V
METHODES SEMI INVERSES

I. BILAN

I.1. Nombre d'inconnues, nombre d'équations

En élasticité linéaire, et sous l'hypothèses des petites perturbations, *le nombre d'inconnues dans un problème de mécanique des milieux continus est égal à 15*. En effet, l'objectif est de déterminer en chaque point du solide le vecteur déplacement (trois composantes), le tenseur des déformations (six composantes indépendantes) et le tenseur des contraintes (six composantes indépendantes).

Pour résoudre un tel problème, nous devons donc disposer de *15 équations*. Ces équations sont :

- ***les trois équations d'équilibre*** :

en notation symbolique de Gibbs :

$$\boxed{\overrightarrow{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)+\vec{f}=0} \qquad (1_a)$$

en notation indicielle :

$$\boxed{\underbrace{\partial\sigma_{ij}/\partial x_j}_{div\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)}+f_i=0} \qquad (1_b)$$

L'indice muet j est répété et indique donc une sommation. L' indice non répété i varie de 1 à 3 correspondant aux projections des équations d'équilibre sur l'axe n° i.

- ***les six équations de compatibilités des déformations***

Ces équations assurent que les déformations dérivent d'un champ de déplacement.

en notation symbolique de Gibbs :

$$\boxed{\Delta\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)+gr\vec{a}d\left\{gr\vec{a}d\left[trace\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\right]\right\}=gr\vec{a}d\left[div\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\right]+\left\{gr\vec{a}d\left[div\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\right]\right\}^T} \qquad (2_a)$$

en notation indicielle :

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}\varepsilon_{ij}}_{\Delta\varepsilon_{ij}}+\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\overbrace{\varepsilon_{kk}}^{trace\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}}_{gr\vec{a}d\left\{gr\vec{a}d\left[trace\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\right]\right\}}-\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{ik}\right)}_{gr\vec{a}d\left[div\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\right]}-\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\varepsilon_{jk}=0} \qquad (2_b)$$

L'indice muet k est répété et indique donc une sommation. Les deux indices non répétés i et j varient chacun de 1 à 3.

- ***La loi de Hooke d'un matériau isotrope élastique linéaire***
-

en notation symbolique de Gibbs :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = 2G\left\{\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\upsilon}{1-2\upsilon} trace\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{I}}\right\} ou\, \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\underline{\underline{\sigma}} - \upsilon\, trace\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)\underline{\underline{I}}\right\}} \qquad (3_a)$$

en notation indicielle :

$$\boxed{\sigma_{ij} = \frac{1}{E}\left\{\varepsilon_{ij} + \frac{\upsilon}{(1+\nu)}\varepsilon_{ll}\delta_{ij}\right\} \text{ ou } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\sigma_{ij} - \upsilon\sigma_{ll}\delta_{ij}\right\}} \qquad (3_b)$$

L'indice muet l est répété et indique donc une sommation. Les deux indices non répétés i et j varient chacun de 1 à 3.

On constate que les équations sont en fait des équations différentielles. Leur intégration se fera donc à une constante près, qui sera déterminée à l'aide des conditions aux limites en pression ou en déplacement :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{u} = \vec{U} \text{ sur } S_u \\ \underline{\underline{\sigma}}.\vec{n} = \vec{T} \text{ sur } S_\sigma \end{cases}} \qquad (4)$$

I.2. Méthodes de résolution

Il existe beaucoup de méthodes de résolution des équations précédentes. Toutefois, les méthodes dites « semi-inverses » présentent l'avantage de fournir des expressions analytiques pour les champs de déplacements, de déformations et de contraintes dans le solide. Ce paragraphe est consacré aux méthodes semi-inverses, dans le cas de matériaux homogènes, au comportement élastique linéaire isotrope. De plus, nous négligerons les effets d'accélération (résolution statique). En effet, ces hypothèses permettent de mettre en place des équations relativement simples à résoudre.

