

# APPLICATION AUX POUTRES

## 1 Cinématique

### 1.1 Géométrie

Une poutre est un solide engendré par une aire plane  $S$  qui est déplacée dans l'espace de manière que durant son mouvement, le centre de gravité  $G$  de la section  $S$  parcourt une ligne donnée  $L$ , et que l'aire se maintienne constamment normale à cette surface (figure 1). La ligne  $L$  est appelée  *fibre moyenne*  de la poutre. Une poutre est dite :

- gauche si la ligne  $L$  suit une courbe gauche,
- plane si la ligne  $L$  suit une courbe plane,
- droite si la ligne  $L$  suit une droite.

De plus, une poutre prismatique a une section  $S$  constante, et une poutre à plan moyen est une poutre plane dont le plan est un plan de symétrie de la section  $S$ . Enfin, si la fibre moyenne est une courbe fermée, on parlera d'anneau (les sections droites initiale et finale sont confondues).

Une poutre est caractérisée géométriquement par :

- une section  $S$  suffisamment massive,
- une longueur selon  $L$  grande devant les dimensions transversales,
- un rayon de courbure de  $L$  grand devant les dimensions transversales,
- un profil sans discontinuité.

La théorie élastique des poutres est basée sur celle des  *milieux curvilignes* . Une position sur la poutre sera caractérisée uniquement par l'abscisse curvi-

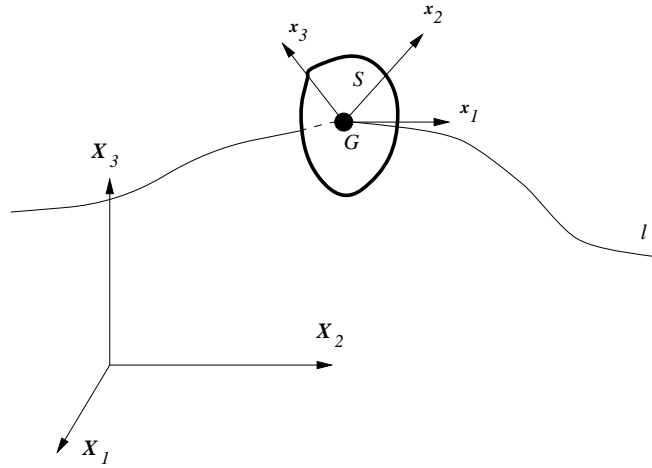


FIG. 1 – Définition géométrique d'une poutre

ligne  $l$  d'un point sur la fibre moyenne  $L$ . Le reste de la géométrie, c'est-à-dire la section  $S$ , sera caractérisé en chaque point de la fibre moyenne par :

- la section  $S$  de la poutre obtenue sous la forme :

$$S = \int_S ds = \int_S dx_2 dx_3$$

- des moments d'ordre 1 nuls puisque le point  $G$  de la fibre moyenne est le centre de gravité de la section  $S$  :

$$\int_S x_2 ds = \int_S x_3 ds = 0$$

- des moments d'ordre 2, ou moments quadratiques, ou moments d'inertie :

$$I_2 = \int_S x_3^2 ds \text{ et } I_3 = \int_S x_2^2 ds$$

- un moment produit :

$$I_{23} = \int_S x_2 x_3 ds$$

- un moment de giration :

$$I = \int_S (x_2^2 + x_3^2) ds = I_2 + I_3$$

Par exemple, pour une section  $S$  circulaire, de rayon  $R$ , on a  $I_2 = I_3 = \frac{\pi R^4}{4}$  et  $I_{23} = 0$ , tandis que pour une section rectangulaire, de longueur et largeur  $L_2$  et  $L_3$ , on a  $I_2 = \frac{L_2 L_3^3}{12}$ ,  $I_3 = \frac{L_2^3 L_3}{12}$  et  $I_{23} = 0$ .

## 1.2 Hypothèse de Navier

Dans ce document, nous nous limiterons à la cinématique des déplacements issue de l'hypothèse de *Navier*. Selon cette hypothèse, au cours de la déformation de la poutre, la section droite  $S$  reste droite (elle ne subit aucun gauchissement). Cette section  $S$  subit donc :

- un mouvement de corps rigide,
- une déformation dans son plan.

