CHAPITRE VI
Methodes energetiques

I. GENERALITES : PRINCIPES FONDAMENTAUX

On considère dans la suite exclusivement des déformations infinitésimales. Aucune non-linéarité géométrique ne se produit dans le processus de déformation. On considère des chargements quasi-statiques (sans effets d'inertie).

I.1. Champ de contraintes statiquement admissibles $\underline{\underline{\sigma}}^{S.A.}$ et champ de déplacements cinématiquement admissibles $\vec{u}^{C.A.}$

On appelle champ de contraintes statiquement admissibles (S.A.) tout champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{S.A.}$ (Figure 1) qui satisfait l'équation d'équilibre interne et la condition d'équilibre de surface. On appelle champ de déplacements cinématiquement admissible (C.A.), tout champ de déplacements $\vec{u}^{C.A.}$ (Figure 1) qui satisfait les conditions de bord et qui est dérivable au moins une fois permettant la définition du champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^{C.A.}$.

$$\boxed{\begin{cases} div\left(\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\right)+\vec{f}=0 \quad \underline{\underline{\sigma}}^{SA^T}=\underline{\underline{\sigma}}^{SA} & \forall\vec{x}\in\Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n}=\vec{t}^{\,imposé}=\overline{\vec{t}} & \forall\vec{x}\in S_\sigma \end{cases}} \quad \boxed{\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA}=\frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u}^{CA}+\left(\nabla\vec{u}^{CA}\right)^T\right] & \forall\vec{x}\in\Omega \\ \vec{u}^{CA}=\vec{u}^{\,imposé}=\overline{\vec{u}} & \forall\vec{x}\in S_U \end{cases}} \tag{1}$$

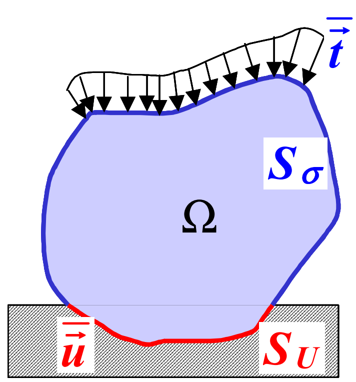


Figure 1. *Solide Ω chargé par une distribution de forces $\overline{\vec{t}}$ sur S_σ et soumis à des conditions aux limites en déplacement $\vec{u}=\overline{\vec{u}}$ sur S_U en équilibre*

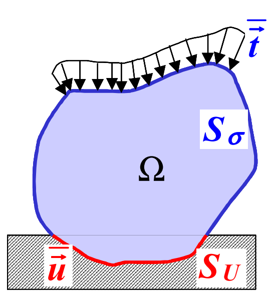
II. PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

II.1. Equation des travaux virtuels

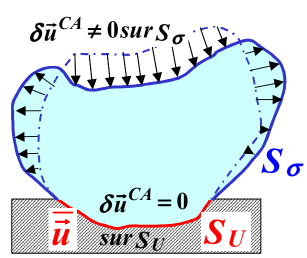
Le travail de tout champ de contraintes statiquement admissible $\underline{\underline{\sigma}}^{S.A.}$ sur tout champ de déformations cinématiquement admissibles $\underline{\underline{\varepsilon}}^{C.A.}$ est égal aux travail des forces imposées $\overline{\vec{t}}$ associées aux déplacements cinématiquement admissibles $\vec{u}^{C.A.}$ et aux forces de volume $\vec{f}$. ***Les contraintes statiquement admissibles*** $\underline{\underline{\sigma}}^{S.A.}$ ***et les déformations cinématiquement admissibles*** $\underline{\underline{\varepsilon}}^{C.A.}$ ***ne sont pas associées par la loi de Hooke***.

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{SA} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{\Omega} \left(\vec{\sigma}^{SA}\right)^T \vec{\varepsilon}^{CA}\, dv \\ &= \int_{S_\sigma} \overline{\vec{t}}^T \vec{u}^{CA} d S_\sigma + \int_{S_U} \vec{t}^T \overline{\vec{u}}\; d S_U + \int_{\Omega} \vec{f}^T \vec{u}^{CA} d\Omega\end{aligned} \quad \begin{cases}\forall \vec{u}^{CA} \\ \forall \vec{\sigma}^{SA}\end{cases}} \qquad (2)$$

II.2. Principe des travaux virtuels des déplacements



- a -



- b -

Figure 2. *Solide Ω chargé par une distribution de forces* $\overline{\vec{t}}$ *sur* S_σ *et soumis à des conditions aux limites en déplacement* $\vec{u} = \overline{\vec{u}}$ *sur* S_U *et soumis à une variation cinématiquement admissible* $\delta\vec{u}^{CA}$ *des déplacements (b).*

II.2.1. Enoncé du principe

Soient $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\vec{u}$ l'état courant existant dans un solide soumis à des sollicitations $\overline{\vec{t}}$ sur S_σ et $\overline{\vec{u}}$ sur S_U. Soit $\delta\vec{u}^{CA}$ une perturbation cinématiquement admissible de $\vec{u}$ autour de l'état actuel (Figure 2). $\delta\vec{u}^{CA}$ est continu et dérivable au moins une fois dans Ω et $\delta\vec{u}^{CA} = 0$ sur S_U.

Si le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est en équilibre

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{S_\sigma} \overline{\vec{t}}^T \delta\vec{u}^{CA} d S_\sigma + \int_\Omega \vec{f}^T \delta\vec{u}^{CA} d\Omega$$

$$\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} = \frac{1}{2}\left\{\left[\vec{\nabla}\left(\delta\vec{u}^{CA}\right)\right] + \left[\vec{\nabla}\left(\delta\vec{u}^{CA}\right)\right]^T\right\} \tag{3}$$

Inversement tout champ de déplacement cinématiquement admissible $\delta\vec{u}^{CA}$ qui satisfait l'équation précédente entraîne l'équilibre.