Il existe deux grandes méthodes de résolution semi-inverse de ce type de problème. La première, dite « résolution en contraintes », consiste à écrire toutes les conditions que doivent satisfaire les contraintes dans la structure, pour en déduire une solution. La seconde, dite « résolution en déplacements », consiste à écrire les équations à l'aide du vecteur des déplacements.

II. EQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ELASTICITE

II.1. Equations de Beltrami-Mitchell

II.1.1. Cas général : forces de volume non nulles

Reprenons les équations de compatibilité de Saint-Venant écrites sous forme indicielle (2_b). Les déformations peuvent être exprimées en fonction des contraintes par la loi de Hooke pour un matériau élastique linéaire isotrope (3_b). En substituant l'expression des déformations en fonctions des contraintes dans les équations de compatibilité, le premier terme de l'équation (2_b) s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} - \upsilon \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_k \partial x_k}\delta_{ij}\right\}$$

En effet, les dérivées du tenseur $\underline{\underline{\delta}}$ sont nulles. Le deuxième terme se transforme de façon similaire.Pour transformer les deux derniers termes de l'équation de compatibilité, nous exprimons les déformations en fonction des contraintes par la loi de Hooke, puis nous utilisons l'équation d'équilibre (1_b). Ainsi le troisième terme de l'équation de compatibilité s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\varepsilon_{ik} = -\frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \upsilon \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_j \partial x_i}\right\}$$

Et nous obtenons la forme finale de l'équation de compatibilité exprimée en fonction des contraintes

$$(1+\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} + (1+\nu)\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right\} + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{\partial f_l}{\partial x_l}\delta_{ij} = 0$$

soit en notation symbolique de Gibbs :

$$\boxed{(1+\nu)\Delta\underline{\underline{\sigma}}+\overrightarrow{grad}\left\{\overrightarrow{grad}\left[trace\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)\right]\right\}+(1+\nu)\left\{\overrightarrow{grad}\left[\vec{f}\right]+\left\{\overrightarrow{grad}\left[\vec{f}\right]\right\}^T\right\}+div\left[\vec{f}\right]\underline{\underline{I}}=0} \qquad (5)$$

II.1.2. Forces de volume nulles ou constantes

Quand les forces de volumes sont nulles ou constantes, l'équation de compatibilité se réduit à :

$$\boxed{(1+\nu)\Delta\underline{\underline{\sigma}}+\overrightarrow{grad}\left\{\overrightarrow{grad}\left[trace\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)\right]\right\}=0} \qquad (6)$$

Les équations (6) ont été obtenue par Beltrami en 1892. Elles ont été généralisées par Mitchell en 1900 pour y inclure l'existence de forces de volume. Elles sont généralement désignées sous le nom d'équations de Beltrami-Mitchell. En notation indicielle, les équations (6) s'écrivent :

$$(1+\nu)\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}+\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j}=0$$

Ceci correspond à un système de 9 identités (i=1..3, j=1..3). Si l'on somme les égalités pour (i=j=1..3), on obtient par contraction des indices :

$$(1+\nu)\frac{\partial^2\sigma_{mm}}{\partial x_k \partial x_k}+\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_m \partial x_m}=(2+\nu)\frac{\partial^2\sigma_{mm}}{\partial x_k \partial x_k}=0 \rightarrow \Delta\sigma_{mm}=0$$

$$\boxed{\Delta\sigma_{mm}=0} \qquad (7)$$

Le premier invariant du tenseur contrainte (la trace) est une fonction harmonique (à Laplacien nul). A partir des équations (6) et (7) il est facile de montrer que toutes les contraintes sont biharmoniques :

$$\boxed{\Delta\Delta\sigma_{ij} = 0} \qquad (8)$$

Les équations de Beltrami-Mitchell et les conditions aux limites (4) sont suffisantes pour déterminer le tenseur des contraintes sans équivoque. La formulation en contraintes est utilisée pour résoudre des problèmes plans (contraintes planes dans les tôles minces ou déformations planes). Cependant pour des problèmes tridimensionnels, ces équations sont rarement utilisés. On part plutôt de l'approche en déplacement présentée au paragraphe suivant .

