

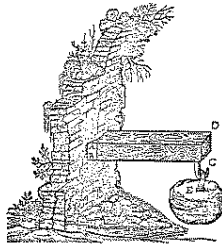
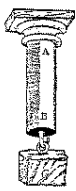
CHAPITRE IV

MATERIAUX ELASTIQUES

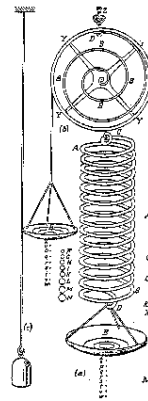
- I. Historique**
- II. L'essai de traction**
 - II.1. Courbe force-allongement*
 - II.2. Courbe contrainte-déformation*
 - II.2.1. Expression du tenseur déformation d'Euler et de la contrainte de Cauchy
 - II.2.2. Domaine d'élasticité
- III. Matériau isotrope élastique linéaire**
 - III.1. Relation contraintes déformation en traction*
 - III.1.1. Traction uniaxiale
 - III.1.2. Traction biaxiale
 - III.1.3. Traction lelong de 3 axes orthogonaux
 - III.2. Sollicitation en cisaillement*
 - III.3. La loi de Hooke complète pour un matériau isotrope*
- IV. Matériaux anisotropes**
- V. L'énergie de déformation**
 - V.1. Expression de l'énergie en fonction des contraintes et en fonction des déformations*
 - V.2. Densité d'énergie ou énergie par unité de volume*

I. HISTORIQUE

Il semble que les premières analyses mathématiques de la résistance des solides à la rupture aient été faites par Galilée (1564-1642) dans son ouvrage « Discorsi e Dimostrazioni matematiche » publié en 1639 (figure 1a).



- a -



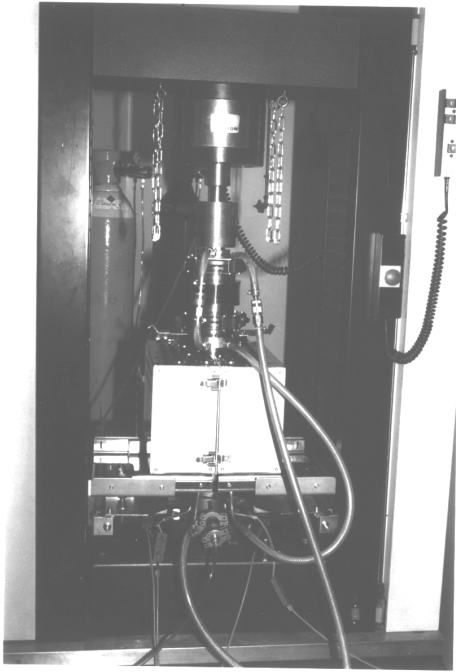
- b -

Figure 1. Dessins de Galilée pour illustrer l'essai de traction et l'essai de flexion (a) Schémas dus à Hooke décrivant ses expériences (b).

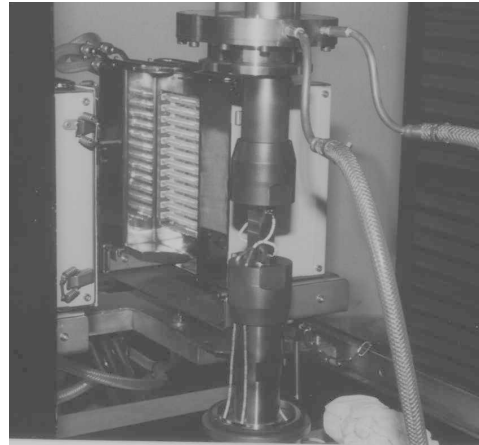
En Angleterre et en France, à la fin du 17^{ème} siècle, Hooke et Mariotte découvraient presque simultanément la relation entre déformations et contraintes en élasticité. Vers 1660, Hooke découvrit la loi entre l'allongement d'un ressort et la force qui lui est appliquée (figure 2). En fait, Hooke n'appliqua pas ses idées au problème de la flexion des poutres entrevu par Galilée (figure 1). C'est Mariotte qui, en 1680, publia la même loi et expliqua la différence entre fibres tendues et fibres comprimées dans une poutre en flexion. Ce n'est qu'en 1807 que Young (1773-1829) introduisit la notion de module d'élasticité.