II.2.2. Application du principe des travaux virtuels des déplacements

On suppose que le champ des déplacements $\vec{u}^{CA}$ peut se mettre sous la forme $\vec{u}^{CA} = \sum_k a_k \vec{u}^{(k)}$. a_k ***sont des amplitudes inconnues et*** $\vec{u}^{(k)}$ ***sont des champs de déplacements cinématiquement admissibles***. C'est-à-dire, chaque $\vec{u}^{(k)}$ est continu, dérivable sur Ω et vérifie les conditions aux limites. Les amplitudes a_k peuvent donc varier indépendemment l'une de l'autre. Le champ des déformations est une superposition linéaire des champs de déformations élémentaires $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(k)}$ associés à chaque mode de déplacement $\vec{u}^{(k)}$.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{(k)} = \frac{1}{2}\left\{\left[\vec{\nabla}\left(\vec{u}^{(k)}\right)\right] + \left[\vec{\nabla}\left(\delta\vec{u}^{(k)}\right)\right]^T\right\} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \sum_k a_k \underline{\underline{\varepsilon}}^{(k)}$$

Les contraintes s'obtiennent par la loi de comportement du matériau à partir des déformations. Pour un matériau élastique linéaire isotrope, on a par exemple :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2G\left\{\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\upsilon}{1-2\nu} trace\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{I}}\right\} = 2G\sum_k a_k\left\{\underline{\underline{\varepsilon}}^{(k)} + \frac{\upsilon}{1-2\nu} trace\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{(k)}\right)\underline{\underline{I}}\right\}$$

Ainsi le premier terme de l'équation (3) s'écrit

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = 2G \sum_k \sum_p \left\{ \int_{\Omega} \left[\underline{\underline{\varepsilon}}^{(p)} + \frac{\upsilon}{1-2\nu} trace\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{(p)} \right) \underline{\underline{I}} \right] \underline{\underline{\varepsilon}}^{(k)} dv \right\} a_p \delta a_k$$

Le terme de surface et le terme du aux forces de volume se transforment comme suit

$$\int_{S_\sigma} \bar{\vec{t}}^T \delta \vec{u}^{CA} d S_\sigma + \int_{\Omega} \vec{f}^T \delta \vec{u}^{CA} d\Omega = \sum_k \delta a_k \left\{ \int_{S_\sigma} \bar{\vec{t}}^T \vec{u}^{(k)} d S_\sigma + \int_{\Omega} \vec{f}^T \vec{u}^{(k)} d\Omega \right\}$$

En effet, le chargement en surface et les forces de volume sont indépendants du champ de déplacements choisi. L'équation (3) conduit, donc au système d'équations suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_k \left\{ \begin{array}{c} 2G \sum_p a_p \int_{\Omega} \left[\underline{\underline{\varepsilon}}^{(p)} + \frac{\upsilon}{1-2\nu} trace\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{(p)} \right) \underline{\underline{I}} \right] \underline{\underline{\varepsilon}}^{(k)} dv \\ - \int_{S_\sigma} \bar{\vec{t}}^T \vec{u}^{(k)} d S_\sigma - \int_{\Omega} \vec{f}^T \vec{u}^{(k)} d\Omega \end{array} \right\} \delta a_k = 0 \\ \forall \delta a_k \; et \; \forall \; \delta a_p \end{array}} \qquad (4)$$

L'équation précédente permet de déterminer les amplitudes a_k. Le fait que les amplitudes a_k satisfassent le système (4), revient à satisfaire l'équation (3) pour un ***champ de déplacements particulier***. Si le développement du champ de vitesse comporte une infinité de termes ($\vec{u}^{CA} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \vec{u}^{(k)}$) et que l'espace des $\vec{u}^{(k)}$ constitue un espace fonctionnel complet, l'équation (4) est équivalente à l'équation (3). La satisfaction de l'équation (4) est donc équivalente à la satisfaction des équations d'équilibre. Or, en pratique, les champs de déplacements approchés ne comportent pas une infinité de termes. Donc l'équation (3) sera satisfaite seulement pour des champ $\vec{u}^{(k)}$ particuliers. Intuitivement, on conçoit que si le nombre de champs $\vec{u}^{(k)}$ augmente, la qualité de la solution s'améliore. Dans le paragraphe III, nous établirons un critère pour comparer des solutions entre elles.

II.2.3. Exemple d'application

Considérons une barre encastrée soumise à des sollicitations en cisaillement sur deux faces (figure 3). On néglige la gravité et les forces de volume $\vec{f}$ sont nulles. On se propose de déterminer le champ de déplacement dans la barre.

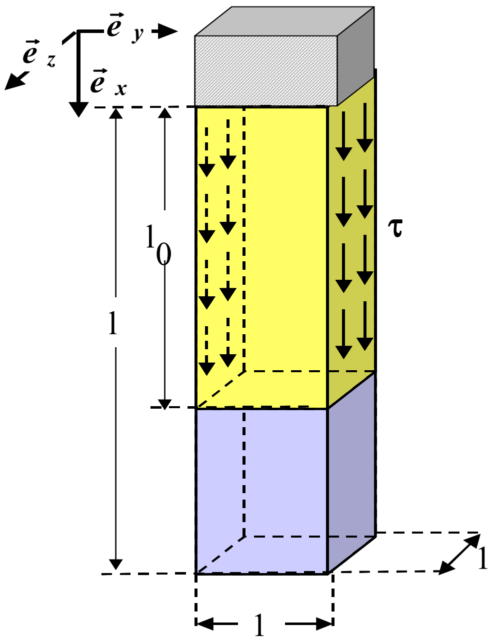


***Figure 3**. barre encastrée soumise à du cisaillement sur deux faces.*

Nous essayons deux champs de déplacements. Le premier champ de déplacement $\vec{u}^{(1)}$ s'écrit :

$$\vec{u}^{(A)} = ax\vec{e}_x \quad \delta\vec{u}^{(A)} = \delta ax\vec{e}_x$$
$$\varepsilon_{xx} = a$$

Où a est l'amplitude inconnue à déterminer. Seule la contrainte $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = Ea$ est non nulle. Ainsi le membre de gauche de l'équation (3) prend la forme :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{\Omega} Ea(\delta a)dv = Ea\Omega(\delta a) = Ea(\delta a)l_0$$

Le terme de surface s'écrit :

$$\int_{S_\sigma} \overline{\vec{t}}^T \delta\vec{u}^{CA} dS_\sigma = \int_{S_\sigma} \tau(\delta a)x dS_\sigma = \tau(\delta a)\int_{S_\sigma} x dS_\sigma = \tau(\delta a)l_0^2$$

Pour le premier champ de déplacement, l'équation (3) conduit donc à l'égalité suivante

$$Ea(\delta a)l_0 = \tau(\delta a)l_0^2 \quad \forall\delta a \text{ soit } a = \tau\frac{l_0}{E}$$

Le champ de déplacement $\vec{u}^{(A)}$ et la contrainte σ_{xx} correspodnante s'écrivent :

$$\vec{u}^{(A)} = \frac{\tau l_0 x}{E}\vec{e}_x \;\; \sigma_{xx} = l_0\tau$$

Le champ de déplacement $\vec{u}^{(A)}$ est bien cinématiquement admissible, puisque continu, dérivable et nulle en x=0. La contrainte σ_{xx} correspondante est constante.
Le deuxième champ de déplacement $u_x^{(B)}$ dépend de 3 paramètres.

