis. L'angle de rotation θ s'annule au milieu de la poutre, au niveau de la flèche maximale $\theta(L) = 0$ et sera continu au niveau des appuis. Enfin, la flèche V sera nulle au niveau des appuis ($V(\pm l) = 0$).

B.4. Résoudre le système d'équations et donner la valeur de la flèche au centre de la poutre. Comment celle-ci varie-t-elle en fonction du rapport l/L ?

Il suffit de calculer une demi-poutre pour évaluer la flèche, de $x_1 = -L$ à $x_1 = 0$. Le calcul de l'effort tranchant donne :

$$x_1 \in [-L, -l] : T(x_1) = -p(x_1 + L)$$

$$x_1 \in [-l, 0] : T(x_1) = -px_1$$

Où l'on vérifie qu'en $x_1 = -l$ il y a une discontinuité d'amplitude pL correspondant à la réaction de l'appui. On en déduit le moment fléchissant :

$$x_1 \in [-L, -l] : M(x_1) = -p\left(\frac{x_1^2}{2} + Lx_1\right) - p\frac{L^2}{2}$$

$$x_1 \in [-l, 0] : M(x_1) = -p\frac{x_1^2}{2} + p\left(lL - \frac{L^2}{2} \right)$$

On peut ensuite intégrer l'angle de rotation θ – il suffira de l'intégrer pour $x_1 \in [-l, 0]$ pour calculer la flèche maximale :

$$x_1 \in [-l, 0] : \theta(x_1) = \frac{1}{EI} \left(-p\frac{x_1^3}{6} + px_1\left(lL - \frac{L^2}{2} \right) \right)$$

On dispose enfin de tous les éléments pour évaluer la flèche. On trouve alors :

$$x_1 \in [-l, 0] : V_1(x_1) = p\frac{(l^2 - x_1^2)}{2\mu S} + \frac{p}{EI} \left(\frac{x_1^4 - l^4}{24} - \frac{(l^2 - x_1^2)}{2} \left(lL - \frac{L^2}{2} \right) \right)$$

La constante d'intégration de cette dernière équation donne l'expression de la flèche maximum pour $x_1 = 0$, à savoir :

$$V_{max} = \frac{pl^2}{2\mu S} + \frac{p}{EI} \left(-\frac{l^4}{24} + \frac{l^2}{2} \left(lL - \frac{L^2}{2} \right) \right)$$

Selon la valeur de l , la déformée de la poutre change de convexité et donc la flèche de signe. Le point d'équilibre - flèche nulle - vaut :

$$l_0 = 6 \left(L - \sqrt{\frac{2L^2\mu S + EI}{3\mu S}} \right)$$

Si on néglige la contribution de l'effort tranchant (terme $pL^2/2\mu S$), on trouve plus simplement :

$$l_0 = 6L \left(1 - \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \approx 0.523$$

Lorsque les appuis sont rapprochés (rapport l/L s inférieur à la valeur ci-dessus), le mouvement du milieu de la poutre est dans la direction opposée à celle définie par la pesanteur.

