<u>*TD 1 : Déformations*</u>

>

Exercice 1 :

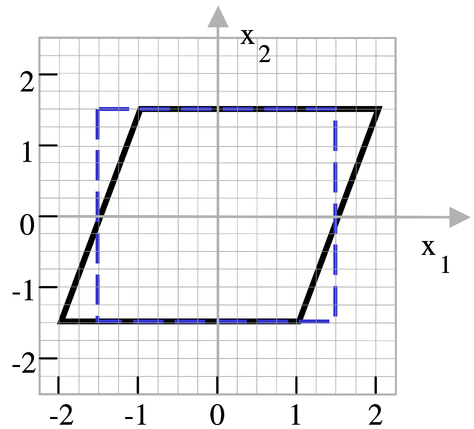


Figure 1 : disque soumis à glissement simple

Un disque plat est soumis à du glissement simple (Figure 1).

Calculer :

- le tenseur gradient de la transformation
- le tenseur des dilatations de Cauchy-Green
- la dilatation selon les trois axes X_1, X_2
- l'angle entre les axes 1 et 2 après transformation
- le tenseur des déformations de Green-Lagrange
- la déformation selon les trois axes
- le tenseur petites déformations

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2/3 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}}$$

Tenseur gradient de la transformation

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\underline{F}}(\vec{X},t) = \overrightarrow{grad}[\vec{\Phi}(\vec{X},t)] = \overrightarrow{grad}[\vec{x}(\vec{X},t)] \\ F_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} \end{array}}$$

$$F := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenseur des dilatations de Cauchy-Green

$$\boxed{d\vec{x}^T . d\vec{x}' = d\vec{X}^T \underline{\underline{C}}\ d\vec{X}' \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dilatation dans une direction

$$\boxed{\lambda\left(d\vec{X}\right) = \lambda\left(\vec{t}_0\right) \begin{cases} = \sqrt{\vec{t}_0^T \underline{\underline{C}}\ \vec{t}_0} \\ = \dfrac{dl}{dl_0} \\ = \left\| \underline{\underline{F}}\ \vec{t}_0 \right\| \end{cases}}$$

$$\lambda_1 := 1 \qquad \lambda_2 := \frac{1}{3}\sqrt{10} \qquad \lambda_3 := 1$$

Glissement de deux directions orthogonales

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{d\vec{x}^{T} d\vec{x}'}{\|d\vec{x}\|\|d\vec{x}'\|} = \frac{\vec{t}_0^{T} \underline{\underline{C}} \vec{t}_0'}{\lambda(\vec{t}_0)\lambda(\vec{t}_0')}}$$

t0p[1]:=0: t0p[2]:=1: t0p[3]:=0:
alpha:=Angle(C,t0,t0p);

$$\alpha := 71.56505115$$

déformation de Green-Lagrange

$$E := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hypothèse des petites perturbations

déplacement en fonction des coordonnées

$$U := \left[\frac{1}{3} X_2,\ 0,\ 0\right]$$

tenseur H

$$\boxed{\underline{\underline{H}} = \overrightarrow{grad}\left[\vec{U}\left(\vec{X},t\right)\right] \quad soit \quad H_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j}} \qquad \boxed{\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}}$$

$$H := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenseur des petites déformations

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)}$$

$$\varepsilon := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Différence entre E et ε

$$\delta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>

Exercice 2 : Déformation uniaxiale

Un solide est déformé en déformation uni-axiale. selon X_1. :

$$x_1 := X_1 (1 + \beta t)$$

où t correspond au temps et β est une constante arbitraire.

Calculer :

- le tenseur gradient de la transformation
- le tenseur des dilatations de Cauchy-Green
- la dilatation selon les trois axes X_1, X_2
- l'angle entre les axes 1 et 2 après transformation
- le tenseur des déformations de Green-Lagrange
- la déformation selon les trois axes
- le tenseur gradient des déplacements
- le tenseur petites déformations

Définition de la transformation

description de la transformation

$$x_1 := X_1 (1 + \beta t)$$

Tenseur gradient de la transformation

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\underline{F}}(\vec{X},t) = \overrightarrow{grad}[\vec{\Phi}(\vec{X},t)] = \overrightarrow{grad}[\vec{x}(\vec{X},t)] \\ F_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} \end{array}}$$

$$F := \begin{bmatrix} 1 + \beta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenseur des dilatations de Gauchy-Green

$$\boxed{d\vec{x}^{T}.d\vec{x}' = d\vec{X}^{T}\underline{\underline{C}}\ d\vec{X}' \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^{T}\underline{\underline{F}}}$$

$$C := \begin{bmatrix} (1+\beta\, t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dilatation dans la direction des trois axes

$$\boxed{\lambda\left(d\vec{X}\right) = \lambda\left(\vec{t}_0\right) \begin{cases} = \sqrt{\vec{t}_0^{\,T}\ \underline{\underline{C}}\ \vec{t}_0} \\ = \dfrac{dl}{dl_0} \\ = \left\| \underline{\underline{F}}\ \vec{t}_0 \right\| \end{cases}}$$

$$\lambda_1 := \sqrt{(1+\beta\, t)^2}$$

$$\lambda_2 := 1$$

$$\lambda_3 := 1$$

angle entre deux directions

$$\alpha := 90.00000000$$

déformation de Green-Lagrange

$$E := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\beta t)^2 - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

déformation dans les trois axes

$$temp := \left[\frac{1}{2}(1+\beta t)^2 - \frac{1}{2}, 0, 0\right]$$

$$E11 := (1+\beta t)^2 - 1$$

$$temp := [0, 0, 0]$$

$$E22 := 0$$

Hypothèse des petites perturbations

$$U := [X_1 (1 + \beta t) - X_1, 0, 0]$$

$$\boxed{\underline{\underline{H}} = \overrightarrow{grad}\left[\vec{U}\left(\vec{X},t\right)\right] \quad soit \quad H_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j}} \qquad \boxed{\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}}$$

$$H := \begin{bmatrix} \beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenseur des petites déformations

