

**Correction de l'examen de Mécanique des Matériaux Solides,  
8 avril 2014  
D. RYCKELYNCK**

*Tout document autorisé.  
Durée de l'examen : une heure.*

## 1 Evaluation de connaissances

*Cette partie n'est pas calculatoire, donnez des réponses courtes et n'y passez pas plus de 10 minutes.*

---

**Question 1.1** : On souhaite casser un spaghetti, supposé parfaitement rectiligne, en le soumettant à un effort de compression. Quels sont les phénomènes mécaniques mis en jeu permettant d'estimer le niveau d'effort à atteindre pour obtenir la rupture ?

Le spaghetti est soumis à un équilibre qui devient instable quand la charge de compression atteint la charge critique de flambement. Après que cette charge critique a été atteinte, il y a flexion du spaghetti puis rupture. Il faut donc au moins atteindre la charge critique de flambement pour qu'il y ait rupture du spaghetti.

---

**Question 1.2** : La charge de compression du spaghetti provoquant sa rupture est-elle fonction de sa longueur ? Pourquoi ?

La charge critique de flambement est fonction de la longueur du spaghetti vu comme une poutre. Elle l'est également des conditions aux limites appliquées au spaghetti. Plus le spaghetti sera petit plus il sera difficile de le casser suite au flambement, dans un état de post-flambement.

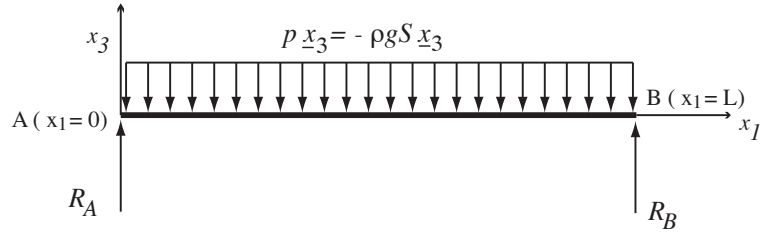
---

**Question 1.3** : Quelle est le domaine de validité de votre analyse de l'effet de la longueur sur la rupture du spaghetti ? Votre analyse est-elle applicable pour toute longueur ?

Pour des longueurs très courtes, inférieure à environ 5 fois le diamètre du spaghetti, le flambement issu de la théorie des poutres n'est plus un modèle applicable. Il faut alors reconsidérer l'expérience pour en faire un modèle mécanique approprié.

## 2 Exercice, conception d'une poutre soumise à son poids propre

Nous souhaitons choisir la forme de la section droite de la poutre pour avoir une charge critique de flambement la plus grande possible pour une masse totale fixée, tout



Poutre d'aire de section  $S$ , de longueur  $L$ , en appui simple en A et B (rotation libre des sections droites), soumise à son propre poids.

en conservant un domaine élastique pour la flexion de la poutre sous son poids propre. Nous étudions ici deux formes de section droite de même aire. L'une est rectangulaire, de hauteur totale  $h$  dans la direction  $\underline{x}_3$  et de largeur  $b$  dans la direction  $\underline{x}_2$ . Le moment quadratique selon l'axe  $\underline{x}_2$  de cette section rectangulaire est  $\hat{I}_2 = \frac{bh^3}{12}$ . En permutant  $b$  et  $h$  on obtient le moment quadratique selon l'axe  $\underline{x}_3$ . Il est noté  $\hat{I}_3$ . L'autre section étudiée est un disque de diamètre  $D$  et de moment quadratique  $\tilde{I} = \frac{\pi D^4}{64}$ , avec  $\pi \frac{D^2}{4} = bh$ . Par ailleurs, la charge critique de flambement de la poutre en appui simple est notée  $F_c$  avec :

$$F_c = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2},$$

où  $E$  est le module de Young du matériau et  $I_{min}$  le plus petit des moments quadratiques entre celui de l'axe  $\underline{x}_2$  et celui de l'axe  $\underline{x}_3$ . Le comportement du matériau est de type élastique-plastique parfait, de limite d'élasticité  $\sigma_y$ .

