

MINES ParisTech

1<sup>ère</sup> année

**Recueil de formules mathématiques pour la  
MÉCANIQUE  
DES  
MATÉRIAUX  
SOLIDES**

D. RYCKELYNCK, S. CANTOURNET, M. MAZIERE, H. PROUDHON

P.-O. BOUCHARD, G. CAILLETAUD  
L. CORTE, J-L. DEQUIEDT  
A. GAUBERT, S. JOANNES  
A. ROUABHI, Y. TILLIER  
V. YASTREBOV

Mars 2013

## Eléments de la théorie des poutres planes en élasticité isotrope linéaire pour matériaux ho- mogènes

- La théorie de Timoshenko pour les poutres suppose qu'une section plane reste plane, mais pas forcément perpendiculaire à la ligne moyenne. La cinématique est :

$$\begin{aligned} u_1 &= U(x_1) + \theta x_3 & u_3 &= V(x_1) \\ \varepsilon_{11} &= U_{,1} + \theta_{,1} x_3 & 2\varepsilon_{13} &= V_{,1} + \theta \end{aligned}$$

- Composantes du torseur des efforts intérieurs au centre d'inertie de  $S$  :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS, \quad T = \int_S \sigma_{13} dS, \quad M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS$$

- Les équations d'équilibre global sont :

$$N_{,1} + t = 0 \quad T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0$$

- Les conditions aux limites statiques sont :

$$\begin{aligned} N(0) &= -F_0 & N(L) &= F_L & T(0) &= -P_0 & T(L) &= P_L \\ M(0) &= -\mathcal{M}_0 & M(L) &= \mathcal{M}_L \end{aligned}$$

- Les équations de comportement global sont :

$$N = ESU_{,1} \quad T = \mu S(\theta + V_{,1}) \quad M = EI\theta_{,1}$$

- Contrainte locale  $\sigma_{11}$  :

$$\sigma_{11} = N/S + Mx_3/I$$

- Schéma de résolution des problèmes de flexion :

$$T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0 \quad \theta_{,1} = M/EI \quad V_{,1} = -\theta + T/\mu S$$

- La théorie de Navier–Bernoulli s'applique pour les poutres minces qui ne sont pas capables de supporter un cisaillement. Dans ce cas, on a simplement :  $\theta = -V_{,1}$   $M = -EIV_{,11}$
- Dans le cas de poutre sandwich symétrique, il n'y a pas de couplage traction–flexion, et on peut appliquer les mêmes équations, à condition d'effectuer des moyennes pondérées par le module de Young sur la section complète, et, dans le cas du cisaillement, en première approximation, sur la section de mousse.
- Energie potentielle selon la théorie de Navier-Bernoulli :

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_L (E S U_{,1}^2 + E I V_{,11}^2) dx_1 - W_{ext}$$

- Première variation de l'énergie potentielle selon la théorie de Navier-Bernoulli :

$$\mathcal{F}_{,u}(u)[u'] = \int_L (E S U_{,1} U'_{,1} + E I V_{,11} V'_{,11}) dx_1 - \delta W_{ext}$$

## Rhéologie

Loi de Hooke isotrope :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \underline{\underline{\sigma}} - \nu \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}], \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}]$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1 + \nu} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} \right], \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left[ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right]$$

Si le chargement est appliqué sous la forme d'un historique quelconque de contraintes, la relation contrainte-déformation est obtenue à partir de l'intégrale de la complaisance de fluage :

$$\sigma(t) = \sigma_o h(t) + \int_0^t \dot{\sigma}(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

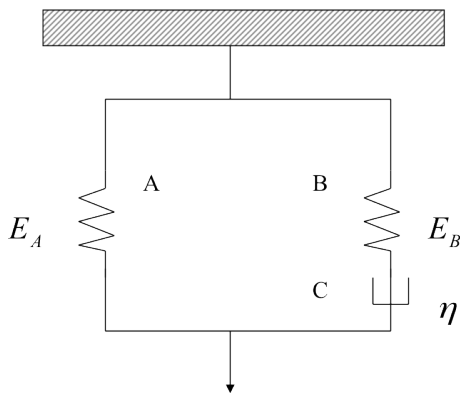
$$\varepsilon(t) = J_o(t) \sigma_o + \int_0^t J_c(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau$$

Si le chargement est appliqué sous la forme d'un historique quelconque de déformations, la réponse en contrainte est donnée par :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_o h(t) + \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$\sigma(t) = E_r(t) \varepsilon_o + \int_0^t E_r(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau$$

Pour un matériau donné, la complaisance de fluage  $J_c(t)$  et la fonction de relaxation  $E_r(t)$  peuvent être déterminées expérimentalement ou à partir d'un modèle de comportement. La complaisance de fluage ou le module de relaxation peuvent être utilisés pour évaluer n'importe quel historique de chargement.