### Mouvement de corps rigide de $S$

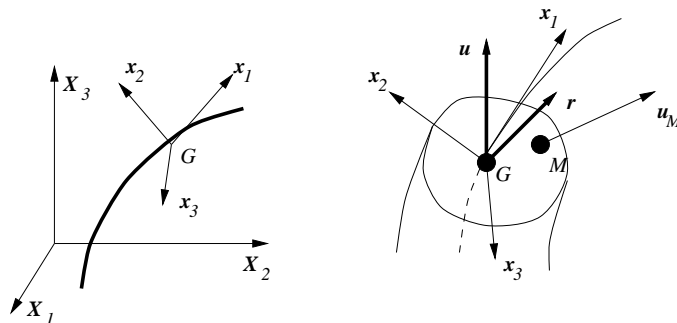


FIG. 2 – Hypothèse cinématique de Navier

La figure 2 illustre la caractérisation du mouvement de corps rigide de la section  $S$  par un vecteur de déplacement  $\vec{u}$  et un vecteur de rotation  $\vec{r}$  appliqués à son centre de gravité  $G$ . Le déplacement d'un point  $M$  de la section  $S$  dû à ce mouvement de corps rigide sera de la forme :

$$\vec{u}_M = \vec{u} + \vec{r} \wedge \overrightarrow{GM}$$

Comme la section  $S$  est normale à la fibre moyenne  $L$  (avant déformation), le vecteur  $\overrightarrow{GM}$  est contenu dans le plan formé par les vecteurs  $\vec{x}_2$  et  $\vec{x}_3$ .

Les composantes du vecteur  $\vec{u}_M$  s'écrivent donc dans le repère local de la section  $S$  :

$$\vec{u}_M = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 x_3 - r_3 x_2 \\ -r_1 x_3 \\ r_1 x_3 \end{pmatrix}$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations, on calcule le tenseur des déformations au point  $M$ ,  $\underline{\epsilon}_M$ , comme la partie symétrique du tenseur gradient des déplacements en ce point,  $\underline{d}_M$ . Comme les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{r}$  s'appliquent au point  $G$  de la section  $S$ , et donc sur la ligne  $L$ , ils ne dépendent que de l'abscisse curviligne  $l$  sur cette ligne. Les seuls gradients non nuls pour ces vecteurs sont donc ceux mettant en jeu la première coordonnée  $x_1$ , tandis que la dépendance en  $x_2$  et  $x_3$  est donnée explicitement par l'équation précédente. Dans la suite, nous noterons  $x'$  la dérivée de toute quantité  $x$  par rapport à la première coordonnée. Ceci permet d'écrire :

$$\vec{d}_M = \begin{bmatrix} u'_1 + r'_2 x_3 - r'_3 x_2 & -r_3 & r_2 \\ u'_2 - r'_1 x_3 & 0 & -r_1 \\ u'_3 + r'_1 x_3 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut remarquer sur cette équation que les dérivées mises en jeu sont des dérivées totales. Dans le cas d'une poutre courbe par exemple, ces dérivées devront prendre en compte le fait que le repère  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  "tourne" lorsque l'on parcourt la fibre moyenne  $L$ .

A partir du tenseur gradient des déplacements  $\underline{d}_M$ , on peut maintenant obtenir le tenseur des déformations  $\underline{\epsilon}_M$  par sa partie symétrique. On constate que ce tenseur ne possède que trois termes non nuls qui sont :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = u'_1 + r'_2 x_3 - r'_3 x_2 \\ 2\epsilon_{12} = u'_2 - r'_1 x_3 - r_3 \\ 2\epsilon_{13} = u'_3 + r'_1 x_2 + r_2 \end{cases}$$

Le mouvement de corps rigide de la section  $S$  ne produit donc pas de déformations dans le plan de cette section.

## Déformation dans le plan de $S$

Le plan de la section  $S$  contient les vecteurs  $\vec{x}_2$  et  $\vec{x}_3$ . Il s'en suit qu'une déformation dans son plan (une déformation plane) ne produira que des déformations  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{23}$  et  $\epsilon_{33}$ . Ces déformations permettront de satisfaire les conditions aux limites au bord de la section. Sur ce bord, on doit avoir  $\sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ .

Dans le cas de poutres homogènes, on fait souvent l'hypothèse que les contraintes  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  et  $\sigma_{23}$  sont nulles dans toute la section  $S$ . En considérant un matériau à comportement élastique isotrope, cette hypothèse nous donne les valeurs suivantes pour les déformations dans la section  $S$  ( $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du matériau) :

$$\begin{cases} 2\mu\epsilon_{22} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = 0 \\ 2\mu\epsilon_{23} = 0 \\ 2\mu\epsilon_{33} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_{23} = 0 \\ \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\epsilon_{11} \end{cases}$$

On constate que, dans ce cas, les déformations de la section  $S$  dans son plan sont complètement déterminées à partir de la composante  $\epsilon_{11}$  calculée à partir de son mouvement de corps rigide.

## Degrés de liberté

Les résultats précédents nous montrent que le mouvement du solide peut être complètement déterminé à partir des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{r}$  de la figure 2. Ces vecteurs décrivent respectivement le déplacement et la rotation de la section  $S$  en un point quelconque de la fibre moyenne  $L$ . Les quantités  $\vec{u}$  et  $\vec{r}$  forment les composantes du *torseur des déplacements*. Elles sont les éléments de réduction au point  $G$  des déplacements dans une section de la poutre.

La cinématique des déplacements ainsi mise en place permet de concentrer les inconnues du problème sur la fibre moyenne  $L$  de la poutre. Le solide tridimensionnel est remplacé par la ligne  $L$ . Chaque point de la ligne dispose de six degrés de libertés au lieu de trois (les déplacements dans les trois directions). Ces six degrés de liberté sont :

- les déplacements dans les trois directions du point  $G$  de la ligne  $L$ , représentés par le vecteur  $\vec{u}$ , de composantes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ ,

- la rotation de la section  $S$ , représentée par le vecteur rotation  $\vec{r}$ , de composantes  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$ , appliqué au point  $G$ .

## 2 Contraintes et déformations

### 2.1 Tenseur des déformations

Les hypothèses faites sur la cinématique des déplacements dans la poutre nous conduisent au tenseur symétrique suivant des déformations en un point  $M$  quelconque d'une section  $S$  :

$$\vec{\epsilon}_M = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} = u'_1 + r'_2 x_3 - r'_3 x_2 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} = \frac{1}{2}(u'_2 - r'_1 x_3 - r_3) & \epsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\epsilon_{11} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} = \frac{1}{2}(u'_3 + r'_1 x_2 + r_2) & \epsilon_{23} = 0 & \epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\epsilon_{11} \end{bmatrix}$$

Ce tenseur des déformations ne comporte que trois termes indépendants :  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{12}$  et  $\epsilon_{13}$ . En RdM, ces termes sont associés sous la forme d'un vecteur  $\vec{e}_M$ , appelé *vecteur déformation* :

$$\vec{e}_M = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $\vec{e}_M$  contient une dilatation dans la direction de la fibre moyenne comme premier terme, puis des glissements (doubles des cisaillements entre deux sections voisines). Il représente la déformation du milieu curviligne au point  $M$ . Cette déformation peut à son tour être exprimée en fonction d'une déformation  $\vec{e}$  et d'un gradient de rotation (une courbure)  $\vec{\kappa}$  au point  $G$  sous la forme :

$$\vec{e}_M = \vec{e} + \vec{\kappa} \wedge \vec{GM}$$

où  $\vec{e}$  et  $\vec{\kappa}$ , éléments de réduction de la déformation au point  $G$  de  $S$ , constituent le *torseur des déformations* défini par :

$$\vec{e} = \vec{u}' + \vec{x}_1 \wedge \vec{r} = \begin{cases} u'_1 \\ u'_2 - r_3 \\ u'_3 + r_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{\kappa} = \vec{r}' = \begin{cases} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{cases}$$

## 2.2 Torseur des efforts

D'après les hypothèses faites sur les contraintes dans le plan d'une section  $S$ , les seules contraintes non nulles dans le solide sont  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{13}$ . En RdM, ces contraintes sont associées dans un vecteur  $\vec{t}_M$ , appelé *vecteur contrainte* :

$$\vec{t}_M = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}$$

Comme la normale à  $S$  est le vecteur  $\vec{x}_1$ , on peut remarquer que le vecteur contrainte  $\vec{t}_M$  coïncide avec celui défini en mécanique des milieux continus, agissant sur un élément de surface contenu dans  $S$ .

