



**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

Tenseur des contraintes

Tenseur des déformations

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

Énergie de déformation élastique

Symétrie cubique

Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

Résumé

# ELASTICITE



**ELASTICITE**

**Cadre général**

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

Tenseur des contraintes

Tenseur des déformations

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

Énergie de déformation élastique

Symétrie cubique

Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

Résumé

**Déformations**

Hypothèse des petites perturbations

vecteur déplacement :  $\vec{u}(\vec{X}, t)$

tenseur des déformations :  
 $\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad}(\vec{u}) + \text{grad}(\vec{u})^t)$

équations de compatibilité :

$$\epsilon_{ki,jl} + \epsilon_{lj,ik} = \epsilon_{kj,il} + \epsilon_{li,jk}$$

conditions aux limites :  
 $\vec{u} = \vec{U}$  sur  $\partial\Omega_u$

**Contraintes**

Hypothèse des petites perturbations

vecteur contrainte :  $\vec{t}(\vec{X}, \vec{n}, t)$

tenseur des contraintes :  
 $\vec{t} = \underline{\sigma} \cdot \vec{n}$  avec  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\vec{X}, t)$

équations d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + f_{vi} = \rho \gamma_i$$

conditions aux limites :  
 $\underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}$  sur  $\partial\Omega_T$



Loi de comportement du matériau



**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

Tenseur des contraintes

Tenseur des déformations

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

Énergie de déformation élastique

Symétrie cubique

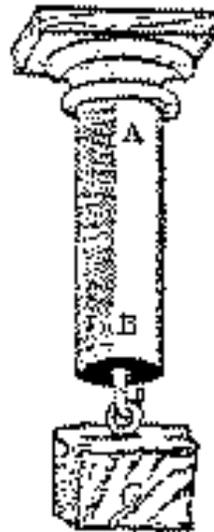
Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

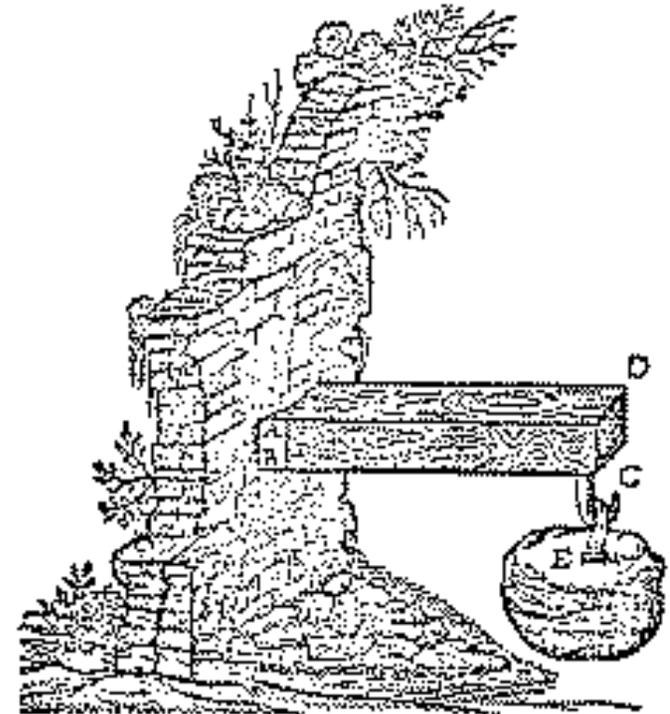
Résumé

Galilée (1638) : Discorsi e Dimostrazioni matematiche

traction



flexion





**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

Tenseur des contraintes

Tenseur des déformations

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

Énergie de déformation élastique

Symétrie cubique

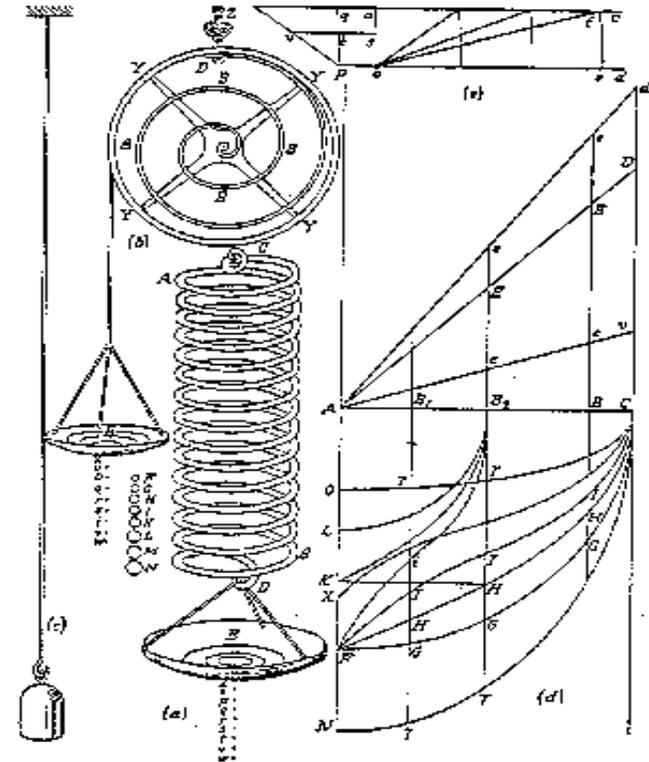
Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