II. L'ESSAI DE TRACTION

II.1. Courbe force-allongement



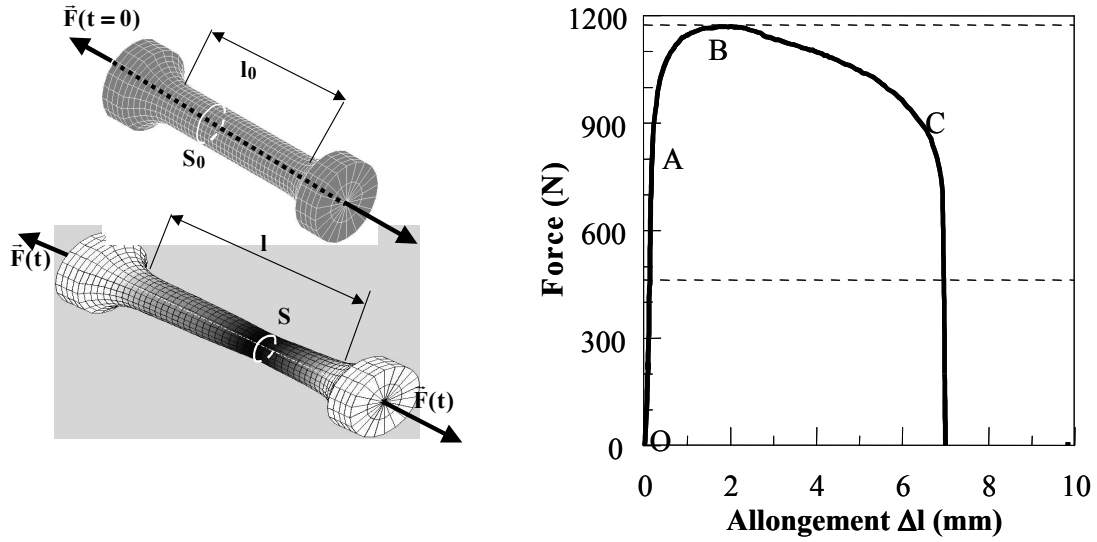
- a -



- b -

Figure 2 : machine de traction avec montage, four fermé (a) et four ouvert (b)

L'essai de traction (figure 2) est le test le plus couramment utilisé pour caractériser le comportement mécanique d'un matériau, et donc établir sa " loi de comportement ". Cet essai consiste le plus souvent à soumettre une éprouvette (ou plus exactement une partie dite " utile " de l'éprouvette) à un allongement Δl par déplacement relatif de ses extrémités, et à mesurer la force F nécessaire à cet allongement. Une représentation schématique de l'essai de traction est donnée sur la figure 3. Dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement à la partie OA (déformation élastique) de la courbe "force-allongement". Les parties AB (déformation plastique homogène) et BC (déformation plastique localisée) n'entrent pas dans le cadre de ce cours. Nous nous plaçons de plus dans ce paragraphe dans le cas d'un matériau "isotrope", c'est-à-dire qui possède les mêmes propriétés dans toutes les directions.



- a -

- b -

Figure 3: Représentation schématique de l'essai de traction. Eprouvette à l'état initial et déformé (a). Courbe force-allongement (b).

