

Mines ParisTech 1ère année, Mécanique des matériaux solides

Lundi 21 Mai 2012 / 15h30 - 18h00 / Durée 2h30

Documents autorisés : tous + calculatrices.

A. COMPORTEMENT MECANIQUE DES MOUSSES METALLIQUES

Les mousses de polymères sont bien connues des usagers puisqu'elles interviennent dans le packaging et permettent d'absorber l'énergie de faibles chocs. Pour des chocs plus violents, les mousses métalliques s'imposent peu à peu comme une nouvelle classe de matériaux de l'absorption d'énergie. Des applications sont envisagées dans l'aéronautique et l'automobile.

On sait depuis une cinquantaine d'années fabriquer des mousses d'aluminium par bullage du métal liquide (figure 1) mais leurs propriétés mécaniques n'ont été étudiées que dans les quinze dernières années. On peut obtenir des densités relatives (densité de la mousse divisée par la densité de l'aluminium) très variables allant de 0.1 à 0.3. La taille des porosités est millimétrique voire centimétrique (figure 2).

Pour le dimensionnement de composants industriels intégrant des mousses d'aluminium, il est nécessaire d'avoir une loi de comportement décrivant ce milieu. Comme il n'est pas possible du point de vue pratique de calculer le détail de la microstructure, on choisit de remplacer ce milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent continu.

On cherche dans ce problème à identifier un modèle de plasticité compressible adapté à ce matériau. En effet, même si l'aluminium est plastiquement incompressible, le milieu poreux lui est compressible (sensible à l'application d'une pression hydrostatique). On supposera que le matériau est isotrope.

Le modèle retenu fait appel à un critère dit elliptique, faisant intervenir les premier et second invariants des contraintes :

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_{eq} - R_0, \quad \sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2} C \underline{s} : \underline{s} + F(\text{trace } \underline{\sigma})^2 \quad (1)$$

R_0, C et F sont les paramètres matériau du modèle. La trace désigne la somme des composantes diagonales du tenseur des contraintes. Le déviateur des contraintes est noté \underline{s} et est défini par :

$$\underline{s} = \underline{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{trace } \underline{\sigma}) \underline{1} \quad (2)$$

Le tenseur unité d'ordre 2 est noté $\underline{1}$.

1 Comportement en compression

On usine des éprouvettes cylindriques et on travaille en coordonnées cylindriques dans un repère $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$. La compression pure selon l'axe z de l'éprouvette cylindrique est l'essai le plus important pour évaluer la capacité de dissipation d'énergie du matériau. Pour cette sollicitation le tenseur des contraintes a donc la forme ($\sigma > 0$) :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} \quad (3)$$

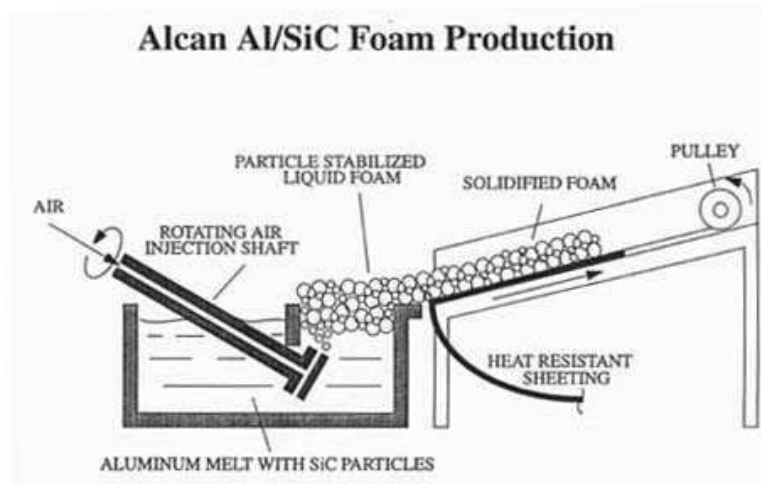


FIG. 1 – Procédé d’élaboration des mousses d’aluminium (tiré du brevet américain).



FIG. 2 – Echantillon de mousse d’aluminium de densité 0.25 g/cm^3 (largeur 15 cm).