Résumé

Hooke (1660) :

Relation  
entre  
déformations  
et  
contraintes  
en  
élasticité



Mariotte (1680) : même loi, appliquée aux expériences de Galilé (fibres tendues et comprimées en flexion)

Young (1807) : notion de module d'élasticité



**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

**Courbe force-allongement**

Tenseur des contraintes

Tenseur des déformations

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

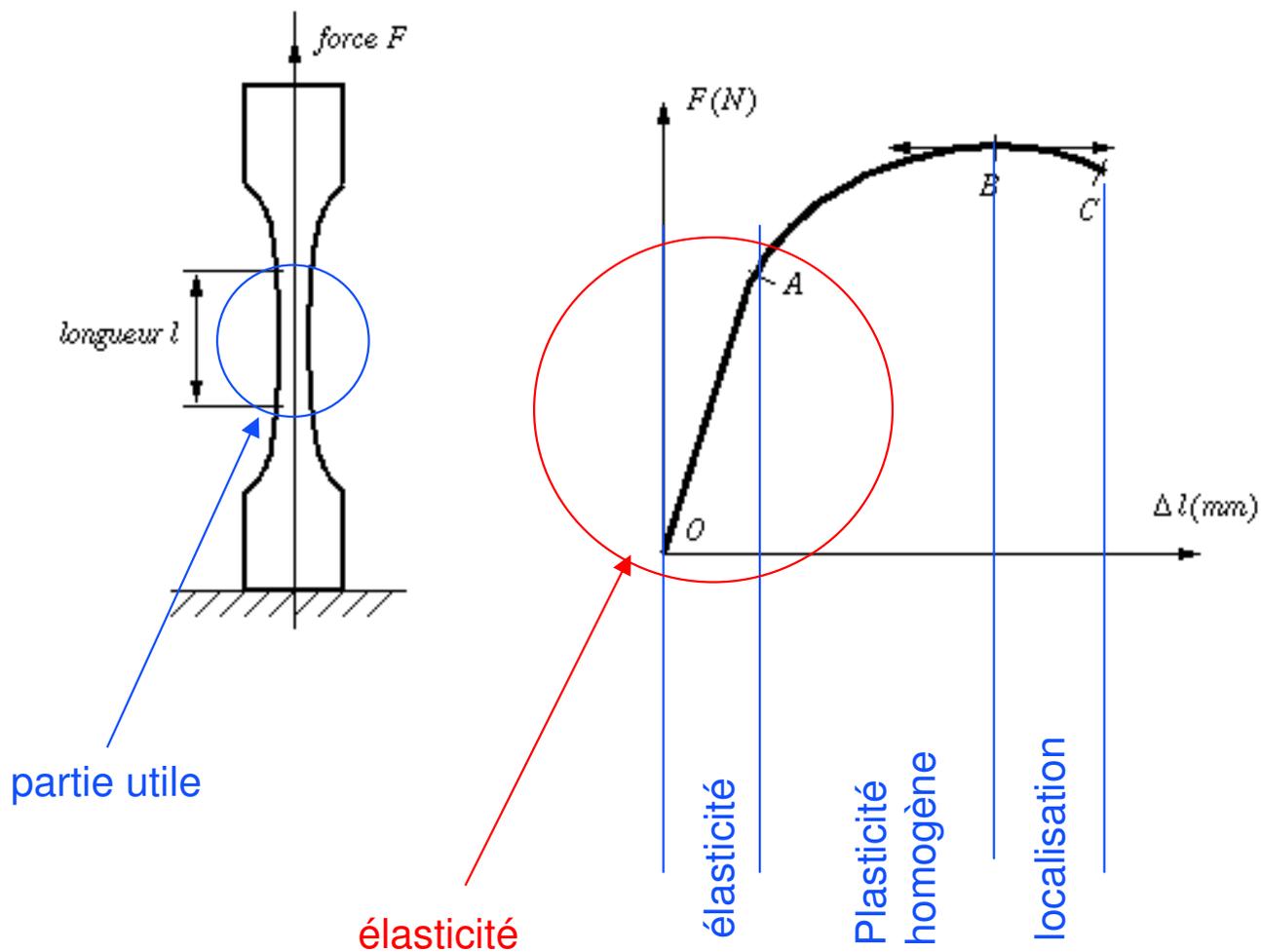
Énergie de déformation élastique

Symétrie cubique

Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

Résumé





**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

**Tenseur des contraintes**

Tenseur des déformations

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

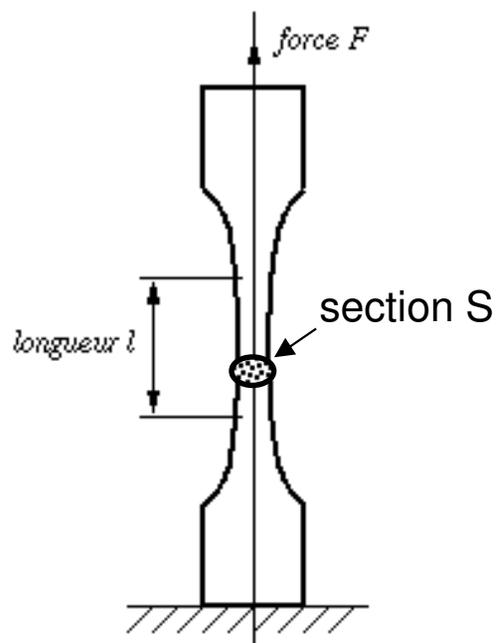
Énergie de déformation élastique

Symétrie cubique

Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

Résumé



$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F/S \end{pmatrix}$$

Pour passer de  $F$  à  $\sigma$ , il faut connaître la section courante  $S$  de la partie utile de l'éprouvette



**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

Tenseur des contraintes

**Tenseur des déformations**

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