Les déformations sont supposées infinitésimales. On suppose que  $h$  et  $D$  sont suffisamment petits pour admettre l'hypothèse de poutre mince et négliger l'effet du cisaillement sur les déformations en utilisant la théorie des poutres de Navier-Bernoulli. Ainsi  $\theta = -V_{,1}$ .

### QUESTIONS :

**Question 2.1** : Donner l'expression des réactions aux appuis  $R_A$  et  $R_B$  en fonction de  $S$ ,  $\rho$ ,  $g$  et  $L$  le cas échéant.

Le système est isostatique. On peut déterminer tous les efforts sans faire intervenir le comportement du matériau. L'équilibre global de la poutre donne les équations suivantes. Pour la résultante des efforts projetée sur  $\underline{x}_3$  on obtient

$$R_A + R_B - \int_0^L \rho g S dx_1 = 0,$$

pour le moment des efforts au point A en projection sur  $\underline{x}_2$

$$-L R_B + \int_0^L \rho g S x_1 dx_1 = 0$$

Nous trouvons :

$$R_A = R_B = \frac{L}{2} \rho g S$$

---

**Question 2.2** : Donner l'expression des composantes  $N$ ,  $T$  et  $M$ , du torseur des efforts intérieurs en  $x_1 = 0$  et  $x_1 = L$ . En  $x_1 = 0$  la normale extérieure au domaine occupé par la poutre est portée par  $-\underline{x}_1$  nous avons donc, en tenant compte des conditions aux limites :

$$N(0) = 0, \quad T(0) = -R_A, \quad M(0) = 0$$

En  $x_1 = L$  la normale extérieure est portée par  $\underline{x}_1$  nous avons donc :

$$N(L) = 0, \quad T(L) = R_B, \quad M(L) = 0$$

---

**Question 2.3** : Donner l'expression des conditions aux limites sur les déplacements et la rotation des sections droites le cas échéant.

En  $A$  et  $B$  les déplacements longitudinaux sont libres ainsi que les rotations de section droite, car les efforts associés sont nuls. Seuls les déplacements transverses sont bloqués :

$$V(0) = 0, \quad V(L) = 0$$

---

**Question 2.4** : Quelle équation peut-on écrire sur  $\theta(\frac{L}{2})$  ? Du fait de la symétrie du problème mécanique, chargement et géométrie sont symétriques, les déplacements sont symétriques. Donc  $V_{,1}(\frac{L}{2}) = 0$ . On en déduit donc que  $\theta(\frac{L}{2}) = 0$ .

---

**Question 2.5** : Déterminer l'expression du champ des efforts  $T$  et  $N$  sur l'intervalle  $[0, L]$ .

L'équilibre des efforts intérieurs donne :

$$N_{,1} = 0, \quad T_{,1} - \rho g S = 0, \quad M_{,1} - T = 0$$

On en déduit, par intégration de 0 à  $x_1$  :

$$N = 0, \quad T = \rho g S \left(x_1 - \frac{L}{2}\right)$$

---

**Question 2.6** : Donner l'expression du moment fléchissant  $M$  sur l'intervalle  $[0, L]$ . En poursuivant l'intégration de l'équation sur le moment fléchissant on obtient :

$$M = \rho g S \frac{x_1 (x_1 - L)}{2}$$

**Question 2.7 :** Pour les deux types de section droite, donner l'expression de la contrainte  $\sigma_{11}$  maximale en valeur absolue. En quel(s) point(s) des deux poutres a-t-on ce niveau de contrainte ?

La contrainte dans chaque section droite est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_{11} = \frac{M x_3}{I}$$

Cette contrainte est maximale en  $x_1 = \frac{L}{2}$  et  $x_3$  maximum en valeur absolue. Soit pour la section rectangulaire :

$$\hat{\sigma}_{11} = \frac{\rho g S L^2 h}{16 \hat{I}_2}$$

$$\hat{\sigma}_{11} = \frac{3 \rho g L^2}{4 h}$$

Pour la section circulaire on obtient :

$$\tilde{\sigma}_{11} = \frac{\rho g S L^2 D}{16 \tilde{I}_2}$$

$$\tilde{\sigma}_{11} = \frac{\rho g L^2}{D}$$

**Question 2.8 :** Quelle relation y a-t-il entre  $h$  et  $D$  pour avoir des niveaux de contrainte maximale identiques pour la section rectangulaire et la section circulaire ?