1.1 Limite d’élasticité

Déterminer en fonction de R_0 , C et F , la limite d’élasticité en compression selon le critère (1).
Montrer que la condition pour que cette limite d’élasticité soit égale à R_0 est :

$$C + F = 1 \quad (4)$$

On adopte cette convention dans toute la suite du problème. Elle ne réduit pas la généralité des résultats car elle correspond simplement à une normalisation du critère.

1.2 Loi d’écoulement plastique

La loi d’écoulement donne l’incrément de déformation :

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \underline{N} \quad (5)$$

où λ est le multiplicateur plastique et \underline{N} la direction d'écoulement. On suppose que le matériau obéit à la règle de normalité :

$$\underline{N} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (6)$$

Montrer que cette direction vaut :

$$\underline{N} = \left(\frac{3}{2} C \underline{s} + F (\text{trace } \underline{\sigma}) \underline{1} \right) / \sigma_{eq} \quad (7)$$

1.3 Déformation latérale

Lors d'un essai de compression simple selon l'axe z , on observe expérimentalement que l'échantillon ne se déforme pratiquement pas selon la direction radiale. La dimension de la section de l'éprouvette reste donc quasiment constante. Cela implique que le matériau diminue de volume au cours de la déformation.

Exprimer le tenseur \underline{N} pour la compression simple en fonction de C, F .

Déduire de l'observation expérimentale précédente une relation entre C et F . En ajoutant cette condition à la relation (4), déterminer les valeurs de C et F .

2 Comportement sous chargement multiaxial

On utilise un dispositif très courant en mécanique des sols. L'éprouvette cylindrique est mise dans une "chaussette" de latex et plongée dans un fluide permettant d'appliquer une pression p sur la surface externe $r = R$. Le dispositif permet en outre d'appliquer une contrainte $-\sigma$ sur les surfaces $z = 0, H$. Ces faces ne sont donc pas soumises à la pression supplémentaire p .

Le champ de contrainte appliqué est de la forme :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} \quad (8)$$

($\sigma > 0, p > 0$).

2.1 Surface de charge dans le plan (σ, p)

Exprimer la contrainte équivalente σ_{eq} en fonction de σ et p .

Pour $\sigma = 0$ imposé, calculer la pression de plastification.

Tracer la surface de charge dans le quart de plan (σ, p). Pour le tracé, on tiendra compte des valeurs trouvées pour C et F dans la partie 1.3.

2.2 Effet d'histoire de chargement

On modélise l'écrouissage observé expérimentalement peu après le seuil de plasticité par un écrouissage isotrope linéaire :

$$R = R_0 + H\lambda \quad (9)$$

où H est le module d'écrouissage et λ la déformation plastique cumulée. On cherche à appliquer un chargement final purement hydrostatique :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

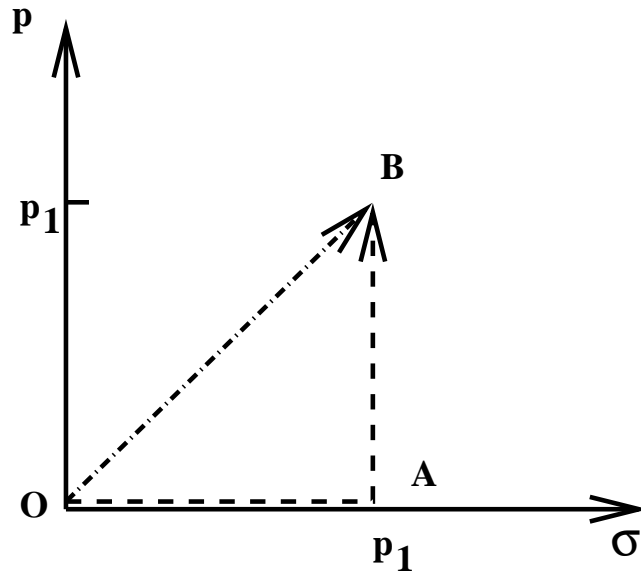


FIG. 3 – Trajets de contraintes imposées dans le plan compression/pression latérale.

Avec le dispositif disponible, on propose d’atteindre cet état par deux trajets différents présentés sur la figure 3 :

– Trajet direct OB :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = -kp_1 \quad (11)$$

les autres composantes restant nulles, k variant de 0 à 1 pendant le trajet.

– Trajet OAB : compression simple OA jusqu’à $\sigma = -p_1$, suivie de l’application AB d’une pression latérale p de 0 à p_1 , en maintenant la charge $\sigma_{zz} = -p_1$.