Énergie de déformation élastique

Symétrie cubique

Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

Résumé

cinématique :

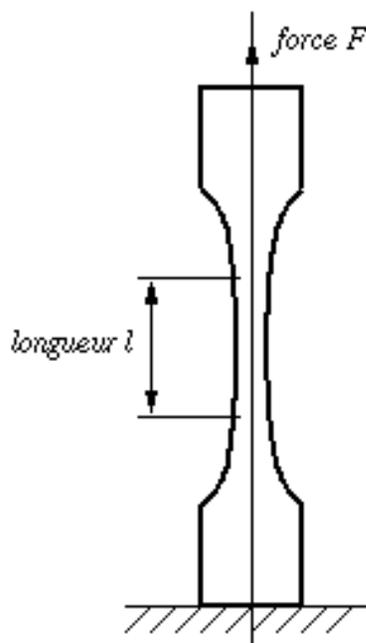
$$\mathbf{x} = \begin{cases} X_1(1-\beta t) \\ X_2(1-\beta t) \\ X_3(1+\alpha t) \end{cases} \quad \mathbf{v} = \begin{cases} -\beta X_1/(1-\beta t) \\ -\beta X_2/(1-\beta t) \\ \alpha X_3/(1+\alpha t) \end{cases}$$

lagrangien (Green-Lagrange) :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\beta t + \frac{1}{2}\beta^2 t^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta t + \frac{1}{2}\beta^2 t^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha t + \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 \end{pmatrix}$$

eulérien (Euler-Almansi) :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{(1-\beta t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{(1-\beta t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{(1+\alpha t)^2} \end{pmatrix}$$



En pratique, intégration  
du champ de vitesses  
de déformation

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \ln(1-\beta t) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(1-\beta t) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(1+\alpha t) \end{pmatrix}$$