Modèle standard linéaire

$$E_r(t) = E_A + E_B \exp\left(-\frac{E_B}{\eta} t\right)$$

$$R_{rg} = E_r(0^+) = E_A + E_B$$

$$E_{re} = E_r(\infty) = E_A$$

$$\tau_r = \frac{\eta}{E_B}$$

$$J_c(t) = [J_{ce} - (J_{ce} - J_{cg}) \exp(-t/\tau_c)] h(t)$$

$$J_{cg} = J_c(0^+) = \frac{1}{E_A + E_B}, \quad J_{ce} = J_c(\infty) = \frac{1}{E_A}, \quad \tau_c = \frac{\tau_r (E_A + E_B)}{E_A}$$

Réponse dynamique

$$G' = \frac{\sigma_o \cos \delta}{\gamma_o}, \quad G'' = \frac{\sigma_o \sin \delta}{\gamma_o}, \quad \tan \delta = \frac{G''}{G'}$$

Capacité d'amortissement = énergie dissipée / énergie stockée =  $\pi/2 \tan \delta$ .

## Hyperélasticité

- Tenseur gradient de déformation  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  tel que :

$$d\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} d\underline{\underline{X}} \quad \text{avec } F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

- Transformation de l'élément de volume :

$$dv = J dv_o \quad \text{avec } J = \det(\underline{\underline{\mathbf{F}}})$$

- Décomposition polaire :

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{1}}} \text{ et } \det \underline{\underline{\mathbf{R}}} = 1$$

- Tenseur de dilatation de Cauchy-Green gauche :

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^2$$

- Tenseur de dilatation de Cauchy-Green droit :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}}^2$$

- Tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{C}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{U}}}^2 - \underline{\underline{\mathbf{1}}})$$

- Tenseur de Boussinesq :  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$  tel que

$$J \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T$$

- Second tenseur de Pola-Kirchhoff :  $\underline{\underline{\boldsymbol{\Pi}}}$  tel que

$$J \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\underline{\boldsymbol{\Pi}}}\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T$$

- Invariants de  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} &= \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} &= I_1 \underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \\ \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} &= I_3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} \end{aligned}$$

- Dilatations principales :

$$\underline{\underline{\mathbf{U}}} = \lambda_1 m^{(1)} \otimes m^{(1)} + \lambda_2 m^{(2)} \otimes m^{(2)} + \lambda_3 m^{(3)} \otimes m^{(3)} \quad (1)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \lambda_1 n^{(1)} \otimes n^{(1)} + \lambda_2 n^{(2)} \otimes n^{(2)} + \lambda_3 n^{(3)} \otimes n^{(3)} \quad (2)$$

– Invariants du tenseur  $\underline{\mathbf{M}}$  ( $\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{C}}$  ou  $\underline{\mathbf{B}}$ ) :

$$\begin{cases} I_1 = \text{trace}(\underline{\mathbf{M}}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr}\underline{\mathbf{M}})^2 - \text{tr}\underline{\mathbf{M}}^2] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\ I_3 = \det(\underline{\mathbf{M}}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{cases}$$

– Comportement hyperélastique incompressible :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = 2 \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \underline{\mathbf{B}} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \underline{\mathbf{B}}^2 \right] - p \underline{\mathbf{1}}$$

## Mécanique linéaire de la rupture

- Facteur d'intensité de contrainte en mode I :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \langle \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \rangle_+ \sqrt{2\pi r} \right) = \langle \sigma_\infty \rangle_+ \sqrt{\pi a} \quad (3)$$

- Taux de restitution d'énergie :

$$G = -\frac{d\mathcal{F}}{dA} \quad (4)$$

- Cas d'une charge ponctuelle sur une structure de complaisance  $\mathcal{C}$  :

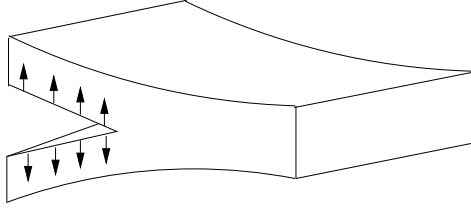
$$G = \frac{1}{2} F^2 \frac{d\mathcal{C}}{dA}$$

- Relations entre facteur d'intensité de contrainte et taux de restitution d'énergie :

$$\text{Contraintes planes : } G = K_I^2/E$$

$$\text{Déformations planes : } G = (1 - \nu^2)K_I^2/E$$

- Critère d'Irwin :
  - $K_I \leq K_{IC}$ ,  $K_{IC}$  ténacité,
  - si  $K_I < K_{IC}$  il n'y a pas de propagation de la fissure,
  - si  $K_I = K_{IC}$  il y a propagation possible de la fissure.
- Loi de Griffith (en 2D) :
  - $da \geq 0$ ,  $dA = 2b da$ ,
  - si  $G < G_c$  il n'y a pas de propagation de la fissure,
  - si  $G = G_c$  il y a propagation possible de la fissure.
- Solutions en pointe de fissure pour les mode I, II et III sur la figure 1.



a. Mode I : ouverture

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (5)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (6)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (7)$$

