

ÉLASTICITÉ

1 Historique

1.1 Résistance des solides

Il semble que les premières analyses mathématiques de la résistance des solides à la rupture aient été faites par Galilée (1564-1642) dans son ouvrage "Discorsi e Dimostrazioni matematiche" publié en 1638 (figure 1).

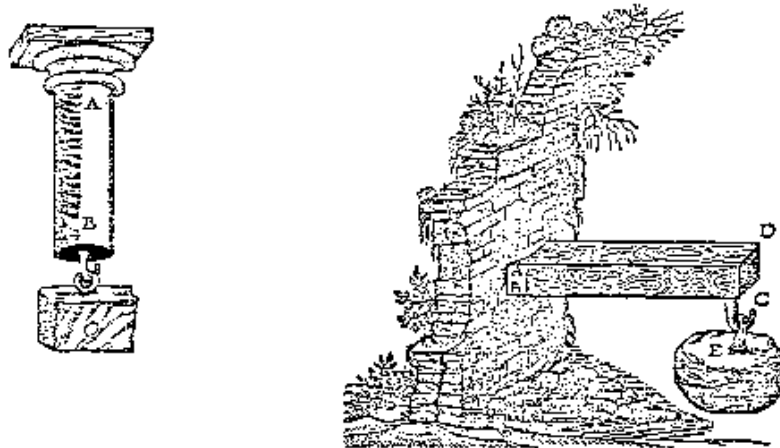


FIG. 1 – Dessins de Galilée pour illustrer l'essai de traction et l'essai de flexion

1.2 Relation contrainte-déformation

En Angleterre et en France, à la fin du 17^{eme} siècle, Hooke et Mariotte découvraient presque simultanément la relation entre déformations et contraintes

en élasticité. Vers 1660, Hooke découvrit la loi entre l'allongement d'un ressort et la force qui lui est appliquée (figure 2). En fait, Hooke n'appliqua pas ses idées au problème de la flexion des poutres entrevu par Galilée (figure 1). C'est Mariotte qui, en 1680, publia la même loi et expliqua la différence entre fibres tendues et fibres comprimées dans une poutre en flexion. Ce n'est qu'en 1807 que Young (1773-1829) introduisit la notion de module d'élasticité.