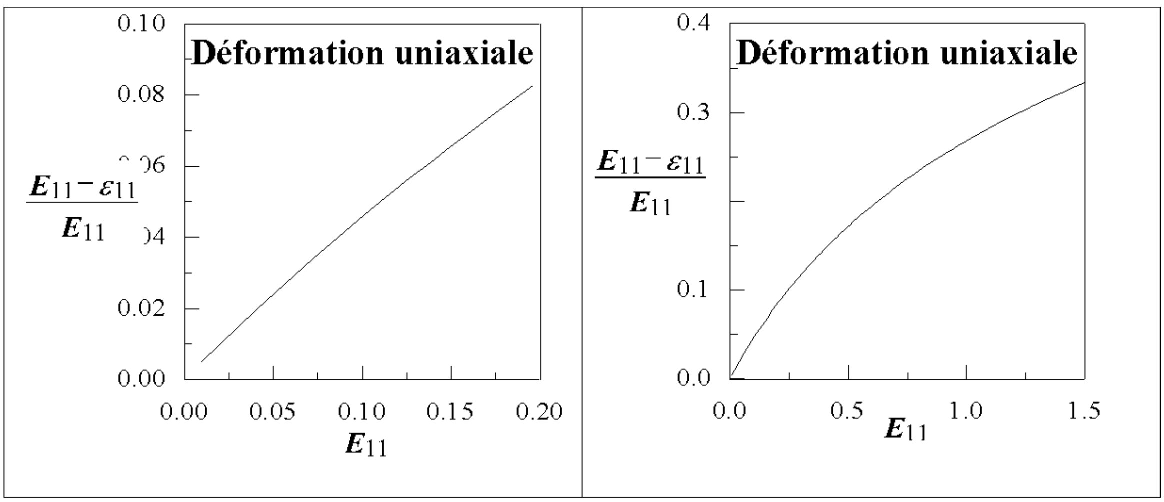
$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)}$$

$$\varepsilon := \begin{bmatrix} \beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\beta^2 t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$err := \frac{1}{2}\,\frac{\beta^2\,t^2}{\beta\,t+\frac{1}{2}\beta^2\,t^2}$$

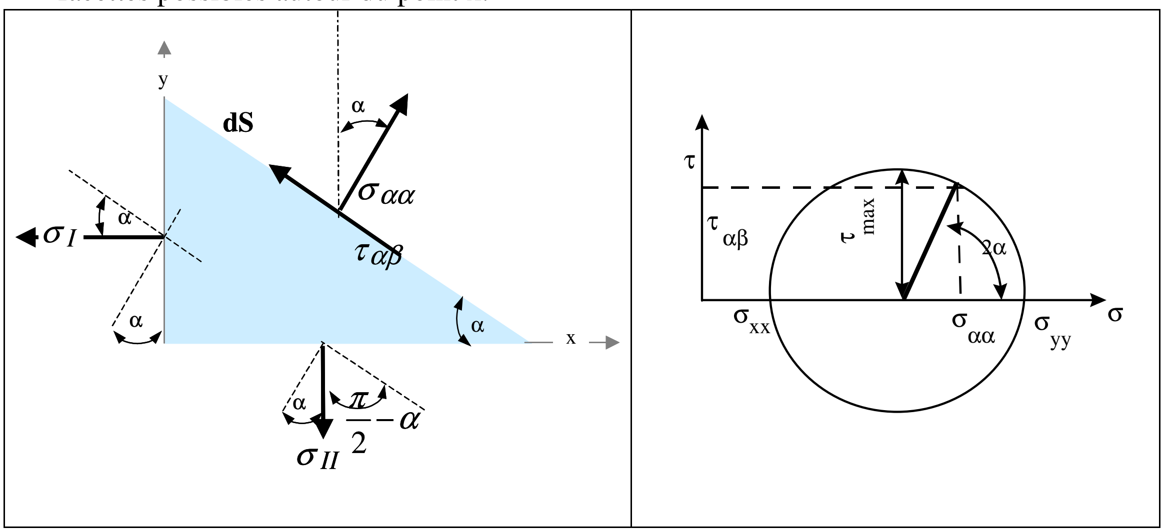
$$0$$



TD2 : CONTRAINTES

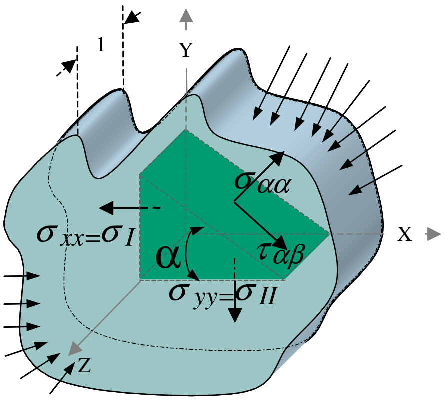
Exercice 1 :

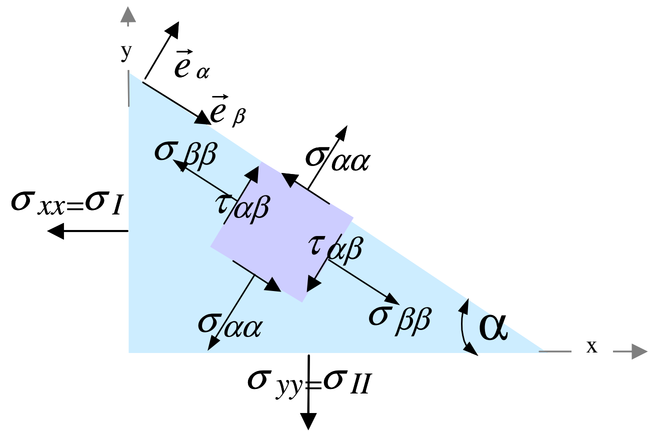
Mohr a montré la propriété intéressante suivante pour le tenseur des contraintes, ***indépendante du comportement du matériau et des conditions aux limites***. Considérons l'état de contraintes au point x du volume V. Considérons un état plan de contraintes ($\sigma_{zz}=\sigma_{zx}=\sigma_{zy}=0$). Dans l'espace des contraintes de traction σ et des contraintes de cisaillement τ, l'état de contrainte au point x décrit un cercle si l'on considère toutes les facettes possibles autour du point x.

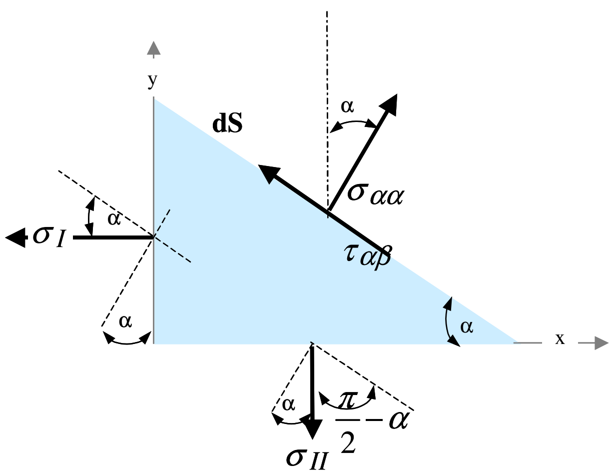


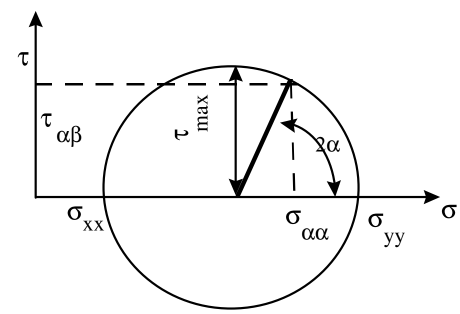
Démontrer que :

Si l'angle entre la facette considérée et l'axe des x est α dans l'espace physique réelle, l'état de contrainte sur cette facette sera représenté par le point faisant un angle 2α avec l'axe des σ dans l'espace (σ,τ).