II.2. Formulation du problème d'élasticité en fonction des déplacements

II.2.1. Equation de Navier

Au paragraphe précédent nous avons établi les équations qui gouvernent le tenseur des contraintes dans un corps élastique. Nous allons voir qu'on peut résoudre certains problèmes d'un manière plus simple en prenant comme inconnue le vecteur déplacement . En effet, l'équation d'équilibre s'écrit en fonction des contraintes sous la forme :

$$\overrightarrow{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) + \vec{f}_v = 0 \text{ soit } \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

La loi de Hooke d'un matériau élastique linéaire isotrope permet d'exprimer les contraintes en fonction des déformations sous la forme $\underline{\underline{\sigma}} = 2G\left\{\underline{\underline{\varepsilon}} + \upsilon / (1-2\upsilon)\, trace\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{I}}\right\}$. L'équation d'équilibre s'écrit alors en fonction des déformations :

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} + \frac{f_i}{2G} = 0$$

L'expression du tenseur des déformations en fonction des déplacements permet de simplifier l'équation précédente :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\varepsilon_{ij}}+\frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{kk}}+\frac{f_i}{2G}=0$$

Nous supposons que le champ des déplacements est continûment dérivable à l'ordre 2 et que nous pouvons intervertir l'ordre des dérivées dans le premier terme pour faire apparaître la dérivée de la divergence du champ des déplacements. Nous obtenons l'expression de l'équation fondamentale de l'élasticité appelée aussi équation de Navier ou de Lamé sous la forme suivante :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{kk}}+\frac{f_i}{G}=0} \qquad (9_a)$$

Cette équation prend une forme simple en notation symbolique de Gibbs :

$$\boxed{\Delta\vec{u}+\frac{1}{1-2\nu}\overrightarrow{grad}\left[div\left(\vec{u}\right)\right]+\frac{\vec{f}}{G}=0} \qquad (9_b)$$

Soit en détaillant le Laplacien du champ des déplacements $\Delta\vec{u}$ et en supposant les forces volumiques nulles, on trouve

$$\boxed{2\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)\overrightarrow{grad}\left[div\left(\vec{u}\right)\right]-\overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{u}\right)\right]=0} \qquad (10)$$

II.2.2. Elimination des forces de volume dérivant d'un potentiel

Nous allons monter comment on peut éliminer l'action des forces de volume dans le cas particulier où elles dérivent d'un potentiel, c'est-à-dire : $\vec{f}=\overrightarrow{grad}\left(V\right)$. Les forces de gravitation, celles dues à une variation de température, les forces d'inertie due à une translation, celles dues à une rotation à vitesse constante rentrent dans cette catégorie ; mais les forces d'inertie dues à une accélération angulaire, par exemple, n'y rentrent pas.

En tenant compte de $\vec{f} = \overrightarrow{grad}(V)$, l'équation de Navier prend la forme :

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\overrightarrow{grad}\left[div(\vec{u})\right] + \frac{\overrightarrow{grad}(V)}{G} = 0$$

II.3. Principe de superposition et unicité de la solution

II.3.1. Le principe de superposition

L'équation de Navier constitue un système de 3 équations aux dérivées secondes. Le champ inconnu $\vec{u}$ intervient linéairement et les coefficients des dérivées sont indépendants de l'inconnu $\vec{u}$. L'équation de Navier constitue donc un ***système linéaire*** pour le champ des déplacement $\vec{u}$. Considérons un corps Ω soumis à un champ de forces volumiques $\vec{f}^{(A)}$ et à des forces superficielles $\vec{T}^{(A)}$ sur $\partial\Omega$. Soit $\vec{u}^{(A)}$ la solution de l'équation de Navier pour le chargement $\left\{\vec{f}^{(A)},\vec{T}^{(A)}\right\}$. Considérons le même corps Ω soumis à un champ de forces volumiques $\vec{f}^{(B)}$ et à des forces superficielles $\vec{T}^{(B)}$ sur la même frontière $\partial\Omega$. Soit $\vec{u}^{(B)}$ la solution de l'équation de Navier pour le chargement $\left\{\vec{f}^{(B)},\vec{T}^{(B)}\right\}$. Alors le champ des déplacements $\vec{u}^{(A)}+\vec{u}^{(B)}$ est la solution de Navier pour le chargement $\left\{\vec{f}^{(A)}+\vec{f}^{(B)},\vec{T}^{(A)}+\vec{T}^{(B)}\right\}$.