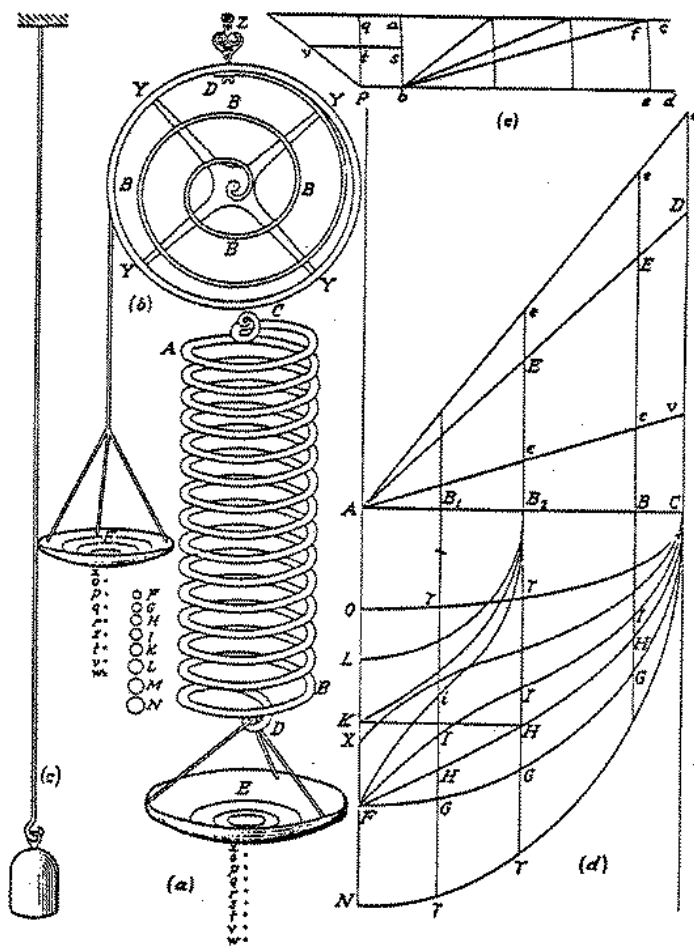


FIG. 2 – Schémas dus à Hooke et décrivant ses expériences

2 L'essai de traction

2.1 Courbe force-allongement

L'essai de traction est le test le plus couramment utilisé pour caractériser le comportement mécanique d'un matériau, et donc établir sa "loi de comportement". Cet essai consiste le plus souvent à soumettre une éprouvette (ou plus exactement une partie dite "utile" de l'éprouvette) à un allongement Δl par déplacement relatif de ses extrémités, et à mesurer la force F nécessaire à cet allongement. Une représentation schématique de l'essai de traction est donnée sur la figure 3. Dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement à la partie OA (déformation élastique) de la courbe "force-allongement". Les parties AB (déformation plastique homogène) et BC (déformation plastique localisée) n'entrent pas dans le cadre de ce cours. Nous nous plaçons de plus dans ce paragraphe dans le cas d'un matériau "isotrope", c'est-à-dire qui possède les mêmes propriétés dans toutes les directions.

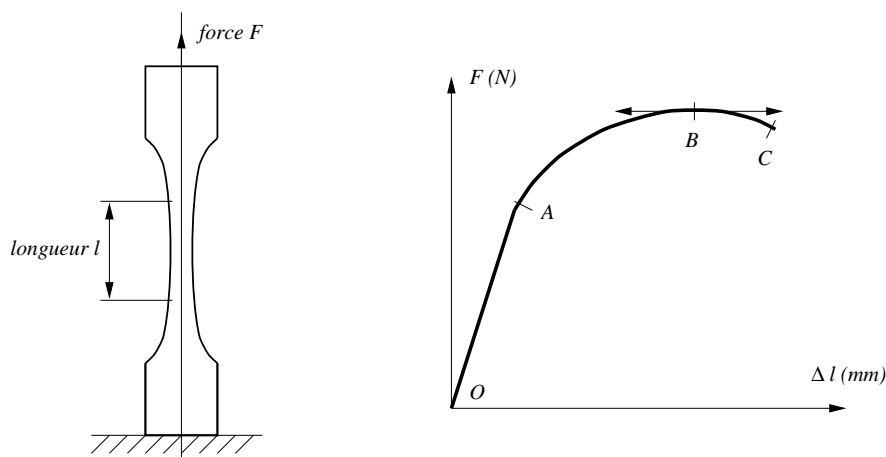


FIG. 3 – Représentation schématique d'un essai de traction

2.2 Courbe contrainte-déformation

Analysons les efforts appliqués à la partie utile de l'éprouvette de la figure 3 pour la déformer. Pour cela, nous nous plaçons dans un repère orthonormé. En choisissant l'axe \vec{x}_3 comme axe de traction, et en notant S la section de la partie utile, on constate que le vecteur contrainte appliqué sur la surface

normale à cet axe est parallèle à cet axe et vaut $\frac{F}{S} \vec{x}_3$. Les vecteurs contraintes appliqués sur les autres surfaces étant nuls, il s'en suit que le tenseur des contraintes de Cauchy vaut :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{S} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Analysons maintenant la cinématique de la transformation. Si α est la vitesse de déplacement de la partie supérieure de l'éprouvette (l'autre restant fixe), et si β est sa vitesse de rétrécissement supposée identique dans les deux autres directions, alors la description lagrangienne du mouvement donne dans un repère cartésien :

$$\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) \text{ avec } \vec{\Phi}(\vec{X}, t) = \begin{cases} X_1(1 - \beta t) \\ X_2(1 - \beta t) \\ X_3(1 + \alpha t) \end{cases} \quad (2)$$