Comparer la hauteur finale des éprouvettes à l’issue de ces deux essais.

On rappelle que le multiplicateur plastique est donnée par la relation suivante :

$$\dot{\lambda} = \frac{\tilde{N} : \dot{\tilde{\sigma}}}{H} \quad (12)$$

Pour répondre à la question, on pourra résoudre successivement les trois étapes suivantes.

2.2.1 Trajet OB

Calculer successivement $\tilde{\sigma}, \tilde{s}, \tilde{N}, \dot{\lambda}$ et finalement $\dot{\tilde{\epsilon}}^p, \tilde{\epsilon}_{zz}^p$.

2.2.2 Trajet OA

Il s’agit d’un trajet de compression simple déjà étudié dans la partie 1. On calculera en A la déformation plastique $\tilde{\epsilon}_{zz}^p$ en fonction de p_1, R_0 et H .

2.2.3 Trajet AB

Calculer successivement $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}, \tilde{s}, \tilde{N}, \dot{\lambda}$ et finalement $\dot{\tilde{\epsilon}}^p, \tilde{\epsilon}_{zz}^p$. La composante σ_{zz} est fixée à $-p_1$ pendant ce trajet et seul p varie.

B. ETUDE DU FLAMBAGE D'UNE POUTRE ENCASTREE



FIG. 4 – Poutre à section rectangulaire, de longueur L , encastrée en A et soumise a un effort longitudinal en B.

Le flambage est une bifurcation instable de l'équilibre d'un système mécanique qui entraîne une chute brutale de la rigidité du système quand le chargement dépasse une valeur critique. Ce phénomène n'existe que sous certaines conditions. Mais l'ignorer lors de la conception de systèmes mécaniques peut conduire à des accidents graves.

Pour faciliter la mise en œuvre des raisonnements vus en cours nous donnons quelques rappels sur l'énergie potentielle d'une poutre dans le cadre de grandes rotations, petites déformations élastiques, pour une cinématique de Navier Bernoulli. Le champ de déplacement a la forme suivante :

$$\underline{u} = u_1(x_1, x_3) \underline{x}_1 + u_3(x_1, x_3) \underline{x}_3 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \quad (13)$$

$$u_1 = U(x_1) + \theta(x_1)x_3, \quad u_3 = V(x_1), \quad V_{,1} + \theta = 0 \quad (14)$$

Le champ de déplacement virtuel a pour expression :

$$\underline{u}^* = u_1^*(x_1, x_3) \underline{x}_1 + u_3^*(x_1, x_3) \underline{x}_3 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \quad (15)$$

$$u_1^* = U^*(x_1) + \theta^*(x_1)x_3, \quad u_3^* = V^*(x_1), \quad V_{,1}^* + \theta^* = 0 \quad (16)$$

L'énergie potentielle a pour expression :

$$\mathcal{F}(\underline{u}, \lambda) = \int_0^L \frac{1}{2} E S (U_{,1} + \frac{1}{2} V_{,1}^2)^2 + \frac{1}{2} E I V_{,11}^2 dx_1 + \lambda U(L) \quad (17)$$

La première variation de l'énergie potentielle pour des variations \underline{u}^* a pour expression :

$$\mathcal{F}_{,u}(\underline{u}, \lambda)[\underline{u}^*] = \int_0^L (E S (U_{,1} + \frac{1}{2} V_{,1}^2) (U_{,1}^* + V_{,1} V_{,1}^*) + E I V_{,11} V_{,11}^*) dx_1 + \lambda U^*(L) \quad (18)$$

La seconde variation de l'énergie potentielle a pour expression :

$$\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}, \lambda)[\underline{u}^*, \underline{\phi}] = \int_0^L E S ((U_{\phi,1} + V_{,1} V_{\phi,1}) (U_{,1}^* + V_{,1} V_{,1}^*) + (U_{,1} + \frac{1}{2} V_{,1}^2) V_{\phi,1} V_{,1}^*) + E I V_{\phi,11} V_{,11}^* dx_1 \quad (19)$$

avec

$$\underline{\phi} = u_{\phi 1}(x_1, x_3) \underline{x}_1 + u_{\phi 3}(x_1, x_3) \underline{x}_3 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \quad (20)$$

$$u_{\phi 1} = U_{\phi}(x_1) + \theta_{\phi}(x_1)x_3, \quad u_{\phi 3} = V_{\phi}(x_1), \quad V_{\phi,1} + \theta_{\phi} = 0 \quad (21)$$