II.2. Courbe contrainte-déformation

II.2.1. Expression du tenseur déformation d'Euler et de la contrainte de Cauchy

Analysons les efforts appliqués à la partie utile de l'éprouvette de la figure 3 a pour la déformer. Pour cela, nous nous plaçons dans un repère orthonormé. En choisissant l'axe \bar{e}_3 comme axe de traction, et en notant S la section de la partie utile, on constate que le vecteur contrainte appliqué sur la surface normale à cet axe est parallèle à cet axe et vaut $(F/S) \bar{e}_3$. Les vecteurs contraintes appliqués sur les autres surfaces étant nuls, il s'en suit que le tenseur des contraintes de Cauchy vaut :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F/S \end{bmatrix} \quad (1)$$

Analysons maintenant la cinématique de la transformation. Si α est la vitesse de déplacement de la partie supérieure de l'éprouvette (l'autre restant fixe), et si β est sa vitesse

de rétrécissement supposée identique dans les deux autres directions, alors la description lagrangienne du mouvement donne dans un repère cartésien :

$$\bar{x} = \bar{\Phi}(\bar{X}, t) = \begin{cases} X_1(1 - \beta t) \\ X_2(1 - \beta t) \\ X_3(1 + \alpha t) \end{cases} \quad (2)$$

Le tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ et son inverse $\underline{\underline{F}}^{-1}$ s'écrivent respectivement

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{X}} = \begin{bmatrix} 1 - \beta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \beta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \alpha t \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{F}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \beta t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \beta t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 + \alpha t} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Le tenseur des déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$ s'écrit

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \begin{bmatrix} -\beta t + \frac{(\beta t)^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta t + \frac{(\beta t)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} \end{bmatrix}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ est exprimé à partir des valeurs actuelles de la force F et de la surface S . Pour calculer la puissance, il faut associer le tenseur des contraintes de Cauchy au tenseur vitesse de déformation $\underline{\underline{\dot{e}}}$. En se basant que sur des tenseur lagrangiens, le tenseur vitesse de déformation $\underline{\underline{\dot{e}}}$ peut être obtenu à partir de la connaissance du tenseur gradient des vitesses $\underline{\underline{L}}$:

$$\underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-\beta}{1-\beta t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\beta}{1-\beta t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{1+\alpha t} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Le tenseur $\underline{\underline{L}}$ peut aussi être obtenu à partir du champ de vitesse exprimé en eulérien.

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \begin{cases} -\beta X_1 = -\beta \frac{x_1}{(1-\beta t)} \\ -\beta X_2 = -\beta \frac{x_2}{(1-\beta t)} \\ \alpha X_3 = \alpha \frac{x_3}{(1+\alpha t)} \end{cases} \quad \underline{\underline{L}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{-\beta}{(1-\beta t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\beta}{(1-\beta t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{(1+\alpha t)} \end{bmatrix}$$

Ainsi le tenseur vitesse de déformation est donné par

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T) \quad (5)$$

Le tenseur déformation s'obtient par intégration de $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \ln(1-\beta t) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(1-\beta t) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(1+\alpha t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

En remplaçant X_3 par l_0 et x_3 par $l_0 + \Delta l$, on obtient $\epsilon_{33} = \ln(1 + \Delta l / l_0)$. Pour pouvoir tracer la courbe $\sigma_{33} - \epsilon_{33}$ à partir de la connaissance de la courbe $F - \Delta l$, il faut déterminer la surface S pendant l'histoire de la déformation. Si le paramètre est connu en fonction de la déformation ϵ_{33} , la surface S peut être calculée pour chaque déformation. Or pour des déformations importantes (non élastiques), une localisation de la déformation, appelée striction est observée. Cette striction conduit à des contraintes plus importantes que dans le cas d'une

déformation homogène. Ce point ne sera pas abordé dans ce cours. En effet, dans ce cours, nous nous limiterons à la partie OA de la courbe force-déplacement.

II.2.2 Domaine d'élasticité

Dans ce chapitre nous étudierons plus en détail le comportement des matériaux dans le régime élastique. Ce régime concerne l'utilisation des structures dans la vie courante sans déformations permanentes (ponts, voitures, avions, trains, structures du génie civil, ...).