Ce principe a une importance exceptionnelle dans la théorie de l'élasticité. Cependant, il n'est pas applicable sans restriction. En effet, en établissant les équations d'équilibre intérieur et à la surface, nous avons admis implicitement que les déformations du corps étaient très petites, en sorte que la forme et la position d'un élément de volume étaient les mêmes avant et après déformation. *En conséquence, ces équations, et toutes les conséquences que nous en avons tirées, ne sont valables qu'aussi longtemps que les petits déplacements élastiques du corps n'affectent pas de façon sensible l'action des forces extérieures.*

Or, il y a des cas où la déformation du corps doit être prise en considération, ce sont tous les problèmes d'instabilité élastique. Dans ce cas, l'analyse correcte exige la prise en compte des termes quadratiques dans le tenseur des déformations. Dès lors l'équation (10) cesse d'être linéaire et le principe de superposition devient inapplicable. Ce principe est également inapplicable dans le problème du contact entre deux corps élastiques (problème de

Hertz) parce que l'étendue de la surface de contact varie selon la grandeur de l'effort appliqué de sorte que les conditions aux limites dépendent, ici encore de la déformation du corps.

II.3.2. Unicité de la solution (G. Kirchhoff)

Considérons un corps Ω soumis à un champ de forces volumiques $\vec{f}$ et à des forces superficielles $\vec{T}$ sur $\partial\Omega$. Soit $\vec{u}$ la solution de l'équation de Navier pour ce chargement. Le champ $\vec{u}$, le champ des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}} = \left\{grad(\vec{u}) + [grad(\vec{u})]^T\right\}/2$ et le champ des contraintes associés à $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par la loi de Hooke sont uniques. En effet supposons l'existence de deux champs $\left\{\vec{u}^{(1)}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}, \underline{\underline{\sigma}}^{(1)}\right\}$ et $\left\{\vec{u}^{(2)}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)}, \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}\right\}$ solutions de l'équation de Navier pour le chargement $\vec{f}$ dans Ω, $\vec{T}$ sur S_σ et $\vec{U}$ sur S_u. Le principe de superposition permet de conclure que la différence des deux champs $\left\{\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)}, \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}\right\}$ est solution de l'équation de Navier pour un chargement à forces de volume $\vec{f}$ nulles et les conditions limites $\vec{T} = 0$ sur S_σ et $\vec{U} = 0$ sur S_u. Nous pouvons notamment écrire pour les contraintes :

$$\overrightarrow{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}\right) = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}\right) : \vec{n} = 0 \text{ sur } S_\sigma$$

Il existerait donc une solution non nulle des équations de la théorie de l'élasticité pour laquelle toutes les forces superficielles et de volume seraient nulles. Mais alors, le travail effectué par ces forces lors de la mise en charge serait également nul et il en résulterait la nullité de l'énergie potentielle interne :

$$W = \frac{1}{2}\int_V \left(\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}\right) : \underline{\underline{\underline{\underline{M}}}} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}\right) dv$$

Or W est une forme quadratique définie positive qui ne peut s'annuler que si toutes les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$ sont identiquement nulles.