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (8)$$

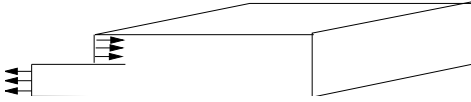
$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \quad (9)$$

avec :  $\kappa = 3 - 4\nu$  en déformations planes

(10)

et :  $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$  en contraintes planes

(11)



b. Mode II : glissement dans le plan

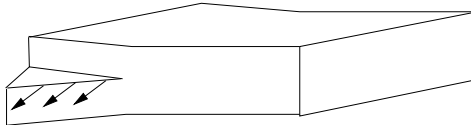
$$\sigma_{11} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \quad (12)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (13)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (14)$$

$$u_1 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \quad (15)$$

$$u_2 = -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (16)$$



c. Mode III : glissement antiplan

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (17)$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (18)$$

$$u_3 = -\frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (19)$$

FIGURE 1 – Les différents modes de fissuration et les champs singuliers associés



## Introduction à la théorie de stabilité des systèmes conservatifs

- Propriété des systèmes conservatifs : Il existe une énergie potentielle  $\mathcal{F}$  telle que,

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = -\mathcal{F}_{,u}(\underline{u})[\underline{u}'] \quad \forall \underline{u}' \in \mathcal{V} \quad (20)$$

- Première variation de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{F}_{,u}(\underline{u})[\underline{u}'] = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \frac{\mathcal{F}(\underline{u} + \beta \underline{u}') - \mathcal{F}(\underline{u})}{\beta} \right) \quad \forall \underline{u}'$$

- Une position d'équilibre  $\underline{u}_e$  est indépendante du temps. Elle vérifie nécessairement :

$$\mathcal{F}_{,u}(\underline{u}_e)[\underline{u}'] = 0 \quad \forall \underline{u}' \in \mathcal{V} \quad (21)$$

- Une position d'équilibre  $\underline{u}_e$  est stable si une petite perturbation des données initiales ( $\underline{u}_{t=0} = \underline{u}_e, \dot{\underline{u}}_{t=0} = 0$ ) n'entraîne qu'une faible évolution dynamique autour de l'équilibre.
- Théorème de Lyapunov : soit  $s_k$  une valeur propre du système dynamique associée au mode propre  $\underline{\psi}_k$ , alors

$$s_k^2 = -\frac{\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}_k, \underline{\psi}_k]}{\int_{\Omega} \rho \underline{\psi}_k \underline{\psi}_k d\Omega}$$

- Si  $\Re(s_k) < 0$  pour tout  $k$ , l'équilibre est asymptotiquement stable (cas des systèmes dissipatifs).
- S'il existe un indice  $k$  tel que  $\Re(s_k) > 0$  alors l'équilibre est instable. Dans ce cas  $\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}_k, \underline{\psi}_k] < 0$ .
- Si  $\Re(s_k) \leq 0$  pour tout  $k$  et s'il existe au moins un indice  $k$  tel que  $\Re(s_k) = 0$  alors on ne sait pas conclure.
- L'étude de la seconde variation de l'énergie potentielle permet les conclusions suivantes :
  - si  $\forall \underline{\psi}_k \in \mathcal{V} \quad \mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}, \underline{\psi}] > 0$  le théorème de Lejeune-Dirichlet nous permet d'affirmer que la position d'équilibre  $\underline{u}_e$  est stable ;
  - s'il existe  $\underline{\psi}_k \in \mathcal{V}$  tel que  $\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}, \underline{\psi}] = 0$  alors il peut y avoir bifurcation de la courbe d'équilibre,
  - s'il existe  $\underline{\psi}_k \in \mathcal{V}$  tel que  $\mathcal{F}_{,uu}(\underline{u}_e)[\underline{\psi}, \underline{\psi}] < 0$  alors le théorème de Lyapunov nous permet d'affirmer que la position d'équilibre est instable.

- Energie potentielle d'une poutre mince (sans cisaillement) en transformations finie à déformation modérée :

$$\mathcal{F}(\underline{u}) = \int_{c_0} \left( \frac{1}{2} E S (U_{,1} + \frac{1}{2} V_{,1}^2)^2 + \frac{1}{2} E I V_{,11}^2 \right) dx_1 - W_{ext}(\underline{u}, \lambda)$$

- Etude de bifurcation :

$$E I V_{\phi,111} - N V_{\phi,1} = 0, \quad N = -\lambda, \quad V_{\phi,1}(x_o) V_{\phi,11}(x_o) = 0 \text{ au bord}$$

- Calcul de la seconde variation de l'énergie potentielle d'une poutre mince, avec  $\underline{\phi} = (U_{\phi}, V_{\phi})$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{,uu}(\underline{u})[\underline{u}', \underline{\phi}] = \int_0^L \left( E S (U_{\phi,1} + V_{\phi,1} V_{,1}) (U'_{,1} + V'_{,1} V_{,1}) \right. \\ \left. + E S (U_{,1} + \frac{1}{2} V_{,1}^2) V'_{,1} V_{\phi,1} \right. \\ \left. + E I V'_{,11} V_{\phi,11} \right) dx_1 \end{aligned}$$