On en déduit facilement le tenseur gradient de la transformation (diagonal), le tenseur des dilatations (également diagonal, ce qui signifie que les axes principaux du solide restent fixes), et enfin les tenseurs de déformation de Green-Lagrange \vec{E} et d'Euler-Almansi \vec{e} sous la forme :

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} -\beta - \frac{1}{2}\beta^2 t^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta - \frac{1}{2}\beta^2 t^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{e} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{(1-\beta t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{(1-\beta t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{(1+\alpha t)^2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

L'utilisation du tenseur gradient de la transformation permet également d'écrire le tenseur gradient des vitesses de déplacement qui, symétrique, est identique au tenseur des vitesses de déformation d'Euler (la vitesse de rotation de corps solide est nulle). L'intégration dans le temps s'avère ici possible car les composantes de la vitesse de déformation ne dépendent pas de la coordonnée du point. On obtient alors un tenseur des déformations sous la forme :

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \ln(1 - \beta t) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(1 - \beta t) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(1 + \alpha t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

En utilisant le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations d'Euler, on peut donc déduire la courbe $\sigma_{33} - \epsilon_{33}$ de la courbe $F - \Delta l$. L'allure de cette courbe est donnée sur le figure 4. Elle est appelée "courbe rationnelle".

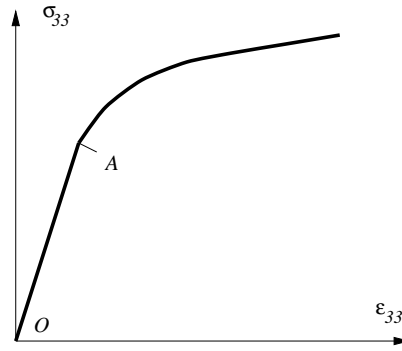


FIG. 4 – Courbe rationnelle de traction

En utilisant la condition aux limites $x_3 = l_0 + \Delta l$ en $X_3 = l_0$ (longueur initiale de l'éprouvette), on peut exprimer αt sous la forme $\frac{\Delta l}{l_0}$. L'abscisse de la courbe rationnelle de traction est donc obtenue directement à partir de l'allongement Δl et de la longueur initiale l_0 sous la forme :

$$\epsilon_{33} = \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right) \quad (6)$$

Par contre, pour obtenir l'ordonnée, c'est-à-dire la contrainte appliquée σ_{33} , il faut déterminer la section courante S de l'éprouvette. Ceci peut se faire par exemple en mesurant le rétrécissement dans une direction. Toutefois, cette mesure s'avère souvent délicate. Pour expliciter cette contrainte appliquée, nous allons nous limiter au domaine d'élasticité.

2.3 Domaine d'élasticité

Le domaine de l'élasticité linéaire OA de la courbe 4 est caractérisé par :

- une relation de proportionnalité entre la contrainte appliquée et la déformation de l'éprouvette dans sa partie utile,
- une réversibilité de la déformation (si on relâche la force, l'éprouvette revient dans son état initial).

Dans le cas de l'essai de traction, la relation de proportionnalité peut s'écrire entre les composantes de la courbe rationnelle sous la forme :

$$\sigma_{33} = E\epsilon_{33} \quad (7)$$

La constante de proportionnalité E de la relation précédente est appelée module d'Young. Il s'agit de la pente de la courbe rationnelle dans le domaine d'élasticité. La relation elle-même est appelée loi de Hooke. On remarque que l'unité du module d'Young E est la même que celle d'une contrainte, c'est-à-dire celle d'une pression (force par unité de surface). En effet, les déformations sont sans unités. L'unité SI (Système International) d'une pression est le Pascal (Pa), qui vaut 1 Newton par mètre carré. Mais on rencontre souvent d'autres unités pour représenter les contraintes et le module d'Young qui sont :

le MPa (méga-Pascal)	$\rightarrow 1MPa = 10^6 Pa = 1N/mm^2$
le GPa (giga-Pascal)	$\rightarrow 1GPa = 10^9 Pa$
le kgf/mm^2	$\rightarrow 1kgf/mm^2 = 9,81N/mm^2$
le psi (pounds per square inch)	$\rightarrow 1psi = 6,895.10^3 Pa$