Questions :

B.1 Montrer, en appliquant le principe des puissances virtuelles, ou en écrivant la stationnarité de l'énergie potentielle, qu'il existe un état d'équilibre sans déplacement transverse (avec $V = 0 \forall x_1 \in [0, L]$). On notera cette solution $\underline{u}_e(\lambda)$ (avec $V_e = 0$). Pour faciliter la formulation des équations aux dérivées partielles donnant \underline{u}_e nous recommandons de considérer $V^ = 0 \forall x_1 \in [0, L]$.*

Appliquons le théorème de l'énergie potentielle qui dit qu'à l'équilibre l'énergie potentielle est stationnaire. On obtient le problème suivant, trouver (U, V) avec $U(0) = 0, V(0) = 0, V_{,1}(0) = 0$ tel que :

$$\int_0^L (E S (U_{,1} + \frac{1}{2} V_{,1}^2) (U_{,1}^* + V_{,1} V_{,1}^*) + E I V_{,11} V_{,11}^* dx_1 + \lambda U^*(L) = 0 \quad \forall (U^*, V^*) \quad (22)$$

$$\text{avec } U^*(0) = 0, V^*(0) = 0, V_{,1}^*(0) = 0 \quad (23)$$

Pour montrer qu'il existe une solution $(U_e, V_e = 0)$ nous considérons $V^* = 0$. Ceci conduit à l'équation suivante :

$$\int_0^L (E S U_{e,1} U_{,1}^* dx_1 + \lambda U^*(L) = 0 \quad \forall U^* \quad (24)$$

$$\text{avec } U^*(0) = 0 \quad (25)$$

A l'aide d'une intégration par partie on obtient :

$$- \int_0^L (E S U_{e,11} U^* dx_1 + (E S U_{e,1}(L) + \lambda) U^*(L) = 0 \quad \forall U^* \quad (26)$$

$$\text{avec } U^*(0) = 0 \quad (27)$$

On en déduit l'équation locale d'équilibre longitudinal :

$$E S U_{e,11} = 0 \quad \forall x_1 \in [0, L]$$

Et la condition d'équilibre sur le bord sollicité :

$$E S U_{e,1}(L) = -\lambda$$

La solution est donc :

$$U_e(\lambda) = -\frac{\lambda}{E S} x_1$$

En considérant maintenant V^* quelconque et $U^* = 0$, on obtient :

$$\int_0^L (-\lambda)(0) + 0 dx_1 + \lambda 0 = 0 \quad \forall V^*$$

Nous avons bien trouvé un état d'équilibre.

B.2 Quel est l'état de contrainte associé à $\underline{u}_e(\lambda)$?

$$(\sigma_{..}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} = \frac{-\lambda}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

B.3 De quel état mécanique s'agit-il ?

La poutre est sollicitée en compression si $\lambda > 0$ et en traction si $\lambda < 0$.

B.4 Rechercher les solutions ϕ de l'équation $\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e(\lambda), \lambda)[\underline{u}^*, \underline{\phi}] = 0 \quad \forall (U^*, V^*)$ avec $(U^*(0) = 0, V^*(0) = 0, V_{,1}^*(0) = 0)$. Il est important d'y faire figurer la dépendance de \underline{u}_e en λ . Nous recommandons de chercher θ_ϕ avant de trouver V_ϕ . Discuter de l'influence du signe de λ sur les champs V_ϕ solutions.

On applique les mêmes étapes de calcul que celles de la recherche des conditions d'équilibre. On obtient le problème suivant, trouver (U_ϕ, V_ϕ) avec $U_\phi(0) = 0, V_\phi(0) = 0, \theta_\phi(0) = 0$ tel que :

$$\int_0^L E S U_{\phi,1} U_{,1}^* - \lambda \theta_\phi \theta^* + E I \theta_{\phi,1} \theta_{,1}^* dx_1 = 0 \quad \forall (U^*, V^*) \quad (29)$$

$$\text{avec } U^*(0) = 0, V^*(0) = 0, V_{,1}^*(0) = 0 \quad (30)$$

En intégrant par partie on obtient :