Equilibre suivant $\vec{e}_\alpha$

$$\sigma_{\alpha\alpha} ds - [\sigma_I \sin(\alpha)][dS \sin(\alpha)] \sigma_{\alpha\alpha} ds$$
$$-[\sigma_{II} \cos(\alpha)][dS \cos(\alpha)] = 0$$

Equilibre suivant $\vec{e}_\beta$

$$\tau_{\alpha\beta} ds + [\sigma_I \cos(\alpha)][dS \sin(\alpha)] \sigma_{\alpha\alpha} ds$$
$$-[\sigma_{II} \sin(\alpha)][dS \cos(\alpha)] = 0$$

Eliminer dS

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_I \sin^2(\alpha) + \sigma_{II} \cos^2(\alpha)$$
$$\tau_{\alpha\beta} = (\sigma_{II} - \sigma_I) \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

Exprimer toutes les quantités en fonction de 2α.

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\sigma_I\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(2\alpha)}{2}\right)+\sigma_{II}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\alpha)}{2}\right)$$

$$\tau_{\alpha\beta}=(\sigma_{II}-\sigma_I)\frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\left(\frac{\sigma_I+\sigma_{II}}{2}\right)+\left(\frac{\sigma_{II}-\sigma_I}{2}\right)\cos(2\alpha)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}-\left(\frac{\sigma_I+\sigma_{II}}{2}\right)=\left(\frac{\sigma_{II}-\sigma_I}{2}\right)\cos(2\alpha)$$

$$\tau_{\alpha\beta}=(\sigma_{II}-\sigma_I)\frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

Dans l'espace (σ,τ) c'est l'équation d'un cercle de centre $((\sigma_I+\sigma_{II})/2$,0) et de rayon $(\sigma_{II}-\sigma_I)/2$.

La contrainte de cisaillement maximale vaut

$\tau_{max}=(\sigma_{max}-\sigma_{min})/2$.

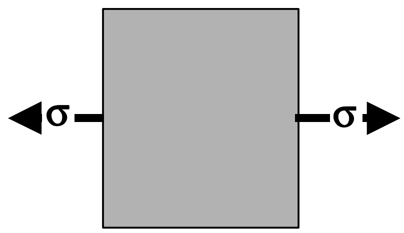
Exercice 2 :

a) Calculer la contrainte moyenne σ_m, le déviateur des contraintes $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{I}}$ et la contrainte de von Mises $\overline{\sigma}$ en traction uniaxiale.

b) Calculer la contrainte moyenne σ_m, le déviateur des contraintes $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{I}}$ et la contrainte de von Mises $\overline{\sigma}$ en traction biaxiale. Chercher la forme des courbes $\overline{\sigma} = constante$ dans le plan des contraintes principales σ_I et σ_{II}.

c) Dans l'espace des contraintes principales σ_I, σ_{II}.et σ_{III} chercher la forme de la surface $\overline{\sigma} = constante$.

Traction uni-axiale



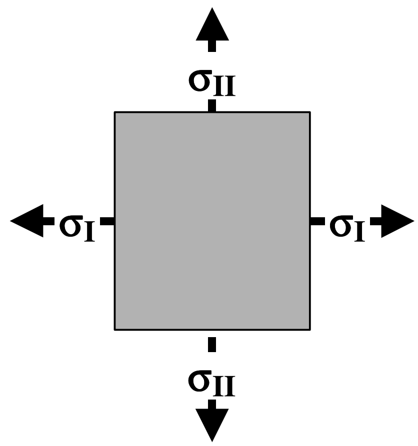
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{s}} = \frac{\sigma}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{3}$$

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{\sigma}{3}\right)^2 \left(2^2 + 1^2 + 1^2\right)} = |\sigma|$$

Traction bi-axiale



La figure ci-dessus montre un solide en traction biaxiale. Le tenseur contrainte s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La contrainte moyenne et la contrainte est donnée par :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{3}$$

Le déviateur des contraintes est donné par :

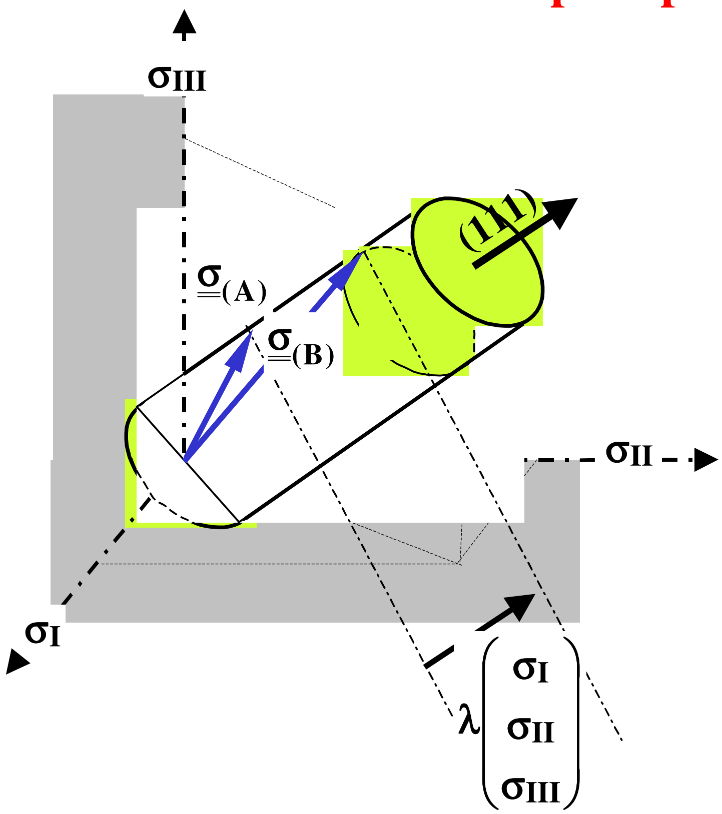
$$\underline{\underline{s}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\sigma_I - \sigma_{II} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_{II} - -\sigma_I & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_I - \sigma_{II} \end{bmatrix}$$

La contrainte de von Mises est donnée par :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left[(2\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (-\sigma_I + 2\sigma_{II})^2 + (\sigma_I + \sigma_{II})^2\right]}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\left[\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II}\right]}$$

Surface de von Mises dans l'espace principal



Représentation de la surface de von Mises dans l'état des contraintes principales.