$$\vec{u}^{(B)} = \left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)\vec{e}_x \; \delta\vec{u}^{(B)} = \left(\delta a_1 x + \delta a_2 x^2 + \delta a_3 x^3\right)\vec{e}_x$$
$$\varepsilon_{xx}^{(B)} = \left(a_1 + 2a_2 x \; + 3a_3 x^2\right) \sigma_{xx}^{(B)} = E\left(a_1 + 2a_2 x \; + 3a_3 x^2\right)$$

Les champs de déplacements élémentaires $\vec{u}^{(k)}$ sont donc ici donnés par $\vec{u}^{(1)} = x\vec{e}_x$, $\vec{u}^{(2)} = x^2\vec{e}_x$ et $\vec{u}^{(3)} = x^3\vec{e}_x$ respectivement. Le calcul des amplitudes est similaire au cas précédent. Le détail est donné dans les exercices résolus. Les amplitudes valent :

$$\left[a_1, a_2, a_3\right] = \left[2\frac{l_0\tau}{E} \quad -\frac{\tau}{E} \quad 0\right]$$

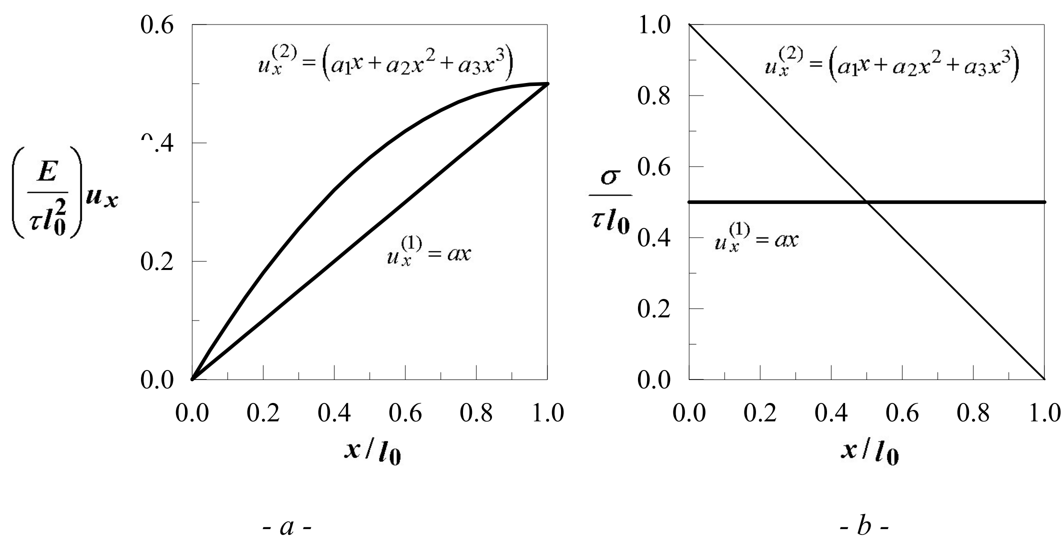


Figure 4. *Champs solutions de la barre encastrée : (a) champ de déplacement, (b) champ de contrainte.*

Les champs correspondants s'écrivent :

$$\vec{u}^{(B)} = \left(2\frac{l_0\tau}{E}x - \frac{\tau}{E}x^2\right)\vec{e}_x \text{ et } \sigma_{xx}^{(B)} = 2\tau\left(l_0 - x\right)$$

Les déplacement $u_x^{(A)}$ et $u_x^{(B)}$ sont représentés sur la figure 4a. Le premier champ est linéaire et le deuxième quadratique en x. Les deux champs sont continus, dérivables et satisfont la condition aux limite $\vec{u}(x=0)=0$. Les champs de contraintes $\sigma_{xx}^{(A)}$ et $\sigma_{xx}^{(B)}$ sont représentés sur la figure 4b. Le premier champ est constant et le deuxième varie linéairement en fonction de x.

II.3. Principe des travaux virtuels des contraintes

II.3.1. Enoncé du principe

Soient $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\vec{u}$ l'état courant existant dans un solide soumis à des sollicitations $\overline{\vec{t}}$ sur S_σ et $\overline{\vec{u}}$ sur S_U. Soit $\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}$ une perturbation statiquement admissible de $\underline{\underline{\sigma}}$ autour de l'état actuel. $\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}$ est continu et dérivable au moins une fois dans Ω et vérifie les équations d'équilibre. Pour un chargement des forces de volume nulles :

$$\overrightarrow{div}\left(\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\right)=0 \quad \delta\vec{u}^{CA}=0 \text{ sur } S_U.$$

Si le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est en équilibre

$$\int_\Omega \delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA} : \underline{\underline{\varepsilon}}\, dv = \int_{S_U} \left(\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n}\right)^T \vec{u}\, dS_\sigma$$

est vérifié pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible. Inversement si l'équation précédente est statisfaite pour tout champ de contrainte statiquement admissible, l'équation de compatibilité est satifaite. (5)

II.3.2. Application du principe des travaux virtuels des contraintes

On suppose que le champ des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{SA}$ peut se mettre sous la forme $\underline{\underline{\sigma}}^{SA}=\sum_k a_k \underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$. a_k sont des amplitudes inconnues et $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$ sont des champs de contraintes statiquement admissibles. C'est-à-dire, $\overrightarrow{div}\left[\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\right]=0$ sur Ω et $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$ vérifie les conditions aux limites sur S_σ. Les amplitudes a_k peuvent donc varier indépendamment l'une de l'autre. Le champ des déformations est une superposition linéaire des champs de déformations élémentaires $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(k)}$ associés à chaque mode de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$. La suite est similaire à l'application du principe des travaux virtuels des déplacements.

II.3.3. Exemple d'application

Considérons la barre encastrée de la figure 3 soumise à des sollicitations en cisaillement sur deux faces. On néglige la gravité et les forces de volume $\vec{f}$ sont nulles. On se propose de déterminer le champ de déplacement dans la barre.

Nous essayons un champ de contraintes statiquement admissible. Le champ des contraintes s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\left[a+2by+3cy^2+4(-4b+16\tau)y^3-5(16a+4c)y^4 \right]x+b \\ \sigma_{xy} = ay+by^2+cy^3+(-4b+16\tau)y^4-(16a+4c)y^5 \end{cases}.$$

a, b et c sont des amplitudes inconnues à déterminer. Ce champ de contraintes est statiquement admissible. En effet, il vérifie les équations d'équilibre en volume et la condition aux limites en contraintes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}=0 \end{cases} \qquad \sigma_{xy}(y=\frac{1}{2})=\sigma_{xy}(y=\frac{-1}{2})=\tau$$

L'application du principe du travail virtuel des contraintes, permet de déterminer les valeurs optimales pour les amplitudes a, b et c. Seule la valeur optimale de b est non nulle et vaut :

$$b=\frac{\tau(-5+7200-5\upsilon)}{(1100+\upsilon+316)}.$$

Au paragraphe suivant, nous établirons un critère permettant de comparer les différentes solutions approchées entre elles.