II. MATERIAU ISOTROPE ELASTIQUE LINEAIRE

Le matériau est dit isotrope, si le comportement considéré (mécanique, électrique, magnétique) ne dépend pas de la direction de sollicitation. L'isotropie du matériau est une hypothèse très forte. Le comportement du matériau dépend de sa microstructure. Or cette microstructure est formée au cours de l'élaboration du matériau. Ainsi un matériau peut révéler un comportement isotrope ou fortement anisotrope suivant l'élaboration qu'il a subit.

III.1. Relation contraintes déformation

III.1.1. Traction uniaxiale

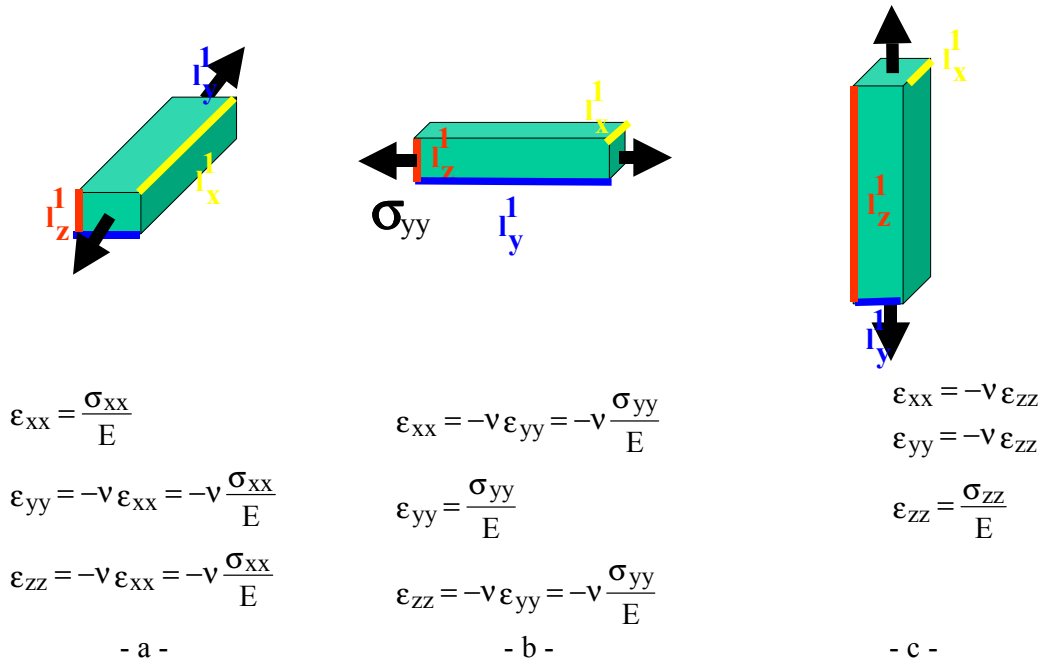


Figure 4: Traction uniaxiale suivant l'axe des : x (a), l'axe des y (b) et l'axe des z (c).

Observons un même volume de matériau sollicité suivant trois directions orthogonales (Figure 4). Une déformation proportionnelle à la contrainte appliquée est observée dans la direction de traction. Dans les deux directions perpendiculaires, le matériau

se rétracte proportionnellement à l'allongement subit dans la direction de traction. Le coefficient de proportionnalité ν est appelé coefficient de Poisson.

III.1.2. Traction biaxiale

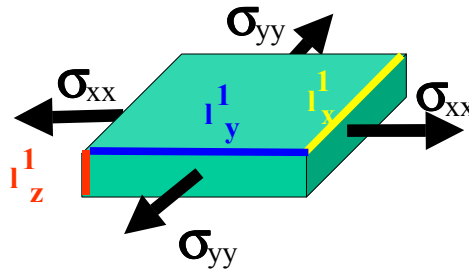


Figure 5. Traction biaxiale suivant l'axe des x et l'axe des y .