TD3 : MATERIAUX ELASTIQUES

Matériau isotrope élastique linéaire.

L'énergie de déformation d'un matériau élastique linaire s'écrit

$$\boxed{W_{vol} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij} L_{ijkl} \varepsilon_{kl}}$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}$ sont respectivement le tenseur des déformations et le tenseur des rigidités.

a) Montrer que l'énergie de déformation élastique par unité de volume W_{vol} peut se mettre sous la forme suivante :

$$\boxed{W_{vol} = \frac{1}{2}\left(s_{ij} e_{ij} + 3\sigma_m \varepsilon_m\right)}$$

où $\underline{\underline{s}}$ et $\underline{\underline{e}}$ sont respectivement le déviateur des contraintes et le tenseur déviateur des déformations. σ_m et ε_m sont respectivement la contrainte moyenne et la déformation moyenne.

b) Démontrez les relations suivantes entre les déviateurs des contraintes et des déformations et entre la contrainte moyenne et la déformation moyenne

$$\boxed{\begin{array}{l} s_{ij} = 2G e_{ij} \\ \sigma_m = 3\kappa \varepsilon_m \end{array}}$$

où $\kappa = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ est la compressibilité cubique.

c) Ecrire le tenseur du quatrième ordre L_{ijkl} pour un matériau élastique isotrope linéaire Hooke

d) Démontrez que

$$G = E/[2(1+\nu)].$$

a) Démontrez $W_{vol} = \frac{1}{2}\left(s_{ij}e_{ij} + 3\sigma_m\varepsilon_m\right)$

L'énergie élastique par unité de volume déformé s'écrit :

$$W_{vol} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(s_{ij} + \sigma_m\delta_{ij}\right)\left(e_{ij} + \varepsilon_m\delta_{ij}\right)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. En explicitant les différents termes, on obtient :

$$W_{vol} = \frac{1}{2}\left(s_{ij}e_{ij} + \varepsilon_m \underbrace{s_{ij}\delta_{ij}}_{s_{11}+s_{22}+s_{33}=0} + \sigma_m\delta_{ij}e_{ij} + \sigma_m\delta_{ij}\varepsilon_m\delta_{ij}\right)$$

$s_{ij}\, e_{ij}$

s'obtient simplement en sommant sur les indices i et j

$$s_{ij}e_{ij} = s_{11}e_{11} + s_{22}e_{22} + s_{33}e_{33}$$
$$+ s_{12}e_{12} + s_{13}e_{13} + s_{23}e_{23}$$
$$+ s_{21}e_{21} + s_{31}e_{31} + s_{32}e_{32}$$

$s_{ij}\delta_{ij}$

est la trace du tenseur déviateur des contraintes. Ce terme est nul, en effet :

$$s_{ij}\delta_{ij} = s_{11}\underbrace{\delta_{11}}_{1} + s_{22}\underbrace{\delta_{22}}_{1} + s_{33}\underbrace{\delta_{33}}_{1} +$$
$$\underbrace{s_{12}\delta_{12} + s_{13}\delta_{13} + s_{23}\delta_{23}}_{0} +$$
$$\underbrace{s_{21}\delta_{21} + s_{31}\delta_{31} + s_{32}\delta_{32}}_{0}$$
$$s_{ij}\delta_{ij} = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0$$

$$\sigma_m\delta_{ij}\varepsilon_m\delta_{ij} = 3\sigma_m\varepsilon_m \,.$$

$$\sigma_m\delta_{ij}\varepsilon_m\delta_{ij} = \sigma_m\varepsilon_m\left\{\begin{array}{l}\delta_{11}\underbrace{\delta_{11}}_{1}+\delta_{22}\underbrace{\delta_{22}}_{1}+\delta_{33}\underbrace{\delta_{33}}_{1}+\underbrace{\delta_{12}\delta_{12}+\delta_{13}\delta_{13}+\delta_{23}\delta_{23}}_{0}\\+\underbrace{\delta_{21}\delta_{21}+\delta_{31}\delta_{31}+\delta_{32}\delta_{32}}_{0}\end{array}\right\}$$

$$\sigma_m\delta_{ij}\varepsilon_m\delta_{ij} = 3\sigma_m\varepsilon_m$$

L'énergie élastique s'écrit finalement

$$W_{vol} = \frac{1}{2}\left(s_{ij}e_{ij} + 3\sigma_m\varepsilon_m\right) \qquad \textbf{(c.q.f.d.)}$$

b) Démontrez que $s_{ij}=2Ge_{ij}$ *et* $\sigma_m = 3\kappa\varepsilon_m$

1) $\sigma_m = \kappa\varepsilon_{kk}$ $\kappa = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$

$$\sigma_{11} = 2G\left\{\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right\} = 2G\left\{\varepsilon_{11} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\varepsilon_m\right\}$$

$$\sigma_{22} = 2G\left\{\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right\} = 2G\left\{\varepsilon_{22} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\varepsilon_m\right\}$$

$$\sigma_{33} = 2G\left\{\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right\} = 2G\left\{\varepsilon_{33} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\varepsilon_m\right\}$$

Sommons les trois relations précédentes :

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33} = 2G\left\{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\varepsilon_m\right\} = \underbrace{G}_{\frac{E}{2(1+\nu)}}\left(1+\frac{3\nu}{1-2\nu}\right)3\varepsilon_m$$

$$\underbrace{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}_{3\sigma_m} = 2\underbrace{\frac{E}{2(1+\nu)}}_{G}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)3\varepsilon_m$$

$$\sigma_m = 3\left[\frac{E}{3(1-2\nu)}\right]\varepsilon_m = 3\kappa\varepsilon_m \quad \kappa = E/\{3(1-2\nu)\}$$