**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

Tenseur des contraintes

Tenseur des déformations

**Courbe contrainte-déformation**

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

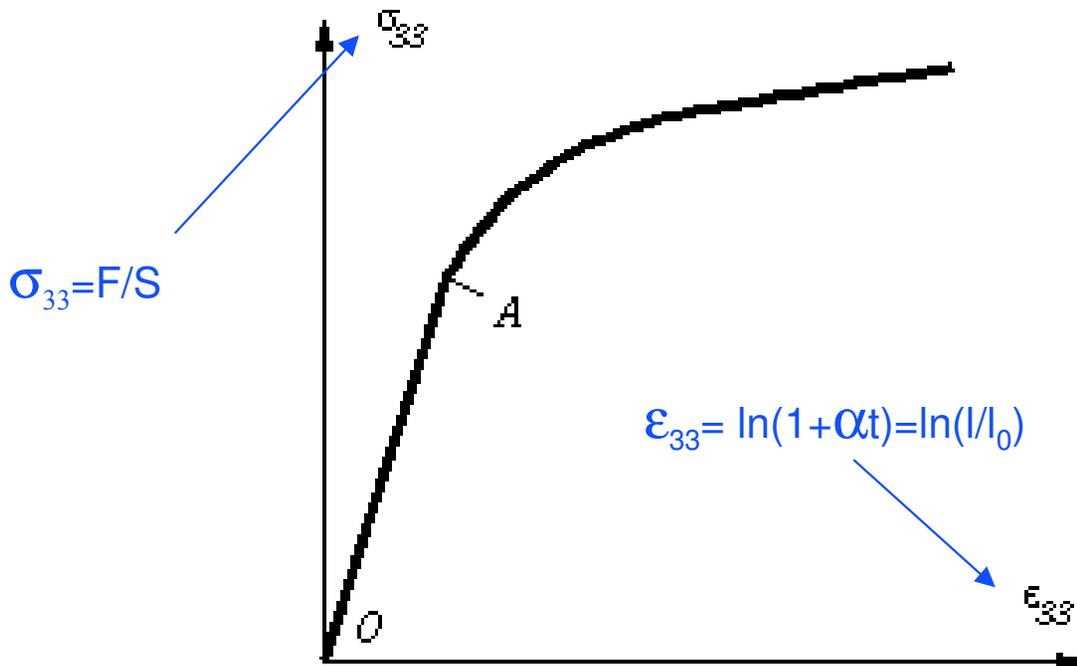
Énergie de déformation élastique

Symétrie cubique

Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

Résumé





**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

Tenseur des contraintes

Tenseur des déformations

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

Énergie de déformation élastique

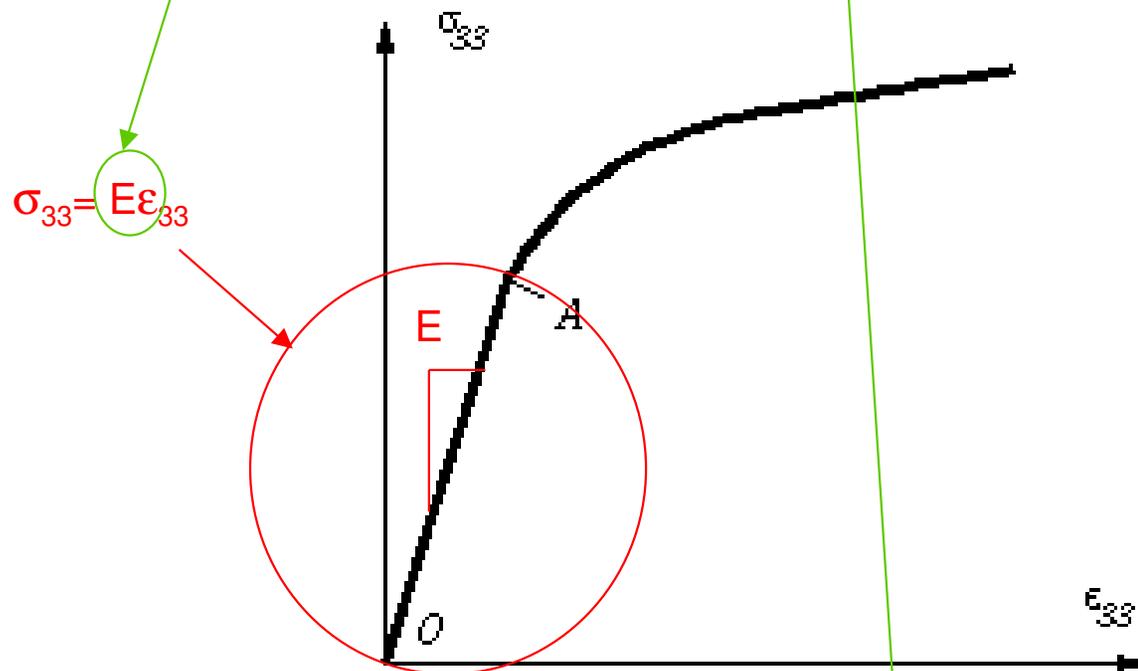
Symétrie cubique

Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

Résumé

Module d'Young      Coefficient de Poisson



$$\sigma_{33} = E \epsilon_{33}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{33} \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

Tenseur des contraintes

Tenseur des déformations

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

Énergie de déformation élastique

Symétrie cubique

Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

Résumé

$$\sigma = C:\varepsilon$$

Tenseur des rigidités

$$\varepsilon = S:\sigma$$

Tenseur des complaisances

Ordre 4  
81 termes !!