C. Etude de l'écroissage latent

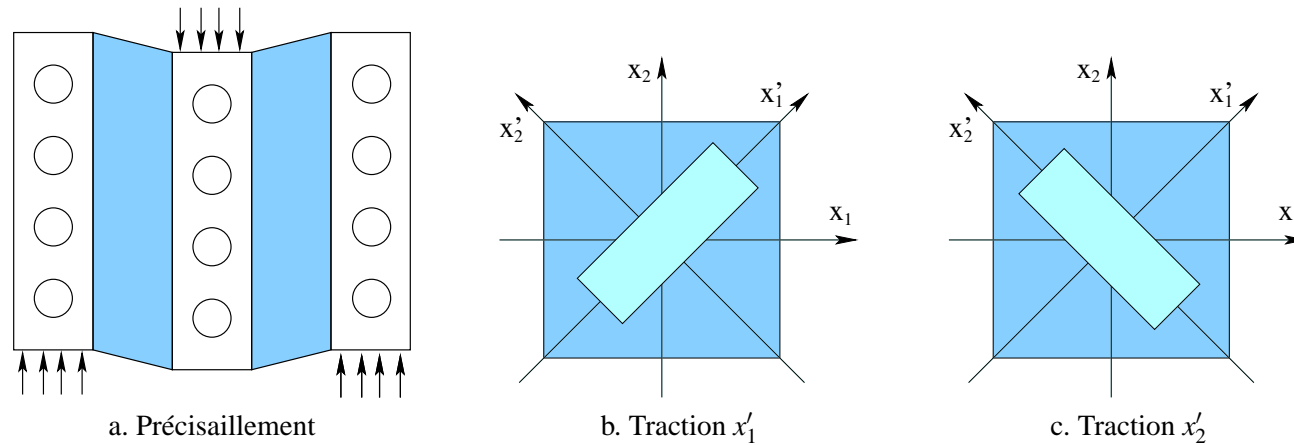


Figure 1 : Les différents chargements imposés, (a) préchargement en cisaillement sur la plaque ; (b), (c) traction sur spécimens redécoupés suivant x'_1 ou x'_2

Au cours des procédés de mise en forme, les matériaux peuvent être sollicités suivant des trajets de chargement complexes. On étudie ici l'exemple d'une procédure expérimentale où interviennent des chargements en cisaillement et traction, et qui permet de caractériser l'écroissage latent, ou écroissage produit dans un mode de chargement par un chargement antérieur. Dans le cas étudié, le chargement initial est un cisaillement, réalisé sur un montage de double cisaillement, au moyen duquel deux plaques sont sollicitées en déformation imposée monotone selon la composante 12 jusqu'à $\epsilon_{12} = \gamma_m/2$ (fig.1a), dans le repère (x_1, x_2) de vecteurs directeurs \underline{e}_1 et \underline{e}_2 . Dans ce repère, on suppose que 12 et 21 sont les seules composantes non nulles des tenseurs de déformation et de contrainte. On redécoupe ensuite de petits spécimens, respectivement selon les directions x'_1 et x'_2 , dont les vecteurs directeurs \underline{e}'_1 et \underline{e}'_2 sont tels que $(\underline{e}_1, \underline{e}'_1) = \pi/4$, et $(\underline{e}_2, \underline{e}'_2) = \pi/4$. Le but du problème est de comprendre les réponses au cours des étapes (b) et (c) du chargement, et leurs différences éventuelles. Dans l'ensemble du problème, on se place dans une hypothèse de contrainte plane, si bien que les composantes 13, 23 et 33 du tenseur de contraintes sont nulles.

Le comportement élastique est isotrope, caractérisé par le module d'Young E , le coefficient de Poisson ν , ou le module de cisaillement $\mu = E/(2(1 + \nu))$.

Le comportement plastique sera considéré successivement comme :
– isotrope linéaire, avec un critère dépendant de la variable scalaire R telle que :

$$f(\underline{\sigma}, R) = J(\underline{\sigma}) - R - \sigma_y$$

dans lequel σ_y désigne la limite d'élasticité initiale, et où R dépend linéairement de la déformation plastique cumulée p au travers du module d'écroissage H :

$$R(p) = Hp \quad \text{avec} \quad \dot{p} = \left(\frac{2}{3} \underline{\dot{\epsilon}}^p : \underline{\dot{\epsilon}}^p \right)^{1/2}$$

– cinématique linéaire, avec un critère dépendant de la variable tensorielle \tilde{X} telle que :

$$f(\tilde{\sigma}, \tilde{X}) = J(\tilde{\sigma} - \tilde{X}) - \sigma_y$$

dans lequel σ_y désigne la limite d'élasticité initiale, et où \tilde{X} dépend linéairement de la déformation plastique $\tilde{\varepsilon}^p$ au travers du module d'écrouissage H :

$$\tilde{X} = \frac{2}{3} H \tilde{\varepsilon}^p$$

Dans chaque cas, la vitesse de déformation plastique est portée par la normale au domaine d'élasticité, $\tilde{n} = \partial f / \partial \tilde{\sigma}$, et s'exprime en fonction du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ par :

$$\tilde{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \tilde{n} \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda} = \frac{\tilde{n} : \dot{\tilde{\sigma}}}{H}$$

Intégration du modèle dans le repère $(x_1 x_2)$

C.1. On se place dans le repère $(x_1 x_2)$, et on considère le comportement plastique isotrope linéaire. Donner successivement les expressions du déviateur \tilde{s} , de l'invariant de von Mises J , de la normale \tilde{n} et de la composante $\dot{\varepsilon}_{12}^p$ du tenseur vitesse de déformation plastique. On utilisera la notation $\sigma_{12} = \tau$.