2) $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = 2G e_{ij}$

Remplaçons ε_{11} par $\left\{ e_{11} + \dfrac{\varepsilon_{kk}}{3} \right\}$

$$\sigma_{11} = 2G\left\{ \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right\} \Leftrightarrow \sigma_{11} = 2G\left\{ e_{11} + \frac{\varepsilon_{kk}}{3} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{11} = 2G\, e_{11} + 2G\left\{ \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \right\}\left(1 + \frac{3\nu}{1-2\nu} \right)$$

$$\sigma_{11} = 2G\, e_{11} + \frac{E}{(1+2\nu)}\left\{ \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \right\}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right)$$

$$\sigma_{11} = 2G e_{11} + \underbrace{\underbrace{\left\{ \frac{E}{3(1-2\nu)} \right\}}_{\kappa} \varepsilon_{kk}}_{\sigma_m}$$

$$s_{11} = \sigma_{11} - \sigma_m = 2G e_{11}$$

c) Ecrire L_{ijkl} pour un matériau élastique linéaire isotrope

$$\sigma_{11} = 2G\left\{\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right\} = 2G\left\{\varepsilon_{11} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\varepsilon_m\right\}$$

$$\sigma_{22} = 2G\left\{\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right\} = 2G\left\{\varepsilon_{22} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\varepsilon_m\right\}$$

$$\sigma_{33} = 2G\left\{\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right\} = 2G\left\{\varepsilon_{33} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\varepsilon_m\right\}$$

$$\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \; \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} \; \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23}$$

$$\sigma_{ij} = 2G\left\{\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij}\right)\right\}$$

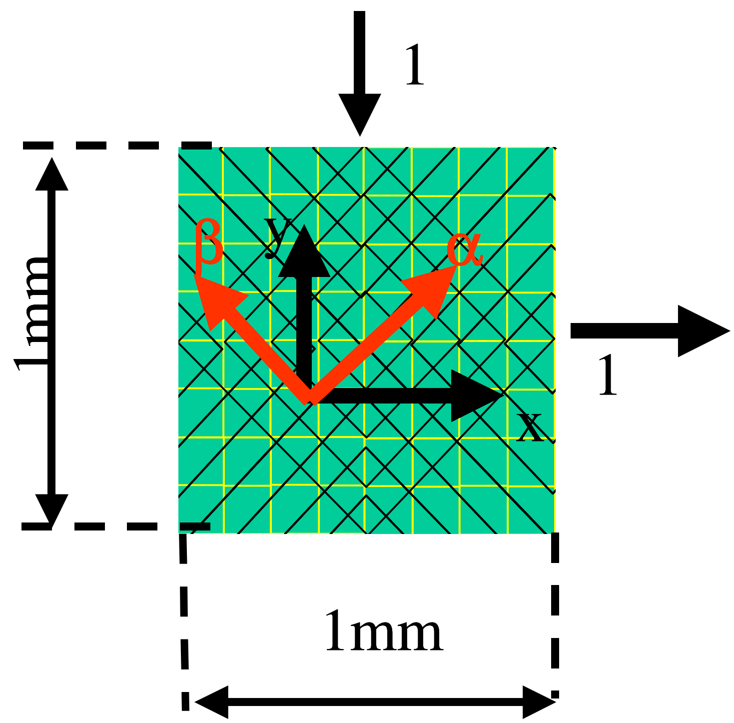
$$\sigma_{ij} = 2G\left\{\varepsilon_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij}\right)\right\}$$

$$\sigma_{ij} = 2G\left\{\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\delta_{kl}\delta_{ij}\right)\right\}\varepsilon_{kl}$$

$$L_{ijkl} = 2Gsym\left\{\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\delta_{kl}\delta_{ij}\right)\right\}\varepsilon_{kl}$$

$$L_{ijkl} = 2G\left\{\frac{\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}}{2} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\delta_{kl}\delta_{ij}\right)\right\}\varepsilon_{kl}$$

d) Démontrez que G= E/[2(1+ν)].



Indication

On considère un disque en contraintes planes. σ_{11}=1 et σ_{22}=-1.

1) ***On calcul le tenseur des contraintes dans le repère {α,β,z} par rotation à partir de l'expression du tenseur des contraintes dans le repère {x,y,z}. Le tenseur des déformations dans le repère {α,β,z} est obtenu par la loi de Hooke.***
2) ***On calcul le tenseur des contraintes dans le repère {x,y,z} et le tenseur des déformation par la loi de Hooke dans le même repère. Le tenseur de déformation dans le repère {α,β,z} est obtenu par rotation.***
3) ***On compare les deux expressions du tenseur des déformations et on en déduit l'égalité à démontrer.***

1) Rotation du tenseur des contraintes et calcul des déformations dans le nouveau repère

Tenseur des contraintes et tenseur des déformations dans les axes $\{x,y,z\}$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\{x,y,z\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Formules de passage

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \vec{e}_{\alpha}^{T}\left[\underline{\underline{\sigma}}_{\{x,y,z\}}\right]\vec{e}_{\alpha} \quad \sigma_{\beta\beta} = \vec{e}_{\beta}^{T}\left[\underline{\underline{\sigma}}_{\{x,y,z\}}\right]\vec{e}_{\beta}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \vec{e}_{\alpha}^{T}\left[\underline{\underline{\sigma}}_{\{x,y,z\}}\right]\vec{e}_{\beta}$$

Expression des vecteurs de la nouvelle base en fonction dans la base initiale

$$\vec{e}_{\alpha}^{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \vec{e}_{\beta}^{T} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Rotation du tenseur contraintes

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\beta\beta} = 0$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = -1$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\{\alpha,\beta,z\}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\alpha,\beta,z\}}$ **à partir de** $\underline{\underline{\sigma}}_{\{\alpha,\beta,z\}}$ **par la loi de Hooke**

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{2G} = \frac{-1}{2G} \text{ donc}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\alpha,\beta,z\}} = \frac{1}{2G}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

2) *Calcul des déformations dans l'ancien repère et rotation*

Calcul de $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{x,y,z\}}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) = \frac{1}{E}(1+\nu) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) = \frac{-1}{E}(1+\nu) \end{cases} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_{\{x,y,z\}} = \frac{(1+\upsilon)}{E}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\alpha,\beta,z\}}$ **par rotation de** $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{x,y,z\}}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\alpha} = 0 \\ \varepsilon_{\beta\beta} = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \vec{e}_{\alpha}^{\,T}\left\{\frac{(1+\upsilon)}{E}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\vec{e}_{\beta} = -\frac{(1+\upsilon)}{E}$$

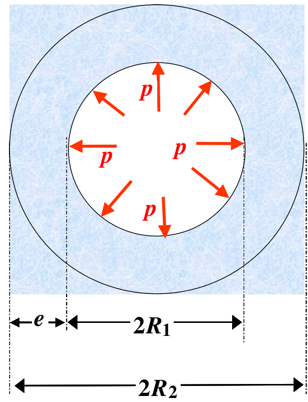
$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\alpha,\beta,z\}} = \frac{(1+\upsilon)}{E}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

3) Comparaison des deux expressions de $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\alpha,\beta,z\}}$

$$\mathbf{G = E/[2(1+\nu)]}$$

$$\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \quad \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} \quad \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23}$$

TD4 : METHODES SEMI-INVERSES



Un tube en acier est soumis à une pression interne de 20 MPa. Le tube est considéré de longueur infinie et on ne considérera que le contraintes dans un plan perpendiculaire à l'axe du tube. Le module de Young vaut E=210 GPa, le coefficient de Poisson vaut ν =0,3 et la limite d'élasticité de l'acier utilisé vaut 450 M Pa.