La figure 2 montre un volume de matière soumis à traction bi-axiale le long de l'axe des x et de l'axe des y . Pour déterminer les déformations dans ce volume de matière, nous appliquons le principe de superposition. Le principe de superposition s'énonce comme suit :

Principe de superposition :
Si l'intensité de l'effet (la déformation, le courant) est linéairement proportionnelle à l'intensité de la cause (les contraintes, la tension), l'intensité de la réponse à deux sollicitations correspond à la somme des intensités des réponses à chaque sollicitation prise séparément.

$$\begin{aligned} f(x) = ax &\rightarrow f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) \\ f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2) \end{aligned} \tag{7}$$

<i>Traction selon x</i>	<i>Traction selon y</i>	<i>Traction selon x et y</i>
$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$	$\epsilon_{xx} = -\nu \frac{\sigma_{yy}}{E}$	$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E}$
$\epsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}$	$\epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E}$	$\epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{xx}}{E}$
$\epsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}$	$\epsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{yy}}{E}$	$\epsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E}$

Tableau 1 : Relations contraintes déformations pour (a) de la traction uni-axiale selon l'axe des x, (b) de la traction uni-axiale selon l'axe des y et (c) de la traction bi-axiale selon l'axe des x et l'axe des y.

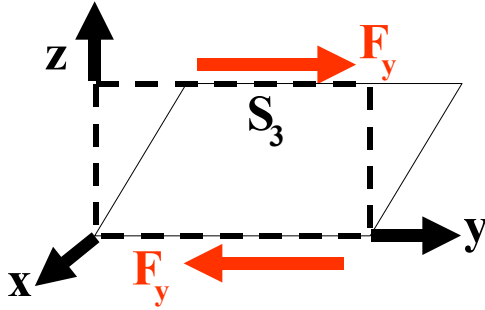
Le tableau 1 rappelle les déformations pour une traction uni-axiale le long de l'axe des x et une traction uni-axiale le long de l'axe des y. D'après le principe de superposition, la déformation correspondant à une traction le long de l'axe des x et le long de l'axe des y est la somme des déformations précédentes.

III.1.3. Traction le long de 3 axes orthogonaux

Pour déterminer les déformations sous sollicitation triaxiale on applique le principe de superposition.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \\
 \epsilon_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{E} - \nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

III.1.4. Sollicitation en cisaillement



$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{2G} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{2G} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{2G} \end{aligned} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Figure 6 Cisaillement lelong de l'axe des y.

La figure 6 montre un volume de matière soumis à une force de cisaillement le long de l'axe des y. Rappelons que la déformation ε_{yz} mesure le changement de l'angle l'axe des y et l'axe des z.

III.2. La loi de Hooke complète pour un matériau isotrope

Les relations entre contraintes et déformations rappelées dans le paragraphe précédent peuvent s'écrire sous forme matricielle. Les déformations et les contraintes sont écrites sous forme de vecteurs colonnes à 6 composantes. La matrice permettant le passage des contraintes aux déformations s'appelle la matrice des compliances.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

Cette forme est employée classiquement. Cependant, l'écriture suivante de la loi de Hooke avec le facteur $\sqrt{2}$ devant les déformations de cisaillement et les contraintes de cisaillement

permet de donner une expression particulièrement simple à l'énergie élastique. Remarquons que la matrice des compliances n'est pas affectée par la présence du facteur $\sqrt{2}$.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{yz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sqrt{2}\sigma_{xz} \\ \sqrt{2}\sigma_{yz} \\ \sqrt{2}\sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\bar{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{yz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\bar{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sqrt{2}\sigma_{xz} \\ \sqrt{2}\sigma_{yz} \\ \sqrt{2}\sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \quad (9)$$

La matrice des compliances $\underline{\underline{M}}$ a toutes les propriétés d'un tenseur symétrique du quatrième ordre. Souvent, il peut s'avérer utile d'utiliser plutôt la notation indicielle d'Einstein pour définir la loi de comportement :

$$\varepsilon_{ij} = M_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (10)$$

Dans cette notation $\underline{\underline{M}}$ est un tenseur symétrique du 4^{ème} ordre. L'inverse d'un tenseur $\underline{\underline{M}}$, le tenseur $\underline{\underline{L}}$, est appelé tenseur de rigidité.