La démonstration ci-dessus a les mêmes limitations que celles discutées pour le principe de superpositon. Elle n'est donc pas applicables aux phénomènes d'instabilité. De plus, il importe de souligner que la démonstration est basée sur l'hypothèse que l'énergie de déformation est uniquement due à l'action des forces extérieures et que le corps n'est le siège d'aucune contrainte quand il est libérée de l'action des forces extérieures. Or, il se fait fréquemment que les corps élastiques sont le siège de contraintes résiduelles, dues le plus souvent à des déformations non élastiques que la pièce a subies lors de sa fabrication. Ces contraintes résiduelles sont étudiées dans le cours de plasticité.

III EXERCICES RESOLUS

III.1. Démontez les équations de Beltrami-Mitchel

Reprenons les équations de compatibilité de Saint-Venant écrites sous forme indicielle

$$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\varepsilon_{ij}}_{\Delta\varepsilon_{ij}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\underbrace{\varepsilon_{kk}}_{trace(\underline{\varepsilon})}}_{\overline{grad}\{\overline{grad}[trace(\underline{\varepsilon})]\}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{ik}\right)}_{div(\underline{\varepsilon})}}_{\overline{grad}[div(\underline{\varepsilon})]} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\varepsilon_{jk} = 0$$

L'indice muet k (en gris) est répété et indique donc une sommation. Les deux indices non répétés i et j varient chacun de 1 à 3. Les déformations peuvent être exprimées en fonction des contraintes par la loi de Hooke pour un matériau élastique linéaire isotrope :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{ll}\delta_{ij}\right\}$$

Ici nous utilisons l (en gris) comme indice muet. En substituant l'expression précédente des déformations en fonctions des contraintes dans les équations de compatibilité. Le premier terme de l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} - \nu\frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_k \partial x_k}\delta_{ij}\right\}$$

En effet, les dérivées du tenseur $\underline{\underline{\delta}}$ sont nulles. Pour écrire le deuxième terme de l'équation de compatibilité en fonction des contraintes, nous exprimons d'abord la trace du tenseur des déformations en fonction de la trace du tenseur des contraintes en utilisant la loi de Hooke. La loi de Hooke d'un matériau élastique linéaire isotrope permet d'écrire :

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\sigma_{kk} - \nu\sigma_{ll}\underbrace{\delta_{kk}}_{3}\right\} = \frac{(1-2\nu)\sigma_{kk}}{E} = \frac{(1-2\nu)\sigma_{ll}}{E} = \frac{(1-2\nu)\sigma_{rr}}{E}$$

Le choix particulier de l'indice muet (k, l ou r) n'a évidemment aucune importance. Ainsi le deuxième terme de l'équation de compatibilité s'écrit comme suit en fonction des contraintes :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\varepsilon_{kk} = \frac{(1-2\nu)}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j}$$

Pour transformer les deux derniers termes de l'équation de compatibilité, nous exprimons les déformations en fonction des contraintes par la loi de Hooke, puis nous utiliserons l'équation d'équilibre.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\varepsilon_{ik} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left\{(1+\nu)\sigma_{ik} - \upsilon\sigma_{ll}\delta_{ik}\right\} = \frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\ \sigma_{ik}}{\partial x_k}\right) - \upsilon\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_j \partial x_k}\delta_{ik}\right\}$$

$$= \frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\ \sigma_{ik}}{\partial x_k}\right) - \upsilon\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_j \partial x_i}\right\}$$

Les indices k et l (en gris) sont muets. L'expression précédente peut se simplifier par l'équation d'équilibre. En effet

$$\overrightarrow{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) + \vec{f}_v = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \text{ d'où } \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\ \sigma_{ik}}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Ainsi le troisième terme de l'équation de compatibilité s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\varepsilon_{ik} = -\frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\frac{\partial\ f_i}{\partial x_j} + \upsilon\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_j \partial x_i}\right\}$$

Et le dernier terme de l'équation de compatibilité prend la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\varepsilon_{jk} = -\frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \upsilon\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_j \partial x_i}\right\}$$