1) Ecrire l'équation de Navier

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\overrightarrow{grad}\left[div(\vec{u})\right] + \frac{\vec{f}}{G} = 0$$

en coordonnées cylindriques. On suppose que le champ de déplacement est purement radial

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r \,.$$

Dans ce cas l'équation de Navier se réduit à :

$$\overrightarrow{grad}\left[div(\vec{u})\right] = 0 \rightarrow div(\vec{u}) = cons\tan te$$

et le champ de déplacement prend la forme

$$u_r = \frac{A}{r} + \frac{c}{2}r$$

où A et C sont deux constantes à déterminer.

2) Calculer les déformations $\varepsilon_{rr}\, et\, \varepsilon_{\theta\theta}$ à partir de la connaissance du champ $\vec{u} = u_r\vec{e}_r$

3) Calculer les contraintes $\sigma_{rr}\, et\, \sigma_{\theta\theta}$ à partir de la loi de Hooke

4) Déterminer les constantes d'intégration A et C par les conditions aux limites sur σ_{rr}

5) Comparer l'expression de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ à son expression obtenue à partir de l'approximation des tubes minces (e<<<R1).

I. Solution complète

I.1) Equation de Navier

- **Cas général**

Le point de départ est l'équation de Navier

$$\boxed{\Delta\vec{u}+\frac{1}{1-2\nu}\overrightarrow{grad}\left[div\left(\vec{u}\right)\right]+\frac{\vec{f}}{G}=0}$$

Nous nous efforçons de faire un maximum de calculs formels afin d'éviter les calculs en coordonnées cylindriques.

- ***Simplification de l'équation de Navier pour des forces de volumes nulles***

$$\Delta\vec{u}=\overrightarrow{grad}\left[div\left(\vec{u}\right)\right]-\overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{u}\right)\right]$$

Pour des forces de volume nulles :

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\overrightarrow{grad}\left[div\left(\vec{u}\right)\right]-\overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{u}\right)\right]=0$$

- ***Simplification de l'équation de Navier par les conditions de symétrie***

Le champ de déplacement est purement radial

$\vec{u}=u_r\vec{e}_r$

$\overrightarrow{rot}\left(\vec{u}\right)=0\ si\ \vec{u}=u_r\vec{e}_r$ **ainsi l'équation de Navier donne**

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\overrightarrow{grad}\left[div\left(\vec{u}\right)\right]=0\rightarrow div\left(\vec{u}\right)=constante$$

$$\overrightarrow{grad}\left[div\left(\vec{u}\right)\right]=0\rightarrow div\left(\vec{u}\right)=constante$$

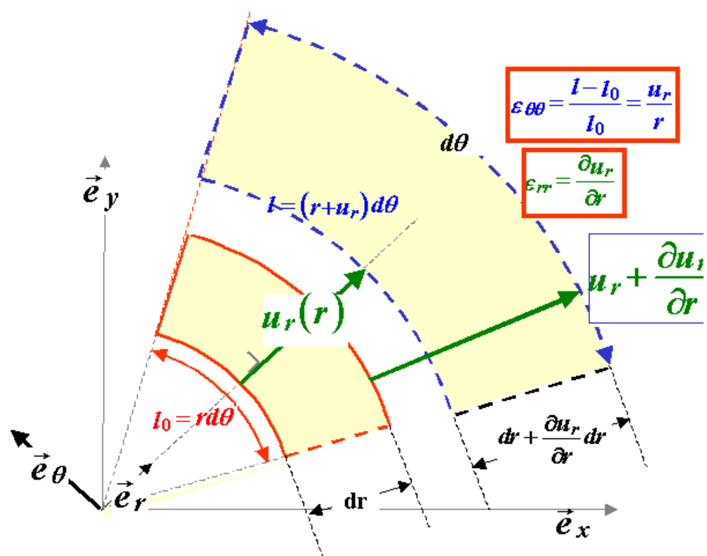
I.2) Solution de $div(\vec{u}) = constante$

Expression de $div(\vec{u})$ en fonction des déformations

$$div(\vec{u}) = trace(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}$$

I.2.1. Calcul de ε_{rr} et $\varepsilon_{\theta\theta}$ par des considérations géométriques



I.2.2. Solution de $div\left(\vec{u}\right)=constante$

$$div\left(\vec{u}\right)=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}=C$$

Solution de l'équation homogène $\frac{du_r}{dr}+\frac{u_r}{r}=0$

$$\frac{du_r}{dr}+\frac{u_r}{r}=0\rightarrow\frac{du_r}{u_r}=-\frac{dr}{r}$$

$$u_r=A/r$$

Solution particulière de l'équation $\frac{du_r}{dr}+\frac{u_r}{r}=c$

$$u_r=\frac{c}{2}r$$

Solution complète de l'équation $\frac{du_r}{dr}+\frac{u_r}{r}=c$

$$u_r=\frac{A}{r}+\frac{c}{2}r$$

I.2.3. Calcul des déformations et des contraintes

Calcul des déformations

$$\varepsilon_{rr}=\frac{du_r}{dr}=-\frac{A}{r^2}+\frac{c}{2}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u_r}{r}=\frac{A}{r^2}+\frac{c}{2}$$

Calcul des contraintes

$$\sigma_{rr}=2G\left[\varepsilon_{rr}+\frac{\upsilon}{(1-2\upsilon)}\left(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}\right)\right]$$

$$\sigma_{rr}=2G\left[-\frac{A}{r^2}+\frac{c}{2}+\frac{\upsilon}{(1-2\upsilon)}C\right]$$

I.3. Considérations des conditions aux limites et calcul des constantes

Surface interne du tube

$$\sigma_{rr}(R_1) = 2G\left[-\frac{A}{R_1^2} + \frac{c}{2(1-2\upsilon)}\right] = -p$$