Pour avoir  $\tilde{\sigma}_{11} = \hat{\sigma}_{11}$  il faut  $D = \frac{4h}{3}$ , avec  $b = \frac{4\pi}{9}h$  ( $b > h$ ) pour pouvoir avoir  $\pi \frac{D^2}{4} = b h$ . Le diamètre doit être plus grand que  $h$  car il y a moins de matière pour la valeur maximale de  $x_3$  dans le cas de la section circulaire par rapport à la section rectangulaire.

**Question 2.9 :** Pour un matériau donné, quelle est la forme de section droite à choisir pour avoir la même contrainte maximale et avoir la plus grande charge critique de flambement ?

Les charges critiques de flambement sont

$$\tilde{F}_c = \frac{\pi^2 E \tilde{I}_2}{L^2}, \quad \hat{F}_c = \frac{\pi^2 E \hat{I}_2}{L^2}$$

respectivement pour la section circulaire et la section rectangulaire, car  $\hat{I}_2 < \hat{I}_3$  puisque  $b > h$ .

On a donc

$$\frac{\tilde{F}_c}{\hat{F}_c} = \frac{\tilde{I}_2}{\hat{I}_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{F}_c}{\widehat{F}_c} = \frac{12 S D^2}{16 S h^2} = \frac{4}{3}$$

Il faut donc choisir une section circulaire pour maximiser la charge critique de flambement.

---

**Question 2.10** : Il reste à choisir entre utiliser un acier ou un alliage d'aluminium pour avoir une poutre la plus longue possible tout en restant dans le domaine élastique en tout point de la poutre lorsqu'elle est soumise à son poids propre. L'acier considéré a un module de Young de 210000 MPa, une masse volumique de 7800 kg.m<sup>-3</sup> et une limite d'élasticité de 800 MPa. L'alliage d'aluminium considéré est utilisé pour l'aéronautique. Il a les caractéristiques suivantes : un module de Young de 71000 MPa, une masse volumique de 2800 kg.m<sup>-3</sup> et une limite d'élasticité de 500 MPa (<http://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=MA7075T6>). Quel est votre choix ?

La longueur maximale pour rester dans le domaine élastique est donnée par :

$$L_{max} = \sqrt{\frac{\sigma_y D}{\rho g}}$$

Il faut donc choisir le matériau qui maximise le rapport  $\frac{\sigma_y}{\rho}$ . Pour l'acier on a,  $\frac{\sigma_y}{\rho} = 0,1MPa.kg^{-1}.m^3$ . Pour l'aluminium proposé on a  $\frac{\sigma_y}{\rho} = 0,18MPa.kg^{-1}.m^3$ . Il faut donc choisir l'aluminium pour maximiser la longueur de la poutre. C'est une illustration de l'intérêt de l'aluminium pour des applications aéronautiques.

---

**Question 2.11** : Calculer le déplacement transverse  $V$  et sa valeur absolue maximale. En exploitant la relation de comportement élastique on a :

$$E \tilde{I}_2 V_{,11} = -M$$

Donc

$$V_{,1} = -\frac{\rho g S}{E \tilde{I}_2} \left( \frac{x_1^3}{6} - \frac{x_1^2 L}{4} + \frac{L^3}{24} \right)$$

$$V = -\frac{\rho g S}{E \tilde{I}_2} \left( \frac{x_1^4}{24} - \frac{x_1^3 L}{12} + \frac{x_1 L^3}{24} \right)$$

Le maximum en valeur absolue de  $V$  est atteint lorsque  $V_{,1} = 0$ , c'est à dire en  $x_1 = L/2$  :

$$V_{max} = \frac{13 \rho g S L^4}{384 E \tilde{I}_2}$$