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$



36 coefficients !!!!

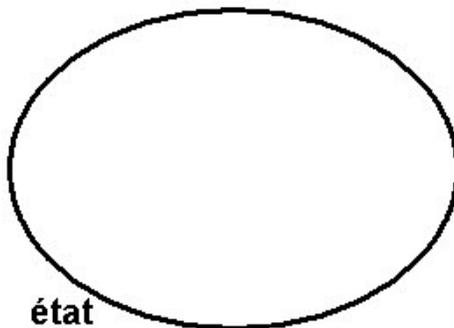


Travail mécanique fourni :  $\sigma \cdot d\varepsilon$

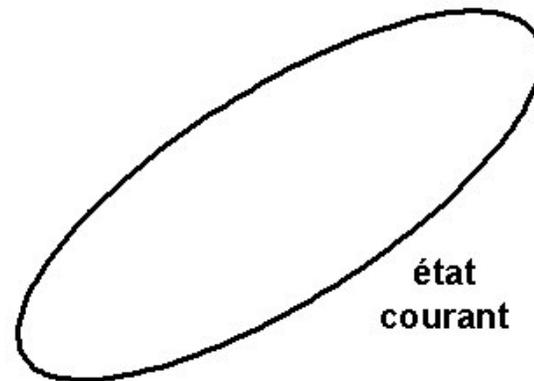
Taux de chaleur reçu :  $Tds$

Par unité de volume en cours de transformation :

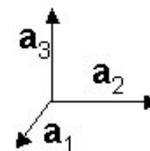
$$de = \delta w + \delta q$$



état initial



état courant



$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \Rightarrow \quad C_{ijkl} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad \Rightarrow \quad C_{ijkl} = C_{klij}$$

Le tenseur des rigidités a  $6 \times 7 / 2 = 21$  composantes indépendantes !!!

**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

Tenseur des contraintes

Tenseur des déformations

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

Énergie de déformation élastique

Symétrie cubique

Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

Résumé



**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

Tenseur des contraintes

Tenseur des déformations

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

Énergie de déformation élastique

**Symétrie cubique**

Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

Résumé



même comportement dans trois directions orthogonales

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

**Le tenseur des rigidités a trois composantes indépendantes ( $C_{11} \equiv C_{1111}$ ,  $C_{12} \equiv C_{1122}$ ,  $C_{44} \equiv C_{1212}$ )**



**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

Tenseur des contraintes

Tenseur des déformations

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

Énergie de déformation élastique

Symétrie cubique

**Comportement élastique linéaire isotrope**

Bilan

Résumé



même comportement dans toutes les directions

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

**Le tenseur des rigidités a deux composantes indépendantes ( $\lambda = C_{11}$ ,  $\mu = C_{44}$ ) : les coefficients de Lamé**

**Quel est le lien entre les coefficients de Lamé ( $\lambda$ ,  $\mu$ ) et les paramètres ( $E$ ,  $\nu$ ) ?**



**ELASTICITE**

Cadre général

Historique

Résistance des solides

Relation contrainte-déformation

L'essai de traction

Courbe force-allongement

Tenseur des contraintes

Tenseur des déformations

Courbe contrainte-déformation

Domaine d'élasticité

Loi de comportement élastique linéaire

Loi de Hooke généralisée

Énergie de déformation élastique

Symétrie cubique

Comportement élastique linéaire isotrope

Bilan

Résumé

Déformations	Contraintes
Hypothèse des petites perturbations	Hypothèse des petites perturbations
vecteur déplacement : $\vec{u}(\vec{X}, t)$	vecteur contrainte : $\vec{t}(\vec{X}, \vec{n}, t)$
tenseur des déformations : $\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad}(\vec{u}) + \text{grad}(\vec{u})^t)$	tenseur des contraintes : $\vec{t} = \underline{\sigma} \cdot \vec{n}$ avec $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\vec{X}, t)$
équations de compatibilité : $\epsilon_{ki,jl} + \epsilon_{lj,ik} = \epsilon_{kj,il} + \epsilon_{li,jk}$	équations d'équilibre : $\sigma_{ij,j} + f_{vi} = \rho \gamma_i$
conditions aux limites : $\vec{u} = \vec{U}$ sur $\partial\Omega_u$	conditions aux limites : $\underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}$ sur $\partial\Omega_T$

Comportement élastique linéaire isotrope

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\text{tr}(\epsilon)\delta_{ij}$$