$$E S U_{\phi,1}(L) U^*(L) - \int_0^L E S U_{\phi,11} U^* dx_1 \quad (31)$$

$$+ E I \theta_{\phi,1}(L) \theta^*(L) \quad (32)$$

$$- \int_0^L (\lambda \theta_\phi + E I \theta_{\phi,11}) \theta^* dx_1 = 0 \quad \forall (U^*, V^*) \quad (33)$$

$$\text{avec } U^*(0) = 0, V^*(0) = 0, \theta^*(0) = 0 \quad (34)$$

On obtient les équations locales suivantes :

$$E S U_{\phi,11} = 0 \quad \forall x_1 \in [0, L]$$

$$\lambda \theta_\phi + E I \theta_{\phi,11} = 0 \quad \forall x_1 \in [0, L]$$

$$V_{\phi,1} = -\theta_\phi$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$U_\phi(0) = 0, V_\phi(0) = 0, \theta_\phi(0) = 0$$

$$U_{\phi,1}(L) = 0, \theta_{\phi,1}(L) = 0$$

On obtient donc :

$$U_\phi = 0$$

si $\lambda > 0$, alors $\theta_\phi = A \sin(\sqrt{\frac{\lambda}{EI}} x_1)$ sous réserve que λ soit tel que $\sqrt{\frac{\lambda}{EI}} \cos(\sqrt{\frac{\lambda}{EI}} L) = 0$ et $\lambda \neq 0$. On obtient alors $\lambda_c = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{L^2}$. On en déduit que $V_\phi = A \sqrt{\frac{EI}{\lambda_c}} (-\cos(\sqrt{\frac{\lambda_c}{EI}} x_1) + 1)$, donc $V_\phi = A \frac{2L}{\pi} (1 - \cos(\frac{\pi}{2L} x_1))$. Si $\lambda < 0$, alors $\theta_\phi = A \text{sh}(\sqrt{\frac{-\lambda}{EI}} x_1)$ avec $A = 0$ pour vérifier les conditions aux limites.

B.5 Que représente V_ϕ lorsque λ est tel que $\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e, \lambda)[\underline{\phi}, \underline{\phi}] = 0$ et que la valeur absolue $|\lambda|$ est la plus faible possible ? On notera λ_c la valeur correspondante de λ .

V_ϕ est un mode de bifurcation qui conduit au flambage de la poutre quand $\lambda = \lambda_c$.

B.6 Que représente λ_c ?

C'est la charge critique de flambage.

B.7 Quel est le signe de $\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e, \lambda)[\underline{\phi}, \underline{\phi}]$ quand $\lambda < \lambda_c$? Qu'en déduit-on ?

$$\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e, \lambda)[\underline{\phi}, \underline{\phi}] \quad (35)$$

$$= \int_0^L -\lambda \theta_\phi \theta_\phi + EI \theta_{\phi,1} \theta_{\phi,1} dx_1 \quad (36)$$

$$= A^2 \int_0^L -\lambda \sin^2\left(\frac{\pi}{2L} x_1\right) + \lambda_c \cos^2\left(\frac{\pi}{2L} x_1\right) dx_1 \quad (37)$$

$$= A^2 \frac{L}{2} (\lambda_c - \lambda) \quad (38)$$

Donc $\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e, \lambda)[\underline{\phi}, \underline{\phi}] > 0$ quand $\lambda < \lambda_c$. L'équilibre \underline{u}_e est un minimum local de l'énergie potentielle. En appliquant le théorème de Lejeune Dirichlet, on en déduit que l'équilibre correspondant à $\underline{u} = \underline{u}_e(\lambda)$ est stable pour $\lambda < \lambda_c$.

C. NOCIVITE D'UN RESEAU DE FISSURE DANS UNE PLAQUE

L'étude de la nocivité d'une fissure fait partie de la phase de dimensionnement des structures. On étudie en général l'impact de celle-ci en réponse à un chargement monotone (on augmente la charge appliquée jusqu'à la rupture comme sur la figure 5(a)), et en fatigue (la charge oscille entre des valeurs min et max comme sur la figure 5(b)). Il est cependant rare que l'on s'intéresse à la nocivité d'un réseau de fissures, même quand ces dernières sont colinéaires et orientées perpendiculairement à la charge. On propose dans cet exercice de comparer la résistance d'un tel réseau de fissures à celle d'une fissure isolée, dans les cas monotone et en fatigue.