III. PRINCIPES VARIATIONNELS

III.1. Enérgie totale et énergie complémentaire totale

Le principe des travaux virtuels des déplacements (3) nous enseigne que pour tout champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ en équilibre l'équation suivante est satisfaite :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv - \int_{S_\sigma} \vec{\bar{t}}^T \delta\vec{u}^{CA} dS_\sigma - \int_{\Omega} \vec{f}^T \delta\vec{u}^{CA} d\Omega = 0$$

pourvu que $\delta\vec{u}^{CA}$ soit une variation cinématiquement admissible des déplacements. Or l'expression précédente n'est rien d'autre que la variation au premier ordre de l'énergie totale U :

$$\boxed{U = \int_{\Omega} W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) dv - \int_{S_\sigma + S_U} \vec{\bar{t}}^T \vec{u}^{CA} dS_\sigma - \int_{\Omega} \vec{f}^T \vec{u}^{CA} d\Omega} \qquad (6)$$

où $W_{él}$ est l'énergie élastique stockée dans le matériau, exprimée en fonction des déformations :

$$\boxed{W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{L}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}} \qquad (7)$$

et sa variation première s'écrit :

$$\delta W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = \frac{\partial W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}$$

Le principe des travaux virtuels des déplacements affirme donc que la variation première de l'énergie totale U est nulle pour tout champ de déplacements cinématiquement admissibles. L'énergie totale est donc extrémale si le champ de contrainte est en équilibre.

Considérons l'énergie complémentaire totale :

$$\boxed{U^c = \int_{\Omega} W_{él}^c\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) dv - \int_{S_U} \left(\underline{\underline{\sigma}}\vec{n}\right)^T \vec{u}\, d\, S} \tag{8}$$

où $W_{él}^c$ est l'énergie élastique complémentaire stockée dans le matériau. L'énergie élastique complémentaire est donnée par :

$$\boxed{W_{él}^c\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{M}}}} : \underline{\underline{\sigma}} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial W_{él}^c\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}} \tag{9}$$

De façon tout à fait similaire on montre que le principe des travaux virtuels des contraintes implique que l'énergie totale complémentaire soit extrémale pour toute variation statiquement admissible des contraintes.

III.2. Principes de minimum

Nous utilisons le fait que l'énergie élastique soit une fonction définie positive des contraintes et des déformations pour établir des principes des minimum. Le fait que l'énergie élastique d'un corps déformée soit toujours positive, nous à permis d'affirmer que les matrices de Hooke $\underline{\underline{\underline{\underline{L}}}}$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{M}}}}$ sont forcément défini positives. La variation seconde de l'énergie totale par rapport aux déplacements s'écrit :

$$\delta^2 U = \delta\left\{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv - \int_{S_\sigma} \vec{\bar{t}}^T \delta\vec{u}^{CA} d\, S_\sigma - \int_{\Omega} \vec{f}^T \delta\vec{u}^{CA} d\Omega\right\}$$
$$= \delta\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{\Omega} \delta\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{L}}}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv \geq 0$$

Cette variation est défini positive comme le tenseur $\underline{\underline{\underline{L}}}$. Le champ de déplacements exacte minimise l'énergie totale. De façon similaire on montre que le champ de contraintes exacte maximise l'énergie complémentaire totale.

$$\boxed{\begin{array}{l} U = \int\limits_{\Omega} W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) dv - \int\limits_{S_\sigma} \vec{t}^{\,T} \vec{u}^{CA} d\,S_\sigma - \int\limits_{\Omega} \vec{f}^{\,T} \vec{u}^{CA} d\Omega \\ U\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA}\right) \geq U\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{ex}\right) \end{array}} \tag{10}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} U^c = \int\limits_{\Omega} W^c_{él}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) dv - \int\limits_{S_U} \left(\underline{\underline{\sigma}}\vec{n}\right)^T \vec{u} d\,S \\ U^c\left(\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\right) \leq U^c\left(\underline{\underline{\sigma}}^{ex}\right) \end{array}} \tag{11}$$

III.3. Mesure de l'erreur

III.3.1. Energie totale et énergie complémentaire totale

Ecrivons l'énergie élastique complémentaire (fonction des contraintes) en fonction de l'énergie élastique

$$W^c_{él}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - W_{él}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W_{él}\left(\varepsilon_{mn}\right)$$

Ainsi, l'énergie complémentaire totale s'écrit :

$$U^c = \int\limits_{\Omega} W^c_{él}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) dv - \int\limits_{S_U} \left(\underline{\underline{\sigma}}\vec{n}\right)^T \vec{u} d\,S \; = \int\limits_{\Omega} \left\{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W_{él}\left(\varepsilon_{mn}\right)\right\} dv - \int\limits_{S_U} \sigma_{ij} n_i u_j d\,S$$

soit en réarrangeant les termes

$$\begin{array}{l} \int\limits_{\Omega} \left\{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W_{él}\left(\varepsilon_{mn}\right)\right\} dv - \int\limits_{S_U} \sigma_{ij} n_i u_j d\,S \\ = -\int\limits_{\Omega} W_{él}\left(\varepsilon_{mn}\right) dv + \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dv - \int\limits_{S_U} \sigma_{ij} n_i u_j d\,S \end{array}$$

L'application du théorème de Gausse permet d'écrire :

$$U^{c} = -\int_{\Omega} W_{él}(\varepsilon_{mn})dv + \int_{S_U+S_\sigma} \sigma_{ij} n_i u_j dS - \int_{S_U} \sigma_{ij} n_i u_j dS$$

et après simplification des intégrales de surface :

$$\begin{aligned} U^{c}\left(\sigma_{ij}\right) &= -\int_{\Omega} W_{él}(\varepsilon_{mn})dv + \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_i u_j dS \\ &= -\left\{ \int_{\Omega} W_{él}(\varepsilon_{mn})dv - \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_i u_j dS \right\} \\ &= -U\left(\varepsilon_{mn}\right) \end{aligned}$$

L'énergie totale complémentaire associée au champ de contraintes exacte est donc l'opposé de l'énergie totale associée au champ de déplacements exacte.

$$\boxed{U^{c}\left(\sigma_{ij}\right) = -U\left(\varepsilon_{mn}\right)} \qquad (12)$$

III.3.2. Encadrement de la solution

Le champ des déplacements exactes rend minimale l'énergie totale parmis tous les champs cinématiquement admissibles (10). Le champ des contraintes exactes rend maximal l'énergie complémentaire totale parmis tous les champs de contraintes statiquement admissibles. Ainsi, la relation (12) permet d'écrire :

$$\boxed{-U\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{ca}\right) \leq -U\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{ex}\right) = U^{c}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{ex}\right) \leq U^{c}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{sa}\right)} \qquad (13)$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{ca}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{ex}$ sont respectivement un champ de déformations cinématiquement adimissible quelconques et le champ des déformations exactes. $\underline{\underline{\sigma}}^{sa}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{ex}$ sont respectivement un champ de contraintes statiquement admissibles quelconques et le champ des contraintes exactes.