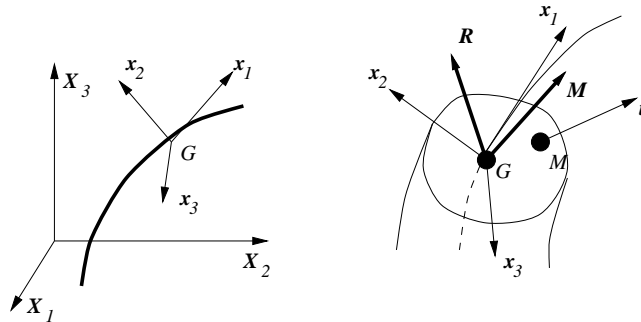


FIG. 3 – Hypothèse de Saint-Venant, torseur des efforts

L'hypothèse de *Saint-Venant* est que les efforts agissant sur  $S$  peuvent être schématisés par une force  $\vec{R}$  et un moment  $\vec{M}$ , appliqués au centre de gravité  $G$  de  $S$ , et définis par (figure 3) :

$$\vec{R} = \int_S \vec{t}_M ds = \begin{cases} \int_S \sigma_{11} ds \\ \int_S \sigma_{12} ds \\ \int_S \sigma_{13} ds \end{cases}$$

$$\vec{M} = \int_S \vec{GM} \wedge \vec{t}_M ds = \begin{cases} \int_S (x_2\sigma_{13} - x_3\sigma_{12}) ds \\ \int_S x_3\sigma_{11} ds \\ \int_S -x_2\sigma_{11} ds \end{cases}$$

Les quantités  $\vec{R}$  et  $\vec{M}$  forment les composantes du *torseur des efforts*. Elles sont les éléments de réduction au point  $G$  des efforts dans une section de la poutre. La schématisation des efforts par leurs éléments de réduction sera utilisée dans la théorie élastique des poutres. Mais pour cela, on doit utiliser un principe fondamental, appelé *principe de Saint-Venant*, selon lequel, loin des points d'application des sollicitations de la poutre, son comportement ne dépend que des éléments de réduction de ces sollicitations, et non de la manière dont elles sont appliquées. Il s'en suit que deux systèmes de forces (ou de vecteurs contraintes) ayant les mêmes éléments de réduction ne peuvent pas être distingués.

## 2.3 Énergie de déformation

En élasticité, l'énergie de déformation du solide peut s'écrire  $W = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\epsilon} dv$ . En RdM, cette énergie peut être écrite simplement à l'aide des composantes des torseurs des efforts et des déformations. En effet, en utilisant la définition des vecteurs déformation  $\vec{e}_M$  et contrainte  $\vec{t}_M$ , on obtient :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_L \int_S \underline{\sigma} : \underline{\epsilon} ds dl \\ &= \frac{1}{2} \int_L \int_S \vec{t}_M \cdot \vec{e}_M ds dl \\ &= \frac{1}{2} \int_L \int_S \vec{t}_M \cdot (\vec{e} + \vec{\kappa} \wedge \vec{GM}) ds dl \\ &= \frac{1}{2} \int_L \vec{e} \cdot \left( \int_S \vec{t}_M ds + \vec{\kappa} \cdot \int_S \vec{GM} \wedge \vec{t}_M ds \right) dl \\ &= \frac{1}{2} \int_L (\vec{R} \cdot \vec{e} + \vec{M} \cdot \vec{\kappa}) dl \end{aligned} \tag{1}$$

Ceci montre que les forces  $\vec{R}$  agissant sur la fibre moyenne  $L$  sont associées à sa déformation  $\vec{e}$ , tandis que les moments  $\vec{M}$  sont associés à sa courbure  $\vec{\kappa}$  (gradient de la rotation).



## 3 Élasticité

### 3.1 Loi de comportement

La connaissance des déformations en tout point  $M$  du milieu curviligne permet d'obtenir les contraintes en utilisant la loi de comportement. Nous nous sommes limités au cas d'un comportement élastique linéaire isotrope. En notant  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé du matériau constituant la poutre, on a donc :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\epsilon_{11} = E\epsilon_{11} = E(u'_1 + r'_2x_3 - r'_3x_2) \\ \sigma_{12} = 2\mu\epsilon_{12} = \mu(u'_2 - r'_1x_3 - r_3) \\ \sigma_{13} = 2\mu\epsilon_{13} = \mu(u'_3 + r'_1x_2 + r_2) \end{cases}$$