On a ici :

$$\tilde{s} = \tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \sqrt{3} \tau$$

$$\tilde{n} = \frac{\sqrt{3}}{2\tau} \tilde{s}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\sqrt{3}}{H} \dot{\tau}$$

$$\dot{\varepsilon}_{12}^p = \frac{3\dot{\tau}}{2H}$$

C.2. Intégrer l'expression précédente jusqu'à la valeur τ_m de τ (on suppose que $\tau_m \sqrt{3} > \sigma_y$) et donner la valeur de déformation plastique atteinte.

La déformation plastique démarre lorsque $f(\tilde{\sigma}) = 0$, c'est-à-dire ici quand $\tau = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$. Il vient alors :

$$\varepsilon_{12}^p = \frac{3}{2H} \left(\tau_m - \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \right)$$

C.3. Calculer à ce point la valeur de la déformation élastique, et en déduire la relation entre τ_m et γ_m .

La déformation élastique pour un corps isotrope est donnée par : $\tilde{\varepsilon}^e = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\sigma} I$. On a donc ici :

$$\varepsilon_{12}^e = \frac{1+\nu}{E} \tau_m$$

La déformation totale γ_m est la somme des contributions élastique et plastique. Il vient alors :

$$\gamma_m = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_m + \frac{3}{H} \left(\tau_m - \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \right)$$

C.4. Refaire le travail en considérant maintenant le cas de l'écroutissage cinématique linéaire. Que remarque-t-on en ce qui concerne la relation contrainte-déformation ?

On a :

$$\tilde{\sigma} - \tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & \tau - 2H\varepsilon_{12}^p/3 & 0 \\ \tau - 2H\varepsilon_{21}^p/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$J(\tilde{\sigma} - \tilde{X}) = \sqrt{3} \left(\tau - \frac{2H\varepsilon_{12}^p}{3} \right)$$

La composante 12 du tenseur normal s'écrit :

$$n_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le multiplicateur plastique s'écrit :

$$\dot{\lambda} = \frac{\sqrt{3}\dot{\tau}}{H}$$

d'où l'on déduit la composante 12 du tenseur de vitesse de déformation plastique :

$$\dot{\varepsilon}_{12}^p = \frac{3\dot{\tau}}{2H}$$

La relation contrainte déformation est la même que dans le cas de l'écroutissage isotrope.

Intégration du modèle dans le repère (x'_1, x'_2)

Comme les trajets du deuxième niveau s'expriment de façon simple dans le repère (x'_1, x'_2) , on va maintenant se placer dans ce même repère pour représenter le chargement de précisaillage du premier niveau. On continuera d'appeler σ_{ij} les composantes du tenseur de contraintes. Ainsi σ_{11} est maintenant la contrainte normale sur la facette de normale \underline{e}'_1 . De même, ε_{ij} et ε_{ij}^p sont respectivement les composantes des tenseurs de déformation et de déformation plastique.

C.5. Donner dans (x'_1, x'_2) les valeurs de σ_{ij} correspondant au cisaillement τ dans (x_1, x_2) . On cherchera pour cela les contraintes normales principales du tenseur de contraintes, et les directions principales associées.

Les contraintes normales principales de $\tilde{\sigma}$ sont τ et $-\tau$, respectivement associées aux directions principales $(1, 1, 0)$ et $(1, -1, 0)$. Dans (x'_1, x'_2) le tenseur des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C.6. Ecrire la relation entre σ_{11} et ε_{11} lorsque l'on est encore en régime élastique.

En régime élastique on a :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11}$$

C.7. Refaire dans le repère (x'_1, x'_2) les calculs de la question C.1 pour le cas de l'écroutissage isotrope linéaire.