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (11)$$

La relation entre contraintes et déformations s'écrit de façon explicite sous la forme suivante pour un matériau isotrope :

$$\sigma_{ij} = 2G \left\{ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right\} \begin{cases} \sigma_{11} = 2G \left\{ \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right\} & (i=1, j=1) \\ \sigma_{22} = 2G \left\{ \varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right\} & (i=2, j=2) \\ \sigma_{33} = 2G \left\{ \varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right\} & (i=3, j=3) \\ \sigma_{13} = 2G \{ \varepsilon_{13} \} & (i=2, j=3) \\ \sigma_{23} = 2G \{ \varepsilon_{23} \} & (i=1, j=2) \\ \sigma_{12} = 2G \{ \varepsilon_{12} \} & \end{cases} \quad (12)$$

IV. MATERIAUX ANISOTROPES

La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy (1789-1857). Cauchy a proposé d'exprimer chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations.

Dans ce cas les tenseurs d'élasticité $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{L}}$ ont *a priori* 81 composantes (chaque indice varie de 1 à 3). Toutefois, le tenseurs des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ et le tenseurs de petites déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont symétriques. Ces tenseurs n'ont donc que 6 composantes indépendantes. La liaison linéaire entre ces deux tenseurs peut donc s'exprimer par 36 termes.

En effet, $\varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ et $\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$ permet d'écrire

$$\underbrace{\varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} = M_{jikl} \sigma_{kl}}_{\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}} \rightarrow M_{ijkl} = M_{jikl}$$

$$\underbrace{\varepsilon_{ij} = M_{ijlk} \sigma_{lk} = M_{ijkl} \sigma_{kl}}_{\sigma_{lk} = \sigma_{kl}} \rightarrow M_{ijlk} = M_{ijkl}$$

Une démonstration similaire est possible pour le tenseur des rigidités :

$$\boxed{\begin{aligned} M_{ijkl} &= M_{jikl} = M_{ijkl} \\ L_{ijkl} &= L_{jikl} = L_{ijkl} \end{aligned}} \quad (13)$$

L'existence d'une énergie de déformation associée de façon bi-univoque à un état de déformation ou un état de contrainte donné permet d'énoncer une condition de symétrie supplémentaire pour les tenseurs d'élasticité.

V. L'ENERGIE DE DEFORMATION

L'expression de l'énergie en fonction des contraintes et des déformations est de très grande importance en mécanique des matériaux. C'est l'énergie qui permet de définir la partie réversible et la partie irréversible d'une déformation. C'est à partir de l'expression de l'énergie que les relations contraintes - déformations pour les matériaux non linéaires sont élaborées. Pour les matériaux élasto-plastiques une extension du concept d'énergie, appelé potentiel des contraintes permet de définir la relation entre vitesses de déformation et contraintes. Dans ce paragraphe, nous calculons l'énergie stockée dans un matériau élastique isotrope soumis à un chargement externe.

V.1 Expression de l'énergie en fonction des contraintes et en fonction des déformations

V.1.1. Traction uniaxiale

Considérons une barre ou un ressort en traction uni-axiale (Figure 7 a). Le travail nécessaire pour déformer la barre est donné par

$$W = \int_0^{u \text{ final}} F(u) du$$

où u est le déplacement imposé à la barre à partir de la position d'équilibre et F la force correspondante. En traction uni-axiale, le passage du couple force, déplacement au couple contraintes, déformations se fait simplement. En effet en remplaçant dans l'expression précédente, F par σS et u par $l d\epsilon$, (S est la section actuelle de la barre et l la longueur correspondante), nous obtenons :

$$W = \int_0^{\epsilon \text{ final}} \{\sigma(\epsilon) S\} \{l d\epsilon\}$$

Pour des petites déformations élastiques, nous supposons que la section S et la longueur l peuvent être remplacées par les valeurs initiales S_0 et l_0 correspondantes. La loi de Hooke en traction uni-axiale, permet alors d'écrire :

$$W \approx S_0 l_0 \int_0^{\varepsilon_{\text{final}}} E \varepsilon d\varepsilon = V_0 \frac{E \varepsilon^2}{2} = V_0 \frac{\sigma^2}{2E}$$