Dans cette équation,  $E$  désigne le module d'Young du matériau. A partir de ces contraintes, il est possible de calculer les éléments de réduction des efforts appliqués en un point  $G$  quelconque de la ligne  $L$  sous la forme :

$$\vec{R} = \begin{cases} \int_S \sigma_{11} ds = ESu'_1 = ES e_1 \\ \int_S \sigma_{12} ds = \mu S(u'_2 - r_3) = \mu S e_2 \\ \int_S \sigma_{13} ds = \mu S(u'_3 + r_2) = \mu S e_3 \end{cases}$$

$$\vec{M} = \begin{cases} \int_S (x_2\sigma_{13} - x_3\sigma_{12}) ds = \mu I r'_1 = \mu I \kappa_1 \\ \int_S x_3\sigma_{11} ds = E(I_2 r'_2 - I_{23} r'_3) = E(I_2 \kappa_2 - I_{23} \kappa_3) \\ \int_S -x_2\sigma_{11} ds = E(-I_{23} r'_2 + I_3 r'_3) = E(I_3 \kappa_3 - I_{23} \kappa_2) \end{cases}$$

On constate alors que le torseur des efforts s'écrit relativement simplement en fonction du torseur des déformations sous la forme :

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_2 & -EI_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -EI_{23} & EI_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix}$$

### 3.2 Conditions aux limites

Nous avons vu que, selon l'hypothèse de Navier (sections droites), chaque point du milieu curviligne (sur la fibre moyenne) possède six degrés de liberté. Ces degrés de liberté servent à représenter :

- le déplacement de la fibre moyenne (vecteur déplacement  $\vec{u}$ ),
- la rotation de la section droite (vecteur rotation  $\vec{r}$ ).

De même, selon l'hypothèse de Saint-Venant (efforts concentrés), les efforts internes (de cohésion) dans un milieu curviligne sont représentés par deux vecteurs, et donc six composantes, qui sont :

- les forces de cohésion de la fibre moyenne (vecteur force  $\vec{R}$ ),
- les moments de cohésion de la fibre moyenne (vecteur moment  $\vec{M}$ ).

Les conditions aux limites sur une poutre porteront donc sur ces six degrés de liberté et ces six efforts de cohésion. La frontière  $\partial\Omega$  sur laquelle s'appliquent ces conditions sera donc remplacée par des abscisses sur la fibre moyenne. Les conditions aux limites en déplacements les plus communes sont les suivantes :

- l'encastrement : si une poutre est encastree à l'une de ses extrémités, alors en ce point on a  $\vec{u} = \vec{r} = \vec{0}$ , et les vecteurs  $\vec{R}$  et  $\vec{M}$  sont inconnus.
- la rotule : une rotule empêche tout déplacement en ce point,  $\vec{u} = \vec{0}$ , mais laisse les rotations libres. En contre-partie, les moments de cohésion en ce point sont nuls, soit  $\vec{M} = \vec{0}$ , tandis que les forces sont inconnues.
- l'appui simple : un appui simple empêche un déplacement dans une direction, par exemple  $u_3 = 0$ , et laisse libre les autres degrés de liberté. Le seul effort de cohésion non nul sera alors  $R_3$ .

Ces conditions aux limites sont d'une grande importance pour l'intégration des équations d'équilibre (obtention des efforts de cohésion) et de la cinématique (obtention des déplacements).

Pour déterminer les conditions aux limites en efforts, il est important de se fixer un sens de parcours de la ligne moyenne  $L$ . En effet, le torseur des efforts (les vecteurs  $\vec{R}$  et  $\vec{M}$ ) est lié au vecteur contrainte  $\vec{t}_M$ , et donc à la normale à la section  $S$ . Comme la normale à considérer est toujours *sortante*, le torseur des efforts sera affecté d'un signe opposé entre les deux côtés de la poutre. En général, la convention de signe suivante est adoptée (voir par exemple l'expression du principe des travaux virtuels et le traitement de la flexion trois points). En parcourant la ligne  $L$  de la gauche vers la droite :

- le torseur des efforts est affecté d'un signe + à droite du segment considéré sur la poutre (la normale sortante de  $S$  est  $\vec{x}_1$ ),
- le torseur des efforts est affecté d'un signe – à gauche du segment considéré sur la poutre (la normale sortante de  $S$  est  $-\vec{x}_1$ ).

## 4 Méthode de résolution

### 4.1 Calcul des efforts internes

Pour obtenir les efforts internes dans une poutre, nous écrivons comme en mécanique des milieux continus les équations d'équilibre du solide, que nous intégrons en utilisant les conditions aux limites.