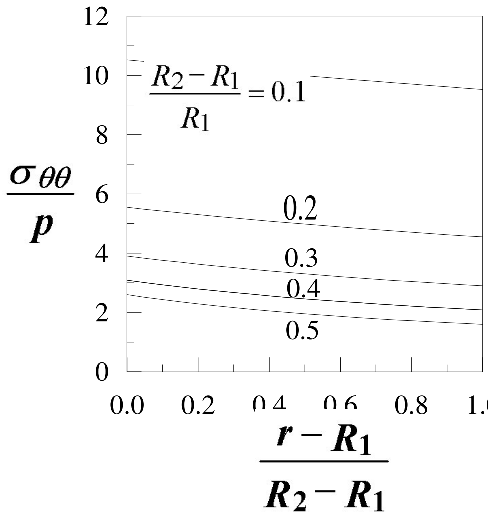
Surface externe du tube

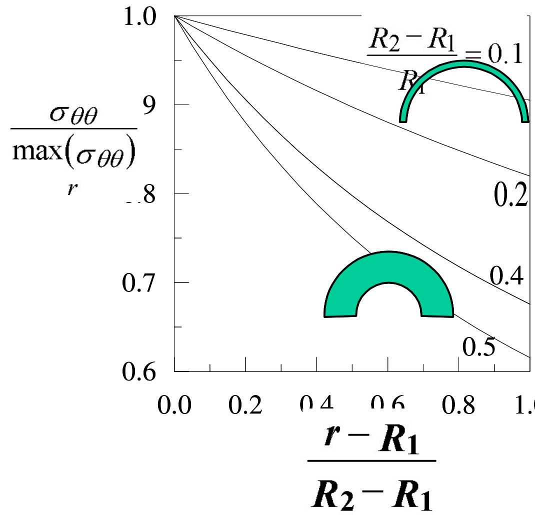
$$\sigma_{rr}(R_2) = 2G\left[-\frac{A}{R_2^2} + \frac{c}{2(1-2\upsilon)}\right] = 0$$

$$A\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right) = \frac{p}{2G} \rightarrow A = \frac{R_1^2 R_2^2 p}{2G\left(R_1 - R_2\right)\left(R_1 - R_2\right)}$$

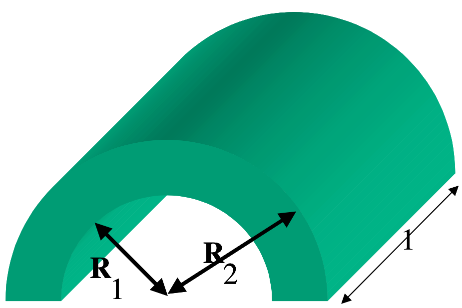
$$\frac{c\,R_1^2}{2(1-2\upsilon)} = \frac{-p\,R_1^2}{2G}$$

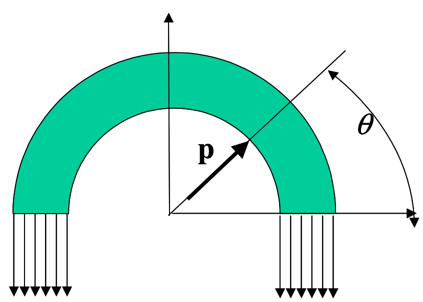
$$\sigma_{\theta\theta} = 2G\left[\frac{A}{r^2} + \frac{1}{(1-2\upsilon)}\frac{c}{2}\right]$$





II. Solution pour des petites épaisseurs



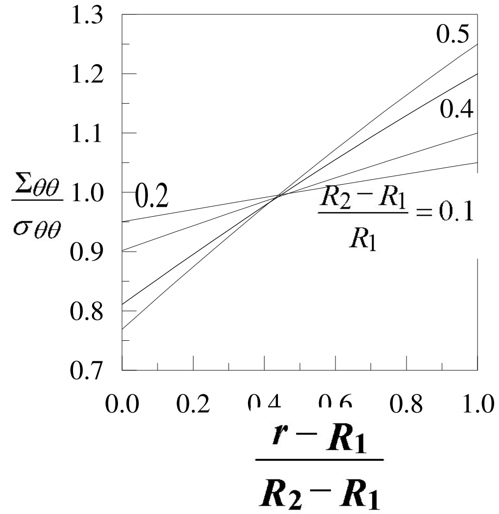


$\sigma_{\theta\theta} \cong \langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = cons\tan te$

$\sigma_{\theta\theta} \cong \langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = cons\tan te$

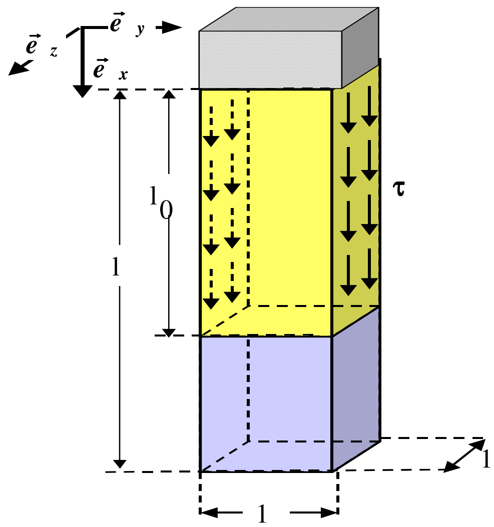
$$\sigma_{\theta\theta}(R_2 - R_1) = \int_0^{\pi/2} p \sin(\theta) R_1 d\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR_1}{(R_2 - R_1)}$$



TD5 : METHODES ENERGETIQUES

Considérons une barre encastrée soumise à des sollicitations en cisaillement sur deux faces (figure ci contre). On néglige la gravité et les forces de volume $\vec{f}$ sont nulles. On se propose de déterminer le champ de déplacement dans la barre.



On considère un champ de déplacement dépendant de 3 paramètres.

$$\vec{u}^{(B)} = \left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)\vec{e}_x$$

Calculez les valeurs de a_1, a_2 et a_3 par application du principe des travaux virtuels des déplacements.

$$\boxed{\int_{\Omega} \delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA} : \underline{\underline{\varepsilon}}\, dv = \int_{S_U} \left(\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n}\right)^T \vec{u}\ dS_{\sigma}}.$$

Solution

$$\boxed{\begin{array}{l}\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{S_\sigma} \vec{\bar{t}}^{T} \delta \vec{u}^{CA} d S_\sigma + \int_{\Omega} \vec{f}^{T} \delta \vec{u}^{CA} d\Omega \\ \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} = \frac{1}{2}\left\{\left[\vec{\nabla}\left(\delta \vec{u}^{CA}\right)\right] + \left[\vec{\nabla}\left(\delta \vec{u}^{CA}\right)\right]^{T}\right\}\end{array}}$$

champ de déplacement $\vec{u}^{(B)}$ et $\delta \vec{u}^{(B)}$

$$\vec{u}^{(B)} = \left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) \vec{e}_x$$

$$\delta \vec{u}^{(B)} = \left(\delta a_1 x + \delta a_2 x^2 + \delta a_3 x^3\right) \vec{e}_x$$

champ de déformation est ε_{xx} et $\delta \varepsilon_{xx}^{(B)}$

$$\varepsilon_{xx}^{(B)} = \left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2\right)$$

avec $$\delta \varepsilon_{xx}^{(B)} = \left(\delta a_1 + 2\delta a_2 x + 3\delta a_3 x^2\right)$$

contraintes par la loi de Hooke $\sigma_{xx}^{(B)}$

$$\sigma_{xx}^{(B)} = E\left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2\right)$$