L'équation de compatibilité peut ainsi s'écrire

$$(1+\nu)\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} - \upsilon\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_k \partial x_k}\delta_{ij} + (1-2\nu)\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$+(1+\nu)\frac{\partial\ f_i}{\partial x_j} + \upsilon\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_j \partial x_i} + (1+\nu)\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \upsilon\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_j \partial x_i} = 0$$

$$(1+\nu)\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} - \upsilon\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_k \partial x_k}\delta_{ij} + \frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} + (1+\nu)\left\{\frac{\partial\ f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right\} = 0$$

L'équation précédente correspond à 9 équations scalaires (i=1..3,j=1..3). Si le second membre de chaque équation scalaire est nul, la somme des seconds membres doit être nulle aussi. Nous sommons toutes les équations scalaires en opérant une contraction sur les indices i et j.

$$(1+\nu)\frac{\partial^2\sigma_{ii}}{\partial x_k\partial x_k}-\upsilon\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_k\partial x_k}3+\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i\partial x_j}+2(1+\nu)\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=0\rightarrow\frac{\partial^2\sigma_{ii}}{\partial x_k\partial x_k}=\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

Le troisième terme de l'équation de compatibilité peut donc être remplacé par

$$\frac{\partial^2\sigma_{ii}}{\partial x_k\partial x_k}=\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

Et nous obtenons la forme finale de l'équation de compatibilité exprimée en fonction des contraintes

$$(1+\nu)\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_k\partial x_k}+\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i\partial x_j}+(1+\nu)\left\{\frac{\partial\ f_i}{\partial x_j}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right\}+\frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{\partial f_l}{\partial x_l}\delta_{ij}=0$$

Cette équation peut s'écrire en notation symbolique de Gibbs en identifiant les différents termes comme suit :

$$(1+\nu)\Delta\underline{\underline{\sigma}}+\overrightarrow{grad}\left\{\overrightarrow{grad}\left[trace\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)\right]\right\}+(1+\nu)\left\{\overrightarrow{grad}\left[\vec{f}\right]+\left\{\overrightarrow{grad}\left[\vec{f}\right]\right\}^T\right\}+div\left[\vec{f}\right]\underline{\underline{I}}=0$$

III.2. Démontrez les équations de Navier

L'équation d'équilibre s'écrit en fonction des contraintes sous la forme $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j+f_i=0$. La loi de Hooke d'un matériau élastique linéaire isotrope permet d'exprimer les contraintes en fonction des déformations sous la forme $\sigma_{ij}=2G\left\{\varepsilon_{ij}+\left[\nu/(1-2\nu)\right]\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right\}$. L'équation d'équilibre s'écrit alors en fonction des déformations :

$$\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial x_i}+\frac{f_i}{2G}=0$$

L'expression du tenseur des petites déformations en fonction des déplacements sous $\varepsilon_{ij}=\left(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i\right)/2$ permet de simplifier l'équation précédente :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\varepsilon_{ij}}+\frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{kk}}+\frac{f_i}{2G}=0$$

Nous supposons que le champ des déplacements est continûment dérivable à l'ordre 2 et que nous pouvons intervertir l'ordre des dérivées dans le premier terme pour faire apparaître la dérivée de la divergence du champ des déplacements :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{\varepsilon_{kk}}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{kk}}+\frac{f_i}{G}=0$$

Nous obtenons l'expression de l'équation fondamentale de l'élasticité appelée aussi équation de Navier ou de Lamé sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{kk}}+\frac{f_i}{G}=0$$

Cette équation prend une forme simple en notation symbolique de Gibbs :

$$\Delta\vec{u}+\frac{1}{1-2\nu}\overrightarrow{grad}\left[div(\vec{u})\right]+\frac{\vec{f}}{G}=0$$

Soit en détaillant le Laplacien du champ des déplacements $\Delta\vec{u}$ et en supposant les forces volumiques nulles, on trouve

$$\Delta\vec{u}=\overrightarrow{grad}\left[div(\vec{u})\right]-\overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}(\vec{u})\right]$$

$$2\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)\overrightarrow{grad}\left[div(\vec{u})\right]-\overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}(\vec{u})\right]=0$$