Le texte est divisé en trois parties. Dans la première, on traite le problème d'une fissure seule dans une plaque infinie afin d'obtenir une charge et un nombre de cycle en fatigue critiques de référence. Dans la deuxième, on calcule la charge critique sous chargement monotone pour un réseau de fissures et on en déduit la diminution induite par rapport à la solution de référence. Enfin dans la troisième partie, on étudie la propagation des fissures en fatigue dans le réseau et on évalue aussi la différence avec la solution de la première partie.

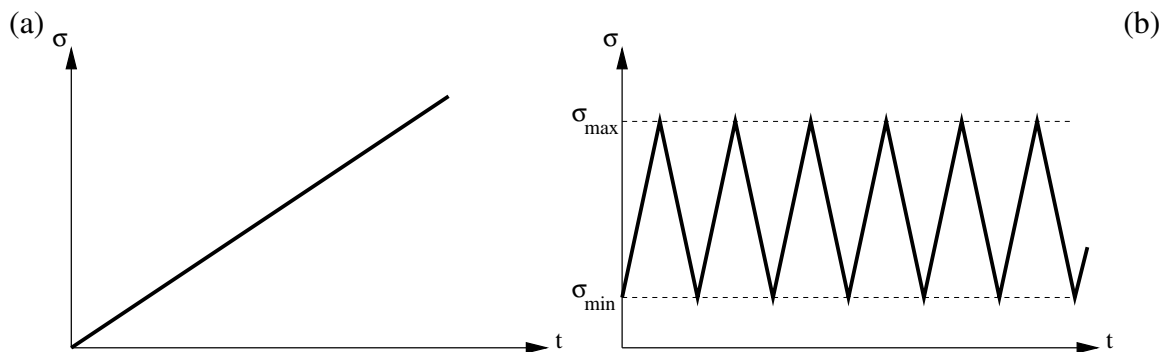


FIG. 5 – (a) Chargement monotone (b) Chargement de fatigue.

Etude d'une fissure seule

On étudie tout d'abord le cas d'une fissure isolée dans une plaque de dimensions infinies soumise à un chargement de traction suivant la direction perpendiculaire à la fissure, comme sur la figure 6. On cherche à établir des paramètres de référence pour la résistance d'une telle structure face aux chargements monotone et de fatigue. Dans le premier cas la résistance est donnée par la contrainte à la rupture. Dans le second cas, on choisit le nombre de cycle permettant de doubler la taille de la fissure.

Le facteur d'intensité des contraintes en mode I est donné pour la fissure seule en fonction de la demi-longueur de la fissure a et de la contrainte σ appliquée loin de la fissure par :

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$$

Cl. On note K_1^C le facteur d'intensité des contraintes critique du matériau. Donner l'expression de la contrainte σ_r^S qui entraîne la rupture de la plaque en chargement monotone en fonction de K_1^C et de la demi-longueur a_0 de la fissure.

$$\sigma_r^S = \frac{K_1^C}{\sqrt{\pi a_0}}$$

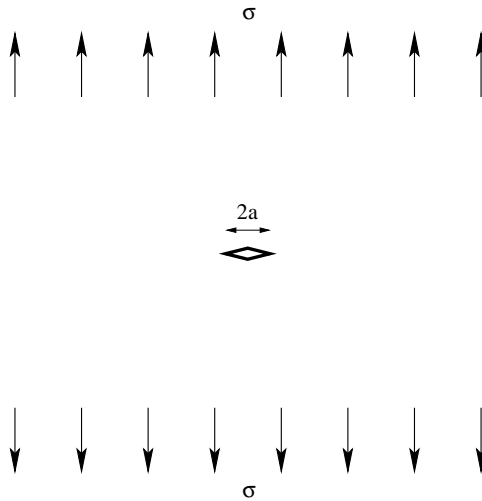


FIG. 6 – Fissure seule dans une plaque infinie soumise à un chargement de traction.

On s'intéresse maintenant à un chargement de fatigue. On notera $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$ la différence entre les contraintes min et max, et $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ la différence de facteur d'intensité des contraintes correspondante. La vitesse de propagation de la fissure da/dN est alors donnée par la loi de Paris dont l'exposant n (parfois aussi noté m) sera pris égal à 2 dans tout le problème (par contre il n'est pas utile dans le problème de connaître la valeur du coefficient C de cette même loi).