IV. EXERCICES RESOLUS

IV.1. Equation des travaux virtuels (équation 2)

IV.1.1 Enoncé

Montrer que le travail de tout champ de contraintes statiquement admissibles $\underline{\underline{\sigma}}^{S.A.}$ sur tout champ de déformations cinématiquement admissibles $\underline{\underline{\varepsilon}}^{C.A.}$ est égal aux travail des forces imposées $\bar{\vec{t}}$ associées aux déplacements cinématiquement admissibles $\vec{u}^{C.A.}$ et aux forces de volume $\vec{f}$. Les contraintes statiquement admissibles $\underline{\underline{\sigma}}^{S.A.}$ et les déformations cinématiquement admissibles $\underline{\underline{\varepsilon}}^{C.A.}$ ne sont pas associées par la loi de Hooke.

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^{SA} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_\Omega \left(\vec{\sigma}^{SA}\right)^T \vec{\varepsilon}^{CA}\, dv \\ &= \int_{S_\sigma} \bar{\vec{t}}^T \vec{u}^{CA} d S_\sigma + \int_{S_U} \vec{t}^T \bar{\vec{u}}\, d S_U + \int_\Omega \vec{f}^T \vec{u}^{CA} d\Omega\end{aligned} \quad \begin{cases}\forall \vec{u}^{CA} \\ \forall \vec{\sigma}^{SA}\end{cases}$$

IV.1.2 Solution

Le fait que $\vec{u}^{CA}$ soit cinématiquement admissible, permet d'écrire le champ des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA}$ en fonction du gradient des déplacments :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{CA} dv = \int_\Omega \sigma_{ij} \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} + \frac{\left(\delta u_j^{CA}\right)}{\partial x_i}\right)}_{\varepsilon_{ij}^{CA}} dv$$

Nous transformons l'expression précédente pour faire apparaître un terme unique du tenseur gradient des vitesse.

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{CA}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{CA}}{\partial x_i}\right) dv = \int_\Omega \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^{CA}}{\partial x_j} + \sigma_{ji} \frac{\partial u_i^{CA}}{\partial x_j}\right) dv$$

Le tenseur des contraintes est en équilibre. L'équilibre en rotation, permet d'affirmer que $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique.

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_i^{CA}}{\partial x_j}+\underbrace{\sigma_{ji}}_{\sigma_{ji}}\frac{\partial u_i^{CA}}{\partial x_j}\right)dv=\int_{\Omega} \sigma_{ij}\frac{\partial u_i^{CA}}{\partial x_j}dv$$

Pour faire apparaître les intégrales de surfaces de (2) par l'utilisation du théorème de Gauss (Green Ostrogradsky), nous transformons le produit du tenseur des contraintes par le tenseur gradient des déplacements en une divergence :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\frac{\partial u_i^{CA}}{\partial x_j}dv=\int_{\Omega} \partial\frac{\left(\sigma_{ij}u_i^{CA}\right)}{\partial x_j}dv-\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}u_i^{CA}dv$$

La dernière intégrale peut être transformée par l'hypothèse d'équilibre des contraintes

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}u_i^{CA}dv=\int_{\Omega} f_i u_i^{CA}dv$$

Donc le travail des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ sur le champ cinématiquement admissible $\vec{u}^{CA}$ s'écrit

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{CA}dv=\int_{\Omega} \partial\frac{\left(\sigma_{ij}u_i^{CA}\right)}{\partial x_j}dv-\int_{\Omega} f_i u_i^{CA}dv$$

La deuxième intégrale du membre de gauche peut être transformée en une intégrale de surface par l'application du théorème de Gauss (Green-Ostrogradsky) :

$$\int_{\Omega} \partial\frac{\left(\sigma_{ij}u_i^{CA}\right)}{\partial x_j}dv=\int_{S_\sigma+S_U} \sigma_{ij}u_i^{CA}n_j dS$$

Les contraintes sont en équilibre, donc par hypothèse le tenseur des contraintes vérifie les conditions aux limites. Sur la surface S_σ, le vecteur contrainte est imposé et $\sigma_{ij}n_j=\overline{t}_i$. Ainsi, l'intégrale précédente peut s'écrire :

$$\int_{S_\sigma+S_U} \sigma_{ij} u_i^{CA} n_j dS = \int_{S_\sigma} \overline{t}_i u_i^{CA} dS + \int_{S_U} \sigma_{ij} u_i^{CA} n_j dS$$

Le membre de gauche de l'équation (2) s'écrit finalement :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{S_\sigma} \overline{t}_i u_i^{CA} dS + \int_{S_U} \sigma_{ij} u_i^{CA} n_j dS + \int_\Omega f_i u_i^{CA} dv$$

soit en notation vectorielle :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^{SA} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv &= \int_\Omega \left(\vec{\sigma}^{SA}\right)^T \vec{\varepsilon}^{CA}\ dv \\ &= \int_{S_\sigma} \overline{\vec{t}}^T \vec{u}^{CA} d S_\sigma + \int_{S_U} \vec{t}^T \overline{\vec{u}}\ d S_U + \int_\Omega \vec{f}^T \vec{u}^{CA} d\Omega \end{aligned} \begin{cases} \forall \vec{u}^{CA} \\ \forall \vec{\sigma}^{SA} \end{cases}$$

Soient $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\vec{u}$ l'état courant existant dans un solide soumis à des sollicitations $\overline{\vec{t}}$ sur S_σ et $\overline{\vec{u}}$ sur S_U alors :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^{SA} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv &= \int_\Omega \left(\vec{\sigma}^{SA}\right)^T \vec{\varepsilon}^{CA}\ dv \\ &= \int_{S_\sigma} \overline{\vec{t}}^T \vec{u}^{CA} d S_\sigma + \int_{S_U} \vec{t}^T \overline{\vec{u}}\ d S_U + \int_\Omega \vec{f}^T \vec{u}^{CA} d\Omega \end{aligned} \begin{cases} \forall \vec{u}^{CA} \\ \forall \vec{\sigma}^{SA} \end{cases}$$

(c.q.f.d.)