Ainsi l'intégrale de volume dans l'équation (3) prend la forme

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv$$
$$= E \int_{\Omega} \left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2\right)\left(\delta a_1 + 2\delta a_2 x + 3\delta a_3 x^2\right) dv$$

soit en factorisant les termes multipliant la variation des différentes amplitudes δa_1, δa_2 et δa_3

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv$$

$$= E\left[\begin{array}{l} \left(a_1 l_0 + a_2 l_0^2 + a_3 l_0^3\right)(\delta a_1) \\ + \left(a_1 l_0^2 + \frac{4}{3} a_2 l_0^3 + \frac{3}{2} a_3 l_0^4\right)(\delta a_2) \\ +4\left(a_1 l_0^3 + \frac{3}{2} a_2 l_0^4 + \frac{9}{5} a_3 l_0^5\right)(\delta a_3) \end{array}\right]$$

Le chargement imposé t

est indépendant du choix du champ de déplacment, l'intégrale de surface s'écrit donc

$$\int_{S_\sigma} \vec{t}^T \delta \vec{u}^{CA} d S_\sigma = \tau \int_{S_\sigma} \left[(\delta a_1) x + (\delta a_2) x^2 + (\delta a_3) x^3\right] d S_\sigma$$

soit

$$\int_{S_\sigma} \vec{t}^T \delta \vec{u}^{CA} d S_\sigma = \tau \left[(\delta a_1)\frac{l_0^2}{2} + (\delta a_2)\frac{l_0^3}{3} + (\delta a_3)\frac{l_0^4}{4}\right]$$

le principe des travaux virtuels

conduit aux système d'équations suivant :

$$E\left[\begin{array}{l} \left(a_1 l_0 + a_2 l_0^2 + a_3 l_0^3\right)(\delta a_1) \\ + \left(a_1 l_0^2 + \frac{4}{3} a_2 l_0^3 + \frac{3}{2} a_3 l_0^4\right)(\delta a_2) \\ +4\left(a_1 l_0^3 + \frac{3}{2} a_2 l_0^4 + \frac{9}{5} a_3 l_0^5\right)(\delta a_3) \end{array}\right]$$

$$= \tau \left[(\delta a_1)\frac{l_0^2}{2} + (\delta a_2)\frac{l_0^3}{3} + (\delta a_3)\frac{l_0^4}{4}\right]$$

$$\forall \delta a_1, \delta a_2, \delta a_3$$

Ce système doit être satisfait pour toutes valeurs des variations des amplitudes δa_1*,* δa_2 *et* δa_3*. Nous choisissons trois vecteurs particuliers* $[\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [1,0,0]$*,* $[\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [0,1,0]$ *et* $[\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [0,0,1]$ *pour les variations des amplitudes. Ceci conduit au système d'équations suivant pour les amplitudes* a_i*.*

$$\begin{aligned}
[\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [1,0,0] &\rightarrow \\
[\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [0,1,0] &\rightarrow \\
[\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [0,0,1] &\rightarrow
\end{aligned}
\begin{cases}
a_1 l_0 + a_2 l_0^2 + a_3 l_0^3 = \tau l_0^2 / 2E \\
a_1 l_0^2 + 4 a_2 l_0^3 / 3 + 3 a_3 l_0^4 / 2 = \tau l_0^3 / 3E \\
a_1 l_0^3 + 3 a_2 l_0^4 / 2 + 9 a_3 l_0^5 / 5 = \tau l_0^4 / 4E
\end{cases}$$

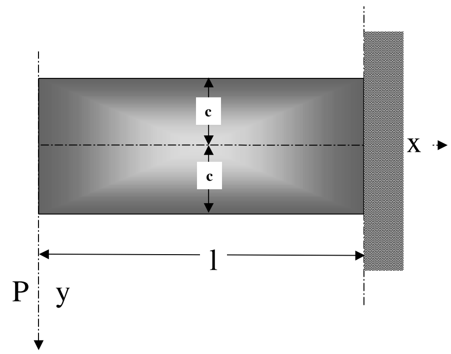
La solution du système précédent est immédiate et conduit à :

$$[a_1, a_2, a_3] = \begin{bmatrix} \dfrac{l_0 \tau}{2E} & -\dfrac{\tau}{2E} & 0 \end{bmatrix}$$

TD6 : Elasticité plane

Considérons une poutre console ayant une section droite rectangulaire étroite (dont nous prendrons la largeur pour unité) qui est fléchie par une force P appliquée à son extrémité libre (figure). Démontrez que les contraintes peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\sigma_{xx} = -\frac{Pxy}{I} \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = -\frac{3}{2}\frac{P}{\Omega}\left(1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right)$$



où I est le moment d'inertie de la section droite et Ω est sa section.

Rappel

Equations d'élasticité plane

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0}$$

Fonctions d'Airy polynômiales

$$\varphi_2(x,y) = a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_2 & -b_2 \\ -b_2 & 2a_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(x,y) = a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 x y^2 + d_3 y^3$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_3 x + 6d_3 y & -2b_3 x - 2c_3 y \\ -2b_3 x - 2c_3 y & 6a_3 x + 2b_3 y \end{pmatrix}$$

Solution

Choisir pour la fonction d'Airy l'expression

$$\varphi(x,y) = b_2 xy + \frac{d_4 x y^3}{6}$$

On obtient l'expression suivante pour les contraintes

$$\sigma_{xx} = d_4 xy \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = -b_2 + \frac{d_4 y^2}{2}$$

Pour rendre les côtés longitudinaux libres de toute force on doit avoir

$$\sigma_{xy}\Big\}_{y=+/-c} = -b_2 + \frac{d_4 c^2}{2} = 0$$

$$P = \int_{-c}^{c} \sigma_{xy}\Big\}_{x=l} dy = \int_{-c}^{c} \left(b_2 + \frac{b_2 y^2}{c^2} \right) dy \rightarrow b_2 = \frac{3P}{4c}$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{3}{2}\frac{Pxy}{c^3} \; \sigma_{yy} = 0 \; \sigma_{xy} = -\frac{3}{4}\frac{P}{c}\left(1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right)$$

Si l'on note que $2c^3/3$ *est le moment d'inertie de la section droite et que 2c est sa section W, on peut encore écrire les formules précédentes sous la forme :*

$$\sigma_{xx} = -\frac{Pxy}{I} \; \sigma_{yy} = 0 \; \sigma_{xy} = -\frac{3}{2}\frac{P}{\Omega}\left(1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right)$$