Une façon élégante d'obtenir les équations d'équilibre dans un milieu curviligne est d'utiliser le principe des travaux virtuels. Pour cela, on définit un champ de déplacements virtuel  $\vec{u}_M^*$ , qui se traduit par un déplacement virtuel  $\vec{u}^*$  et une rotation virtuelle  $\vec{r}^*$  sur la fibre moyenne  $L$ , et qui produit un champ de déformations virtuel  $\underline{\epsilon}_M^*$  dans chaque section  $S$  (figure 4).

Comme les bords des sections  $S$  sont toujours libres de contraintes, l'intégration sur la frontière du volume  $V$  se traduit par une intégrale sur la surface  $S$  aux points extrémités du segment de  $L$  considéré. En notant  $S_1$  et  $S_2$  les surfaces extrémités d'un tel volume, on remarque que sur  $S_1$ , la normale sortante à la section est forcément opposée au sens de parcours de la fibre moyenne (vecteur  $-\vec{x}_1$ ). Cela donne l'expression suivante du principe des travaux virtuels :

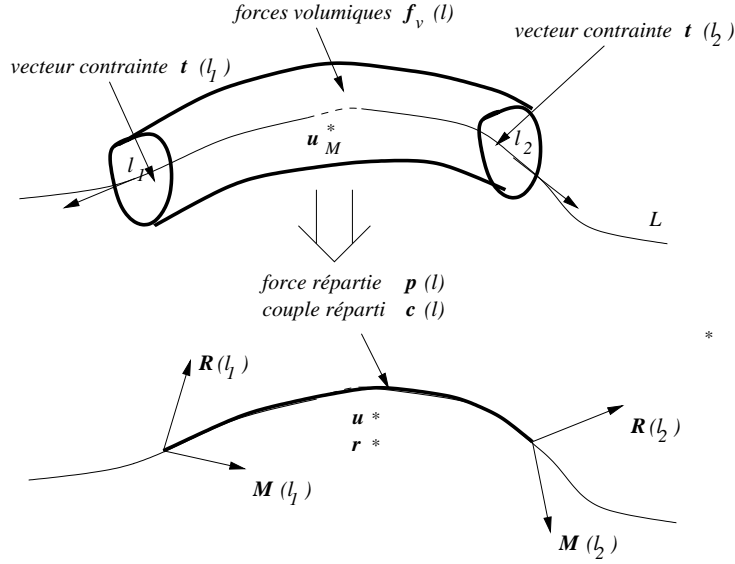


FIG. 4 – Segment d'une poutre où l'on applique le principe des travaux virtuels

$$\int_V \underline{\sigma} : \underline{\epsilon}_M^* dv - \int_V \vec{f}_v \cdot \vec{u}_M^* dv - \left( \int_{S_2} \vec{t}_M \cdot \vec{u}_M^* ds - \int_{S_1} \vec{t}_M \cdot \vec{u}_M^* ds \right) = 0$$

Dans cette équation,  $\vec{t}_M$  est le vecteur contrainte appliqué sur la section  $S$  considérée (avec une normale sortante). Les deux derniers termes peuvent donc être calculés assez simplement en remplaçant le champ virtuel  $\vec{u}_M^*$  par la cinématique issue de l'hypothèse de Navier. On obtient pour une section  $S$  quelconque (soit  $S_1$ , soit  $S_2$ ) :

$$\begin{aligned} \int_S \vec{t}_M \cdot \vec{u}_M^* ds &= \int_S \vec{t}_M \cdot (\vec{u}^* + \vec{r}^* \wedge \overrightarrow{GM}) ds \\ &= \vec{u}^* \cdot \int_S \vec{t}_M ds + \vec{r}^* \cdot \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{t}_M ds \\ &= \vec{R} \cdot \vec{u}^* + \vec{M} \cdot \vec{r}^* \end{aligned}$$

De même, l'intégrale sur  $V$  des forces de volume  $\vec{f}_v$  devient :

$$\begin{aligned}
\int_V \vec{f}_v \cdot \vec{u}_M^* dv &= \int_L \int_S \vec{f}_v \cdot (\vec{u}^* + \vec{r}^* \wedge \overrightarrow{GM}) ds dl \\
&= \int_L \left( \vec{u}^* \cdot \int_S \vec{f}_v ds + \vec{r}^* \cdot \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{f}_v ds \right) dl \\
&= \int_{l_1}^{l_2} (\vec{p} \cdot \vec{u}^* + \vec{c} \cdot \vec{r}^*) dl
\end{aligned}$$

Les vecteur  $\vec{p}$  et  $\vec{c}$  ainsi introduits représentent respectivement :

- une force par unité de longueur répartie sur la fibre moyenne (pour  $\vec{p}$ ),
- un couple par unité de longueur réparti sur la fibre moyenne (pour  $\vec{c}$ ).