IV.2. Principe des travaux virtuels (équation 3)

IV.2.1. Enoncé

Soient $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ *et* $\vec{u}$ *l'état courant existant dans un solide soumis à des sollicitations* $\overline{\vec{t}}$ *sur* S_σ *et* $\overline{\vec{u}}$ *sur* S_U*. Soit* $\delta\vec{u}^{CA}$ *une perturbation cinématiquement admissible de* $\vec{u}$ *autour de l'état actuel (Figure 2).* $\delta\vec{u}^{CA}$ *est continu et dérivable au moins une fois dans* Ω *et* $\delta\vec{u}^{CA} = 0$ *sur* S_U*. Démontrez que*

a) Condition nécessaire : si le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ *est en équilibre , alors*

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{S_\sigma} \overline{\vec{t}}^T \delta\vec{u}^{CA} d S_\sigma + \int_\Omega \vec{f}^T \delta\vec{u}^{CA} d\Omega$$

$$\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} = \frac{1}{2}\left\{\left[\vec{\nabla}\left(\delta\vec{u}^{CA}\right)\right] + \left[\vec{\nabla}\left(\delta\vec{u}^{CA}\right)\right]^T\right\}$$

b) inversement si l'équation précédente est satisfaite pour tout champ $\delta\vec{u}^{CA}$ *cinématiquement admissible, le champ* $\underline{\underline{\sigma}}$ *est en équilibre.*

IV.2.2. Solution

a. Condition nécessaire

Montrons d'abord que l'équation (3) est vérifiée pour tout champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ *en équilibre et tout champ de déplacements* $\delta\vec{u}^{CA}$ *cinématiquement admissible. Le fait que* $\delta\vec{u}^{CA}$ *soit cinématiquement admissible, permet d'écrire le champ des déformations* $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA}$ *en fonction du gradient des déplacments :*

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_\Omega \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}^{CA} dv = \int_\Omega \sigma_{ij} \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\delta u_j^{CA}\right)}{\partial x_i}\right)}_{\varepsilon_{ij}^{CA}} dv$$

Nous transformons l'expression précédente pour faire apparaître un terme unique du tenseur gradient des déplacements.

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\delta u_j^{CA}\right)}{\partial x_i}\right) dv = \int_\Omega \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial\left(\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} + \sigma_{ji}\frac{\partial\left(\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j}\right) dv$$

Le tenseur des contraintes est en équilibre. L'équilibre en rotation, permet d'affirmer que $\underline{\underline{\sigma}}$ *est symétrique.*

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} \frac{\partial\left(\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} + \underbrace{\sigma_{ji}}_{\sigma_{ji}} \frac{\partial\left(\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} \right) dv = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial\left(\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} dv$$

Pour faire apparaître les intégrales de surfaces de (3) par l'utilisation du théorème de Gauss (Green Ostrogradsky), nous transformons le produit du tenseur des contraintes par le tenseur gradient des déplacements en une divergence :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i^{CA}}{\partial x_j} dv = \int_{\Omega} \partial \frac{\left(\sigma_{ij} \delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} dv - \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i^{CA} dv$$

La dernière intégrale peut être transformée par l'hypothèse d'équilibre des contraintes

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i^{CA} dv = \int_{\Omega} f_i \delta u_i^{CA} dv$$

Donc le travail des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ *sur la perturbation cinématiquement admissible* $\delta \vec{u}^{CA}$ *du champ des déplacmenents s'écrit*

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{CA} dv = \int_{\Omega} \partial \frac{\left(\sigma_{ij} \delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} dv - \int_{\Omega} f_i \delta u_i^{CA} dv$$

La deuxième intégrale du membre de gauche peut être transformée en une intégrale de surface par l'application du théorème de Gauss (Green-Ostrogradsky) :

$$\int_{\Omega} \partial \frac{\left(\sigma_{ij} \delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} dv = \int_{S_\sigma + S_U} \sigma_{ij} \delta u_i^{CA} n_j dS$$

Les contraintes sont en équilibre, donc par hypothèse le tenseur des contraintes vérifie les conditions aux limites. Sur la surface S_σ*, le vecteur contrainte est imposé et*

$\sigma_{ij} n_j = \overline{t}_i$. *La perturbation* $\delta\vec{u}^{CA}$ *des déplacements est cinématiquement admissible et respecte donc les conditions aux limites en déplacement. Donc sur la surface* S_U $\delta\vec{u}^{CA} = 0$.
Ainsi, l'intégrale précédente peut s'écrire :

$$\int_{S_\sigma + S_U} \sigma_{ij} \delta u_i^{CA} n_j dS = \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} \delta u_i^{CA} n_j dS = \int_{S_\sigma} \overline{t}_i \delta u_i^{CA} dS = \int_{S_\sigma} \overline{t}^T \delta\vec{u}^{CA} dS$$

Le membre de gauche de l'équation (3) s'écrit finalement :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{S_\sigma} \overline{\vec{t}}^T \delta\vec{u}^{CA} dS_\sigma + \int_\Omega \vec{f}^T \delta\vec{u}^{CA} d\Omega \quad \textit{(c.q.f.d.)}$$

(c.q.f.d.)

b. Condition suffisante

Si l'équation (3) est vérifiée pour tout champ de déplacement $\delta\vec{u}^{CA}$ *cinématiquement admissible, le champ de contraintes* $\underline{\underline{\sigma}}$ *est en équilibre :*

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_{S_\sigma} \overline{\vec{t}}^T \delta\vec{u}^{CA} dS_\sigma + \int_\Omega \vec{f}^T \delta\vec{u}^{CA} d\Omega$$

Comme le champ des déplacements est cinématiquement admissible, l'intégrale de volume peut s'écrire

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = \int_\Omega \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij}^{CA} dv = \int_\Omega \sigma_{ij} \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\delta u_j^{CA}\right)}{\partial x_i}\right)}_{\varepsilon_{ij}^{CA}} dv$$

L'intégrale précédente peut être transformée comme suit

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\delta u_j^{CA}\right)}{\partial x_i}\right) dv = \int_\Omega \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\sigma_{ij}\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\sigma_{ij}\delta u_j^{CA}\right)}{\partial x_i}\right) dv$$
$$-\int_\Omega \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i^{CA} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}\delta u_j^{CA}\right) dv$$

Nous transformons le premier terme du membre de droite de façon à faire apparaître une composante unique pour le champ de déplacement et une dérivée unique par rapport à x_j.