On retrouve les mêmes résultats que précédemment, à savoir :

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{3}\tau \\ \dot{\lambda} &= \frac{\sqrt{3}}{2\tau} \dot{s} \\ \dot{\lambda} &= \frac{\sqrt{3}}{H} \dot{t} \\ \dot{\epsilon}_{11}^p &= \frac{3\dot{t}}{2H} \end{aligned}$$

C.8. Intégrer la relation de comportement plastique et calculer ϵ_{11}^p en fonction de σ_{11} . Exprimer les valeurs maximales des contraintes et des déformations plastiques en fonction de τ_m .

On a : $\dot{\epsilon}_{11}^p = \frac{3}{2H} \dot{t}$, la plastification commençant pour $f = 0$, c'est-à-dire $\tau = \sigma_y / \sqrt{3}$, on trouve :

$$\epsilon_{11}^{pm} = \frac{3}{2H} \left(\tau_m - \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \right)$$

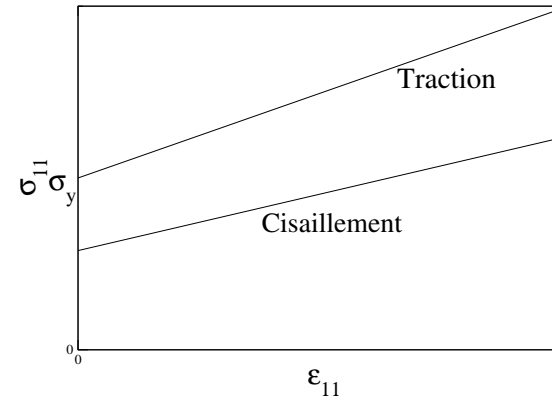
C.10. Tracer dans le plan ($\epsilon_{11}^p - \sigma_{11}$) la courbe représentative du premier niveau de chargement, et la comparer avec la courbe qui serait obtenue en traction simple.

Dans le cas du cisaillement pur on a donc :

$$\sigma_{11} = \frac{2H}{3} \epsilon_{11}^p + \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

Et dans le cas de la traction simple :

$$\sigma_{11} = H\epsilon_{11}^p + \sigma_y$$



C.11. Caractériser la position du domaine d'élasticité après le préchargement de cisaillement. En déduire, sans faire les calculs, la forme des courbes caractérisant les chargements de traction selon les directions x'_1 ou x'_2 . Si on oublie l'histoire lors du redécoupage des petits spécimens dans la grande plaque (donc qu'on remet à zéro la déformation plastique dans le modèle), y a-t-il une différence entre les tractions selon x'_1 et x'_2 ?

Après le préchargement, le domaine d'élasticité (de rayon initial σ_y) s'est dilaté dans toutes les directions et son nouveau rayon vaut $H\epsilon_{11}^p + \sigma_y$.

Le tenseur de déformation plastique n'a que deux termes non nuls, ϵ_{11}^p et ϵ_{22}^p , avec :

$$\epsilon_{11}^p = -\epsilon_{22}^p = \frac{3}{2H} \left(\tau_m - \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \right)$$

La déformation cumulée p_m en fin de préchargement vaut donc :

$$p_m = \frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon_{11}^p = \frac{\sqrt{3}}{H} \left(\tau_m - \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \right)$$

Les courbes de traction suivant les directions x'_1 et x'_2 auront la même allure : tout d'abord une déformation purement élastique jusqu'à $\sigma = \sigma_y + Hp_m$ puis un régime élasto-plastique de pente $\frac{H+E}{HE}$ dans le repère $(\epsilon_{11}, \sigma_{11})$. Si on oublie l'histoire du matériau, celui-ci étant isotrope, la traction suivant les directions x'_1 et x'_2 sont équivalentes.

C.12. Que devient l'ensemble des conclusions précédentes si l'on

considère maintenant le comportement cinématique linéaire ?

Dans le cas du comportement cinématique linéaire, le rayon du domaine d'élasticité ne varie pas, ni sa forme, mais son centre subit une translation suivant les directions de sollicitation, proportionnelle au tenseur de déformation plastique. Dans le cas présent, cela résultera en une augmentation de la limite élastique dans la direction x'_1 et une diminution dans la direction x'_2 .