C2. Donner l'équation différentielle permettant de calculer l'évolution de la taille de la fissure en fonction du nombre de cycle. Intégrer cette équation entre une demi-longueur de fissure initiale a_0 (nombre de cycle = 0) et une demi-longueur a (nombre de cycle = N).

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n = C(\Delta\sigma\sqrt{\pi a})^n = C(\Delta\sigma)^2\pi a$$

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{a} = \int_0^N C\pi(\Delta\sigma)^2 dN$$

$$a = a_0 e^{C\pi(\Delta\sigma)^2 N}$$

C3. Donner l'expression du nombre de cycle N_2^S permettant de doubler la longueur de la fissure en fonction de C (coefficient de la loi de Paris) et $\Delta\sigma$.

$$2a_0 = a_0 e^{C\pi(\Delta\sigma)^2 N_2^S}$$

$$N_2^S = \frac{\ln(2)}{C\pi(\Delta\sigma)^2}$$

Etude d'un réseau de fissures en chargement monotone

On étudie maintenant un réseau de fissures colinéaires, toutes de longueur $2a$ et espacées d'une longueur d , dans une plaque de dimensions infinies soumise à un chargement de traction suivant la direction perpendiculaire aux fissures, comme sur la figure 7. On évalue dans un premier temps la

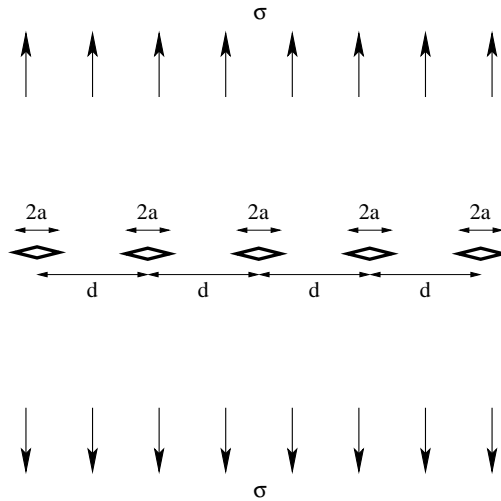


FIG. 7 – Réseau de fissures colinéaires dans une plaque infinie soumise à un chargement de traction.

résistance face à un chargement monotone en calculant la contrainte à la rupture. On compare alors cette contrainte avec celle calculée pour la plaque seule.

Le facteur d'intensité des contraintes en mode I est donné pour le réseau de fissures en fonction de la demi-longueur des fissures a et de la contrainte σ appliquée loin des fissures par :

$$K_1 = F_1 \sigma \sqrt{\pi a}$$

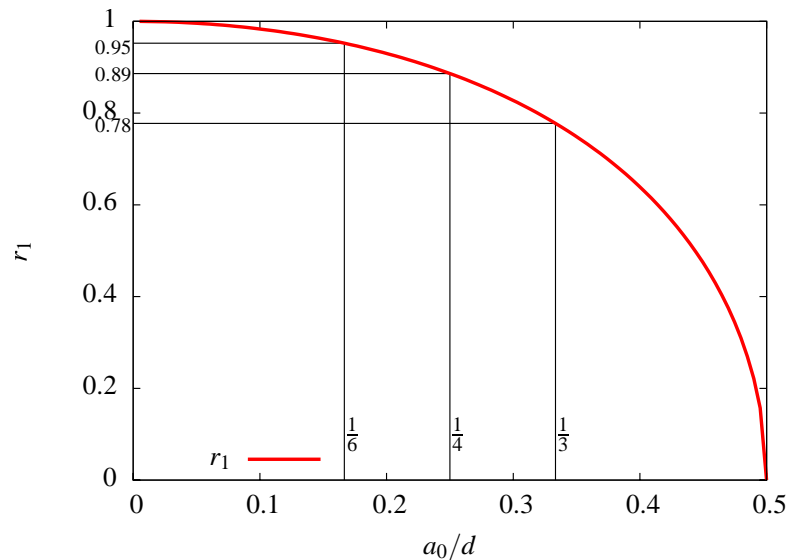
$$F_1 = \sqrt{\frac{d}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{d}\right)}$$

C4. Pour une demi-longueur des fissures de taille donnée a_0 et un espacement donné d , donner l'expression de la contrainte σ_r^M qui entraîne la rupture de la plaque.