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\sigma_{ij}\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j}+\frac{\partial\left(\sigma_{ij}\delta u_j^{CA}\right)}{\partial x_i}\right)dv=\int_\Omega \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\sigma_{ij}\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j}+\frac{\partial\left(\sigma_{ji}\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j}\right)dv$$

L'application du théorème de Gauss permet d'écrire

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\sigma_{ij}\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j}+\frac{\partial\left(\sigma_{ji}\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j}\right)dv=\int_{S_\sigma+S_U}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\sigma_{ji}\right)\delta u_i^{CA}dS$$

La perturbation cinématiquement admissible du champ des déplacements est nulle sur S_u, donc

$$\int_{S_\sigma+S_U}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\sigma_{ji}\right)\delta u_i^{CA}n_j dS=\int_{S_\sigma}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\sigma_{ji}\right)\delta u_i^{CA}n_j dS$$

L'intégrale de volume de l'équation (3) prend maintenant la forme suivante :

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\delta u_i^{CA}\right)}{\partial x_j}+\frac{\partial\left(\delta u_j^{CA}\right)}{\partial x_i}\right)dv=\int_{S_\sigma}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\sigma_{ji}\right)\delta u_i^{CA}n_j dSdv$$
$$-\int_\Omega \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i^{CA}+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}\delta u_j^{CA}\right)dv$$

L'équation (3) conduit à l'égalité

$$\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}\right)-f_i\right]\delta u_i^{CA}dv=\int_{S_\sigma}\left[\overline{t}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\sigma_{ji}\right)\right]n_j\delta u_i^{ca}dS_\sigma$$

pour tout champ $\delta\vec{u}^{CA}$ cinématiquement admissible. D'après le lemme du calcul des variations, des intégrales identiquement nulles impliquent la nullité de l'intégrand :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}\right)-f_i \text{ dans } \Omega \;\; et \;\; \overline{t}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\sigma_{ji}\right)n_j=0 \text{ sur } S_\sigma$$

L'inversion des indices muets i et j permet d'établir que :

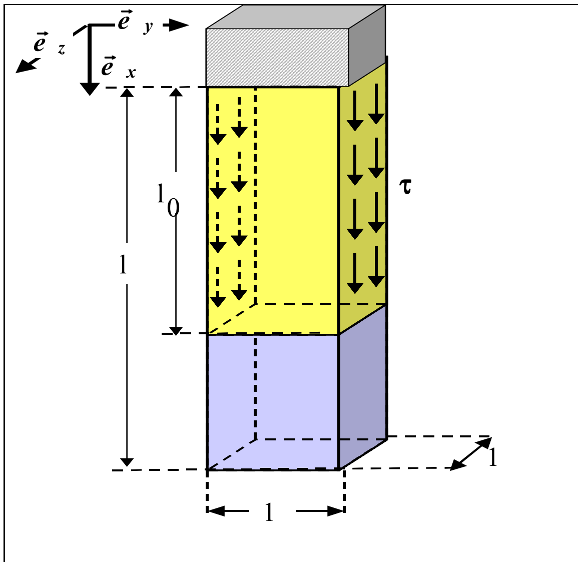
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ et } \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - f_i \text{ dans } \Omega \quad \textit{et que}$$

$$\overline{t}_i - \sigma_{ij} n_j = 0 \text{ sur } S_\sigma$$

(c.q.f.d.)

IV.3. Barre encastrée soumise à cisaillement sur deux faces

IV.3.1. Enoncé



Considérons une barre encastrée sousmise à des sollicitations en cisaillement sur deux faces (figure ci contre). On néglige la gravité et les forces de volume $\vec{f}$ sont nulles. On se propose de déterminer le champ de déplacement dans la barre.
On considère un champ de déplacement dépendant de 3 paramètres.

$$\vec{u}^{(B)} = \left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)\vec{e}_x$$

Calculez les valeur de a_1, a_2 et a_3 par application du principe des travaux virtuels (3).

IV.3.1. Solution

Pour le champ de déplacement $\vec{u}^{(B)} = \left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)\vec{e}_x$ la variation cinématiquement admissible s'écrit :

$$\delta\vec{u}^{(B)} = \left(\delta a_1 x + \delta a_2 x^2 + \delta a_3 x^3\right)\vec{e}_x$$

La seule composante non nulle du champ de déformation est ε_{xx}

$$\varepsilon_{xx}^{(B)} = \left(a_1 + 2a_2 x \ + 3a_3 x^2\right) \ \textit{avec} \ \delta\varepsilon_{xx}^{(B)} = \left(\delta a_1 + 2\delta a_2 x \ + 3\delta a_3 x^2\right)$$

Les contraintes correspondantes s'obtiennent par la loi de Hooke

$$\sigma_{xx}^{(B)} = E\left(a_1 + 2a_2 x \ + 3a_3 x^2\right)$$

Ainsi l'intégrale de volume dans l'équation (3) prend la forme

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = E\int_\Omega \left(a_1 + 2a_2 x \ + 3a_3 x^2\right)\left(\delta a_1 + 2\delta a_2 x \ + 3\delta a_3 x^2\right) dv$$

soit en factorisant les termes multipliant la variation des différentes amplitudes δa_1, δa_2 et δa_3

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{CA} dv = E\left[\left(a_1 l_0 + a_2 l_0^2 + a_3 l_0^3\right)(\delta a_1) + \left(a_1 l_0^2 + \frac{4}{3} a_2 l_0^3 + \frac{3}{2} a_3 l_0^4\right)(\delta a_2)\right]$$
$$+4\left(a_1 l_0^3 + \frac{3}{2} a_2 l_0^4 + \frac{9}{5} a_3 l_0^5\right)(\delta a_3)$$

Le chargement imposé t est indépendant du choix du champ de déplacement, l'intégrale de surface s'écrit donc

$$\int_{S_\sigma} \bar{\vec{t}}^T \delta \vec{u}^{CA} d S_\sigma = \tau \int_{S_\sigma} \left[(\delta a_1) x + (\delta a_2) x^2 + (\delta a_3) x^3\right] d S_\sigma$$

soit

$$\int_{S_\sigma} \bar{\vec{t}}^T \delta \vec{u}^{CA} d S_\sigma = 2\tau\left[(\delta a_1)\frac{l_0^2}{2} + (\delta a_2)\frac{l_0^3}{3} + (\delta a_3)\frac{l_0^4}{4}\right]$$

Ainsi le principe des travaux virtuels conduits aux système d'équations suivant :

$$E\left[\left(a_1 l_0 + a_2 l_0^2 + a_3 l_0^3\right)(\delta a_1) + \left(a_1 l_0^2 + \frac{4}{3} a_2 l_0^3 + \frac{3}{2} a_3 l_0^4\right)(\delta a_2)\right]$$
$$+4\left(a_1 l_0^3 + \frac{3}{2} a_2 l_0^4 + \frac{9}{5} a_3 l_0^5\right)(\delta a_3) = 2\tau\left[(\delta a_1)\frac{l_0^2}{2} + (\delta a_2)\frac{l_0^3}{3} + (\delta a_3)\frac{l_0^4}{4}\right] \quad \forall \delta a_1, \delta a_2, \delta a_3$$

Ce système doit être satisfait pour toutes valeurs des variations des amplitudes δa_1, δa_2 *et* δa_3. *Nous choisissons trois vecteurs particuliers* $[\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [1,0,0]$, $[\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [0,1,0]$ *et* $[\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [0,0,1]$ *pour les variations des amplitudes. Ceci conduit au système d'équations suivant pour les amplitudes* a_i.