Enfin, en utilisant la même méthode que pour l'équation 1, puis la définition du torseur des déplacements, puis enfin une intégration par parties, le premier terme de l'expression à annuler dans le principe des travaux virtuels s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\int_V \underline{\sigma} : \underline{\epsilon}^* dv &= \int_L (\overrightarrow{R} \cdot \vec{e} + \overrightarrow{M} \cdot \vec{\kappa}) dl \\
&= \int_L \begin{pmatrix} R_1 u_1^* + R_2 (u_2^* - r_3^*) + R_3 (u_3^* + r_3^*) \\ + M_1 r_1^* + M_2 r_2^* + M_3 r_3^* \end{pmatrix} dl \\
&= \int_L \begin{pmatrix} -R_1' u_1^* - R_2' u_2^* - R_3' u_3^* \\ -M_1' r_1^* - (M_2' - R_3) r_2^* - (M_3' + R_3) r_3^* \end{pmatrix} dl \\
&\quad + \overrightarrow{R}(l_2) \cdot \vec{u}^*(l_2) - \overrightarrow{R}(l_1) \cdot \vec{u}^*(l_1) \\
&\quad + \overrightarrow{M}(l_2) \cdot \vec{r}^*(l_2) - \overrightarrow{M}(l_1) \cdot \vec{r}^*(l_1) \\
&= - \int_{l_1}^{l_2} (\overrightarrow{R}' \cdot \vec{u}^* + (\overrightarrow{M}' + \vec{x}_1 \wedge \overrightarrow{R}) \cdot \vec{r}^*) dl \\
&\quad + \overrightarrow{R}(l_2) \cdot \vec{u}^*(l_2) - \overrightarrow{R}(l_1) \cdot \vec{u}^*(l_1) \\
&\quad + \overrightarrow{M}(l_2) \cdot \vec{r}^*(l_2) - \overrightarrow{M}(l_1) \cdot \vec{r}^*(l_1)
\end{aligned}$$

En utilisant l'ensemble de ces résultats, le principe des travaux virtuels s'écrit simplement de la façon suivante sur tout segment de la fibre moyenne ne contenant pas d'effort ponctuel :

$$\forall (l_1, l_2) \in L, \int_{l_1}^{l_2} ((\overrightarrow{R}' + \vec{p}) \cdot \vec{u}^* + (\overrightarrow{M}' + \vec{x}_1 \wedge \overrightarrow{R} + \vec{c}) \cdot \vec{r}^*) dl = 0$$

Cette équation doit être vérifiée sur tout segment, et pour tout champ de déplacement virtuel (c'est-à-dire pour tout torseur  $(\vec{u}^*, \vec{r}^*)$ ). On en déduit les équations d'équilibre des milieux curvilignes :

$$\begin{cases} \vec{R}' + \vec{p} = \vec{0} \\ \vec{M}' + \vec{x}_1 \wedge \vec{R} + \vec{c} = \vec{0} \end{cases}$$

Les équations d'équilibre sont deux équations vectorielles. Elles conduisent à six équations différentielles scalaires qui traduisent l'équilibre mécanique du milieu. Les forces volumiques sont représentées par les vecteurs  $\vec{p}$  (forces répartie sur le segment) et  $\vec{c}$  (couple réparti sur le segment). L'intégration de ces équations différentielles nécessite six conditions aux limites. Ces conditions sont obtenues aux points d'abscisse  $l_1$  et  $l_2$ , extrémités du segment considéré.

## 4.2 Calcul des déplacements et des rotations

La connaissance de  $\vec{R}(l)$  et  $\vec{M}(l)$  sur le segment permet, par la loi de comportement, d'obtenir les vecteurs de déformation  $\vec{e}(l)$  et de courbure  $\vec{\kappa}(l)$  constituant le torseur des déformations dans la poutre. Ce torseur est relié au torseur des déplacements (vecteur déplacement  $\vec{u}(l)$  et vecteur rotation  $\vec{r}(l)$ ) par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{\kappa} \\ \vec{u}' + \vec{x}_1 \wedge \vec{r} = \vec{e} \end{cases}$$

L'intégration des six équations différentielles ainsi obtenues permet d'obtenir le torseur des déplacements en tout point de la fibre moyenne de la poutre, et donc le champ de déplacement par la cinématique introduite. Lors de l'intégration, il est nécessaire d'utiliser six conditions aux limites, qui s'ajoutent aux six conditions aux limites en efforts utilisées précédemment.