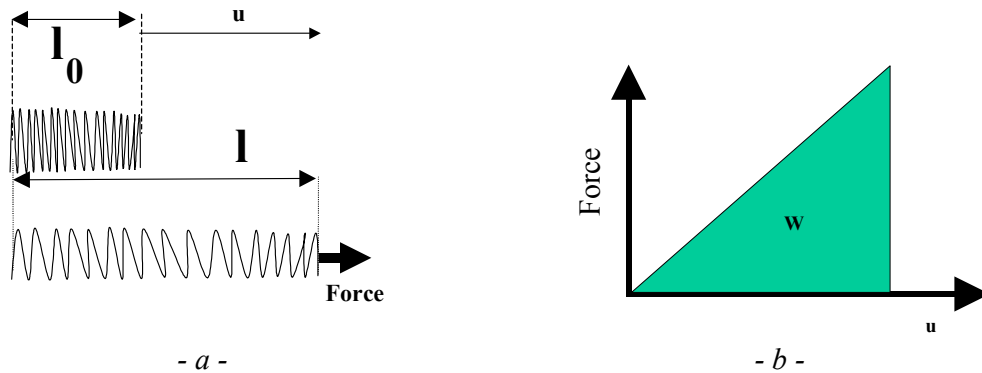


Figure 7. Essai de traction uni-axiale. (a) ressort en déformation uni-axiale (b) relation entre force et déplacement.

La figure 7 b représente la relation linéaire entre la force F et le déplacement $u=l - l_0$. L'énergie élastique stocké dans la barre correspond à l'aire sous la courbe F - u . L'énergie dépend de façon quadratique des déformations ε et des contraintes σ .

V.1.2. Traction multi-axiale avec forces de volume nulles

La figure 8 montre, un solide soumis à chargement complexe. Supposons que le solide ait atteint un point d'équilibre sous l'ensemble des charges appliquées. Nous incrémentons les forces à partir de ce point d'équilibre. Les déplacements au point d'application de chaque forces changent d'une quantité $\Delta \bar{u}$. L'énergie dW fournie par les forces appliquées et les réactions pour imposer cette déformation supplémentaire est données par :

$$dW = \int_S \bar{\mathbf{F}}^T(\bar{\mathbf{u}}) \Delta \bar{\mathbf{u}} dS = \int_S F_i(u_m) \Delta u_i dS$$

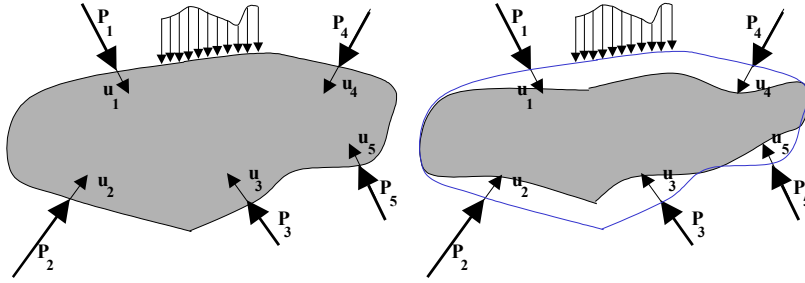


Figure 8. Solide soumis à chargement multiaxial. (a) solide non déformé. (b) solide déformé.