$$\begin{array}{l} [\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [1,0,0] \rightarrow \\ [\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [0,1,0] \rightarrow \\ [\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3] = [0,0,1] \rightarrow \end{array} \begin{cases} a_1 l_0 + a_2 l_0^2 + a_3 l_0^3 = \tau l_0^2 / E \\ a_1 l_0^2 + 4 a_2 l_0^3 / 3 + 3 a_3 l_0^4 / 2 = 2\tau l_0^3 / 3E \\ a_1 l_0^3 + 3 a_2 l_0^4 / 2 + 9 a_3 l_0^5 / 5 = \tau l_0^4 / 2E \end{cases}$$

La solution du système précédent est immédiate et conduit à :

$$\left[a_1, a_2, a_3\right] = \left[2\frac{l_0 \tau}{E} \quad -\frac{\tau}{E} \quad 0\right]$$

IV.4. Principe des travaux virtuels de contraintes (équation 4)

IV.4.1. Enoncé

Soient $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\vec{u}$ l'état courant existant dans un solide soumis à des sollicitations $\overline{\vec{t}}$ sur S_σ et $\overline{\vec{u}}$ sur S_U. $\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}$ une perturbation statiquement admissible de $\underline{\underline{\sigma}}$ autour de l'état actuel. $\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}$ est continu et dérivable au moins une fois dans Ω et vérifie les équations d'équilibre pour un chargement nul $\overrightarrow{div}\left(\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\right)=0$ $\delta\vec{u}^{CA}=0$ sur S_U.

Démontrez que

a) Condition nécessaire :Si le champ u est cinématiquement admissible,

$$\int_\Omega \delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}:\underline{\underline{\varepsilon}}\, dv=\int_{S_U}\left(\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n}\right)^T\vec{u}\, dS_\sigma$$

b) Si l'équation précédente est vérifiée pour tout champ de contrainte statiquement admissible, le champ de déplacement vérifie l'équation de compatibilité.

IV.4.2. Solution

a) Condition nécessaire : tout champ de déplacements cinématiquement admissibles satisfait l'équation (4) :

Si le champ de déplacements est cinématiquement admissible, nous pouvons écrire

$$\int_\Omega \delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}:\underline{\underline{\varepsilon}}\, dv=\int_\Omega \delta\sigma_{ij}^{SA}\varepsilon_{ij}^{SA}dv=\frac{1}{2}\int_\Omega \delta\sigma_{ij}^{SA}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dv$$

Or la perturbation $\delta\underline{\underline{\sigma}}$ des contraintes étant statiquement admissible, elle satisfait l'équation d'équilibre en rotation, donc

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \delta\sigma_{ij}^{SA}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dv=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\delta\sigma_{ij}^{SA}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\delta\sigma_{ji}^{SA}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)dv$$
$$=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\delta\sigma_{ij}^{SA}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\delta\sigma_{ji}^{SA}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)dv=\int_\Omega \delta\sigma_{ij}^{SA}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dv$$

La perturbation $\delta\underline{\underline{\sigma}}$ des contraintes étant statiquement admissible, satisfait aussi l'équation d'équilibre en translation, donc

$$\int_\Omega \delta\sigma_{ij}^{SA} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dv = \int_\Omega \frac{\partial\left(\delta\sigma_{ij}^{SA} u_i\right)}{\partial x_j} dv - \int_\Omega \frac{\partial\left(\delta\sigma_{ij}^{SA}\right)}{\partial x_j} u_i dv = \int_\Omega \frac{\partial\left(\delta\sigma_{ij}^{SA} u_i\right)}{\partial x_j} dv$$

Cette expression peut être transformée en intégrale de surface par le théorème de Gauss

$$\int_\Omega \frac{\partial\left(\delta\sigma_{ij}^{SA} u_i\right)}{\partial x_j} dv = \int_{S_\sigma + S_U} \left(\delta\sigma_{ij}^{SA} u_i\right) n_j dS$$

Sur S_σ, la perturbation statiquement admissible des contraintes vérifie la condition aux limites $\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n} = 0$, ainsi l'intégrand est nul sur S_σ et l'intégrale précédente se réduit à

$$\int_{S_\sigma + S_U} \left(\delta\sigma_{ij}^{SA} u_i\right) n_j dS = \int_{S_U} \left(\delta\sigma_{ij}^{SA} u_i\right) n_j dS$$

(c.q.f.d.).

b) Condition suffisante : Si l'équation (4) est satisfaite pour tout champ $\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}$ statiquement admissible le champ de déplacement est cinématiquement admissible

$$\int_\Omega \delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA} : \underline{\underline{\varepsilon}}\, dv = \int_{S_U} \left(\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n}\right)^T \vec{u}\, dS_\sigma$$

Comme $\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}$ est statiquement admissible $\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n} = 0$ sur S_σ. Donc l'intégrale précédente peut s'écrire :

$$\int_{S_U} \left(\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n}\right)^T \vec{u}\, dS_\sigma = \int_{S_U + S_\sigma} \left(\delta\underline{\underline{\sigma}}^{SA}\vec{n}\right)^T \vec{u}\, dS_\sigma = \int_{S_\sigma + S_U} \left(\delta\sigma_{ij}^{SA} u_i\right) n_j dS$$

Le théorème de Gauss permet de transformer l'intégrale précédente en une intégrale de volume

$$\int_{S_\sigma + S_U} \left(\delta\sigma_{ij}^{SA} u_i\right) n_j dS = \int_\Omega \frac{\partial\left(\delta\sigma_{ij}^{SA} u_i\right)}{\partial x_j} dv$$

Or la perturbation $\delta\underline{\underline{\sigma}}$ des contraintes étant statiquement admissible, elle satisfait l'équation d'équilibre en rotation, donc

$$\int_{\Omega} \frac{\partial\left(\delta\sigma_{ij}^{SA} u_i\right)}{\partial x_j} dv = \int_{\Omega} \delta\sigma_{ij}^{SA} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dv$$

La symétrie du tenseur contrainte permet d'écrire

$$\int_{\Omega} \delta\sigma_{ij}^{SA} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dv = \int_{\Omega} \delta\sigma_{ij}^{SA} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dv$$

L'équation (4) conduit donc à l'égalité suivante :

$$F = \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon_{ij} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} \delta\sigma_{ij}^{SA} dv \quad \forall \delta\sigma_{ij}^{SA}$$

L'intégrale F est identiquement nulle pour tout champ de contrainte statiquement admissible, d'après le lemme du calcul des variations, l'intégrand doit être identiquement nul :

$$\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \text{ dans } \Omega$$

(c.q.f.d.)