Globalement, sur chaque segment considéré, les conditions aux limites (aux points d'abscisse  $l_1$  et  $l_2$ ) que l'on doit appliquer sont au nombre de douze. Ceci correspond aux six degrés de liberté de chaque côté du segment. En chaque point d'abscisse  $l_1$  et  $l_2$ , on doit donc connaître :

- soit  $u_1$ , soit  $R_1$ ,
- soit  $u_2$ , soit  $R_2$ ,
- soit  $u_3$ , soit  $R_3$ ,
- soit  $r_1$ , soit  $M_1$ ,
- soit  $r_2$ , soit  $M_2$ ,

- soit  $r_3$ , soit  $M_3$ .

En pratique, il arrive que certaines conditions aux limites proviennent de considérations de symétrie. Dans ce cas, les conditions portent sur la continuité des déplacements. Par exemple, en flexion trois points sur une poutre à plan moyen (voir exemple 2), on écrira la continuité de  $\vec{u}'$  au centre.

### 4.3 Poutre à plan moyen chargée dans son plan

Lorsqu'une poutre à plan moyen est chargée dans son plan, les efforts internes en tout point d'abscisse  $x$  (qui joue ici le rôle de l'abscisse curviligne  $l$ ) sont :

- une réaction  $\vec{R}$  dans le plan  $xOy$ , donc avec deux composantes,
- un moment  $\vec{M}$  dirigé selon  $Oz$ , donc avec une composante.

Les deux composantes de  $\vec{R}$  sont alors notées  $R_x = N$  (effort normal) et  $R_y = T$  (effort tranchant), tandis que la composante non nulle de  $\vec{M}$  est notée  $M_z = M$  (moment de flexion).

De même, les déplacements de tout point de la poutre (y compris des points situés hors de la ligne moyenne) sont représentés par :

- un vecteur déplacement de la fibre moyenne  $\vec{u}$  dans le plan  $xOy$ ,
- un vecteur rotation  $\vec{r}$  de la section selon  $Oz$ .

Les deux composantes non nulles de  $\vec{u}$  sont notées  $u_x = u$  (déplacement normal) et  $u_y = v$  (flèche), tandis que la composante non nulle de  $\vec{r}$  est notée  $r_z = r$  (rotation). Nous voyons dans ce cas que nous travaillons sur trois degrés de liberté (au lieu de six).

Les équations d'équilibre deviennent dans ce cas fonctions des efforts  $N$ ,  $T$ , et  $M$ , eux-même fonctions de l'abscisse  $x$  sur la poutre. Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} N' + p_x = 0 \\ T' + p_y = 0 \\ M' + T + c_z = 0 \end{cases}$$

On remarque sur ces équations que les charges et couples répartis sur la fibre moyenne de la poutre (issus des forces volumiques) se réduisent à :

- une force par unité de longueur  $\vec{p}$  avec seulement deux composantes non nulles  $p_x$  et  $p_y$ ,
- un couple par unité de longueur  $\vec{c}$  porté par l'axe  $z$ .

De même, les équations donnant les déplacements dans la poutre en fonction des composantes du torseur des déformations (que l'on obtient par la loi de comportement) sont :

$$\begin{cases} r' = \kappa_z = \frac{M}{EI_z} \\ u' = e_x = \frac{N}{ES} \\ v' - r = e_y = \frac{T}{\mu S} \end{cases}$$

En pratique, le terme  $e_y$ , dû à l'effort tranchant  $T$ , est souvent négligé. En effet, ce terme est d'un ordre de grandeur inférieur au terme de rotation  $r$  lors du calcul de la flèche  $v$ . Ceci est illustré dans le premier exemple.

On remarque finalement que, en négligeant la contribution de l'effort tranchant, et en dérivant la dernière équation, on obtient une équation différentielle en  $v$  et  $M$ . Cette équation est souvent utilisée pour obtenir rapidement la flèche de la poutre en fonction du moment  $M$ . La méthode est appelée *double intégration de la ligne élastique* :

$$EI_z v'' = M$$