Nous transformons l'expression de dW , afin de faire apparaître les contraintes et les déformations. Les forces F_i peuvent être remplacées par la projection des contraintes sur la normale à l'élément de surface considéré

$$dW = \int_S F_i(u_m) \Delta u_i dS = \int_S \underbrace{\sigma_{ij} n_j}_{F_i} \Delta u_i dS$$

L'application du théorème de Gauss ou de Green-Ostrogradsky permet de transformer l'intégrale de surface en une intégrale sur le volume V .

$$dW = \int_S \sigma_{ij} n_j \Delta u_i dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \Delta u_i) dv$$

En explicitant la dérivée du produit $(\sigma_{ij} \Delta u_i)$, nous obtenons

$$dW = \int_V \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right)}_0 \Delta u_i dv + \int_V \sigma_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Delta u_i \right) dv$$

Le premier terme du second membre est nul si les forces de volumes sont nulles. En effet, les équations d'équilibre en translation donnent $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0$. L'énergie nécessaire pour passer de l'état d'équilibre (1) à l'état d'équilibre (2) s'écrit comme la somme des contraintes dans l'état d'équilibre (1) multipliées par les variations des déformations entre les deux états d'équilibre :

$$dW = \int_V \sigma_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Delta u_i \right) dv$$

Nous modifions légèrement l'expression précédente afin de faire apparaître les incréments des déformations. Les indices i et j sont muets. L'ordre des indices n'a pas d'influence. Il faut seulement, que les indices se correspondent comme indiqué :

$$dW = \int_V \sigma_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Delta u_i \right) dv$$

Ainsi, nous pouvons écrire dW sous la forme suivante :

$$dW = \frac{1}{2} \left\{ \int_V \sigma_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Delta u_i \right) + \underbrace{\sigma_{ji}}_{\sigma_{ij}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u_j \right) \right\} dv$$

La symétrie du tenseur des contraintes ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), permet de passer des incréments de déplacements aux incréments de déformations :

$$dW = \int_V \sigma_{ij} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Delta u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u_j \right)}_{\Delta \varepsilon_{ij}} dv$$

$$dW = \int_V \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij} dv$$

L'énergie de déformation s'écrit donc :

$$W = \int_V \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv \quad (14)$$

V.2. Densité d'énergie, potentiel de déformation

V.2.1. Densité d'énergie ou énergie par unité de volume

En mécanique des matériaux, on est surtout intéressé par l'énergie de déformation par unité de volume W_{vol} .

- *Les différentes écritures de l'énergie par unité de volume*

L'énergie par unité de volume s'exprime comme le travail des contraintes sur les déformations.

$$W_{vol} = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

Avec les vecteurs $\vec{\sigma}$ et $\vec{\varepsilon}$ introduits plus haut, nous pouvons écrire

$$W_{vol} = \int_0^{\varepsilon} \vec{\sigma}^T d\vec{\varepsilon} \quad (15)$$

Les contraintes sont linéairement proportionnelles aux déformations. Cette proportionnalité permet d'écrire :

$$W_{vol} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

La loi de Hooke permet d'exprimer l'énergie par unité de volume en fonction des déformations seules ou des contraintes seules :

$$W_{vol} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} M_{ijkl} \sigma_{kl} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} L_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$W_{vol} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (16)$$

$$W_{vol} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}^T M \vec{\sigma} = \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}^T L \vec{\varepsilon} \quad (17)$$

V.2.2. Propriétés des tenseurs d'élasticité

- *Positivité des tenseurs d'élasticité*

L'énergie de déformation est positive ou nulle. L'énergie de déformation élastique est nulle si et seulement si les contraintes sont toutes nulles et les déformations toutes égales à zéro. Les matrices $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{L}}$ sont donc définies positives.

- *Symétrie des tenseurs d'élasticité*

$$W_{vol} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} M_{ijkl} \sigma_{kl} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} L_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

permet d'écrire pour le tenseur des souplesses $\underline{\underline{M}}$:

$$M_{ijkl} = \frac{\partial^2 W_{vol}}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial^2 W_{vol}}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{ij}} = M_{klij}$$

et de façon similaire pour le tenseur des rigidités $\underline{\underline{L}}$:

$$L_{ijkl} = \frac{\partial^2 W_{vol}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W_{vol}}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = L_{klij}$$

Les tenseurs $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{L}}$ ont donc en réalité que 21 composantes indépendantes.