$$\sigma_r^M = \frac{K_1^C}{\sqrt{d \tan(\pi a_0/d)}}$$

C5. Donner l'expression du rapport $r_1 = \sigma_r^M / \sigma_r^S$ entre la contrainte de rupture du réseau et celui de la fissure seule. Que devient ce rapport lorsque les fissures s'éloignent infiniment ? Se rapprochent infiniment ? Quel est sa valeur pour $d = 6a_0$, $d = 4a_0$, $d = 3a_0$? Tracer sommairement son évolution pour a_0/d compris entre 0 et 1/2.

$$r_1 = \sqrt{\frac{\pi a_0/d}{\tan(\pi a_0/d)}}$$



Etude d'un réseau de fissures sous chargement de fatigue

On évalue enfin la résistance du réseau de fissures en fatigue en calculant le nombre de cycle nécessaire pour doubler la taille des fissures. On compare alors ce nombre de cycle à celui de la plaque seule. Enfin on compare la nocivité des deux types de chargement pour le réseau de fissures.

C6. Donner l'équation différentielle permettant de calculer l'évolution de la taille des fissures en fonction du nombre de cycle. Intégrer cette équation entre une demi-longueur des fissures initiale a_0 (nombre de cycle = 0) et une demi-longueur a (nombre de cycle = N). On remarquera que $1/\tan(x) = \cos(x)/\sin(x)$...

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta\sigma)^2 d \tan(\pi a/d)$$

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{\tan(\pi a/d)} = \int_0^N C d (\Delta\sigma)^2 dN$$

$$\sin(\pi a/d) = \sin(\pi a_0/d) e^{C\pi(\Delta\sigma)^2 N}$$

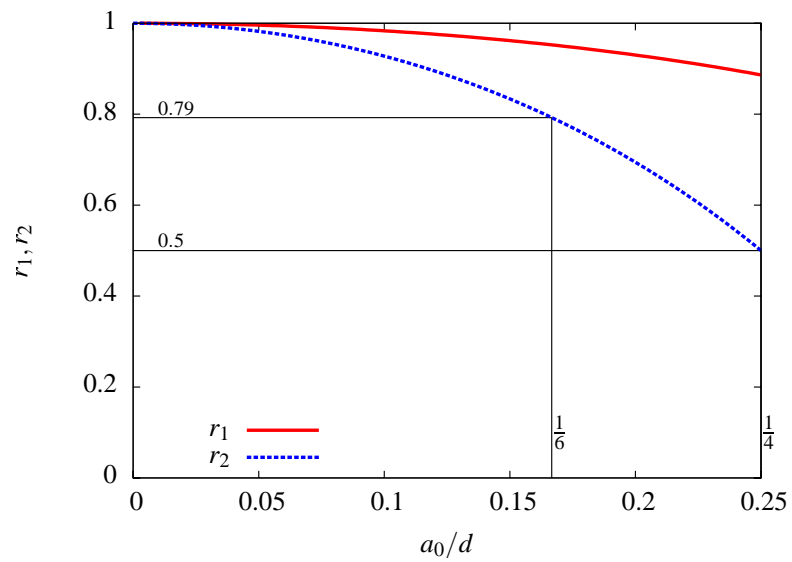
C7. Donner l'expression du nombre de cycle N_2^M permettant de doubler la longueur des fissures.

$$\sin(2\pi a_0/d) = \sin(\pi a_0/d) e^{C\pi(\Delta\sigma)^2 N_2^M}$$

$$N_2^M = \frac{\ln(2 \cos(\pi a_0/d))}{C\pi(\Delta\sigma)^2}$$

C8. Donner l'expression du rapport $r_2 = N_2^M/N_2^S$ entre les 2 nombres de cycle. Que devient ce rapport lorsque les fissures s'éloignent infiniment? Quel est sa valeur pour $d = 6a_0$, $d = 4a_0$? Tracer sommairement son évolution pour a_0/d compris entre 0 et 1/4.

$$r_2 = \frac{\ln(2 \cos(\pi a_0/d))}{\ln(2)}$$



C9. Comparer les évolutions de r_1 et r_2 . Pour un rapport a_0/d donné, la nocivité du réseau de fissures par rapport à la fissure seule est elle plus importante en chargement monotone ou de fatigue ?

$$r_2 < r_1$$