Nous avons vu que la section S de l'éprouvette de traction jouait un rôle dans le passage de la force appliquée F à la contrainte de Cauchy. En fait, cette section évolue par l'intermédiaire des déformations qui ont lieu perpendiculairement à l'axe de traction. Ainsi, selon les axes X_1 et X_2 , on constate que la déformation est donnée par :

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -\nu\epsilon_{33} \quad (8)$$

où ν est appelé coefficient de Poisson (1781-1840). Les tenseurs $\vec{\sigma}$ et $\vec{\epsilon}$ ont donc la forme suivante dans un essai de traction sur un matériau isotrope élastique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{33} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_{33} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Notons enfin que la contrainte limite du domaine d'élasticité d'un matériau, représentée par l'ordonnée du point A de la figure 4, est appelée limite d'élasticité. Cette limite est d'une grande importance en résistance des matériaux. En effet, le dimensionnement des structures est souvent réalisé par rapport à cette valeur, à partir de laquelle il se produit une déformation plastique (irréversible) du matériau. Le lecteur pourra d'ailleurs remarquer que, dans le cas d'un essai de traction, la contrainte σ_{33} (ordonnée de la courbe) coïncide avec les contraintes équivalentes de von Mises et de Tresca.

2.4 Exemples

La figure 5 donne le module d'Young (en GPa) et le coefficient de Poisson (sans unité) de différents matériaux à différentes températures. On constate que le coefficient de Poisson est souvent voisin de 0,3. Si on calcule l'augmentation relative de volume du matériau en cours de traction (par la trace du tenseur des déformations), on remarque qu'elle vaut $(1 - 2\nu)\epsilon_{33}$. Dans un essai de traction, le matériau s'allonge et augmente généralement son volume dans le domaine d'élasticité.

3 Loi de comportement élastique linéaire

3.1 Loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy (1789-1857), qui a proposé d'exprimer chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations. La loi de Hooke est donc aujourd'hui souvent écrite sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (10)$$

matériau	température (degré C)	module d'Young (<i>GPa</i>)	coefficient de Poisson
Alliage d'aluminium AU4G	20	72	0,32
	200	66	0,325
	500	50	0,35
Alliage de titane Ti 4Al 4Mn	20	315	0,34
	200	115	0,34
Acier XC10	20	216	0,29
	200	205	0,30
	600	170	0,315
Fonte grise	20	100	0,29
Acier inoxydable austénitique 316	20	196	0,3
	200	170	
	700	131	
Aluminium (A5)	20	68	0,33
Bronze	20	130	0,34
	180	61	
Plexiglass	20	2,9	0,4
Araldite	20	3	0,4
Caoutchouc	20	0,002	0,5
verre-epoxy (sens long)	20	19	0,3
carbone-epoxy (sens long)	20	87,6	0,32
Béton	20	30	0,2
Granit	20	60	0,27
Pin sylvestre (sens long)	20	17	0,45
Pin sylvestre (sens trans.)	20	1	

FIG. 5 – exemples de caractéristiques élastiques

où $\underline{\underline{C}}$ est un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur des rigidités ou tenseur d'élasticité (les composantes covariantes de ce tenseur sont C_{ijkl}). Le tenseur des rigidités fait intervenir l'ensemble des caractéristiques élastiques du matériau. De même, les déformations sont reliées linéairement aux contraintes par la relation inverse :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (11)$$

où $\underline{\underline{S}}$ est le tenseur des compliances ou tenseur des complaisances élastiques du matériau (ses composantes covariantes sont S_{ijkl}).

Les tenseurs $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{S}}$ ont a priori 81 composantes (chaque indice varie de 1 à 3). Toutefois, nous avons vu que les tenseurs des contraintes de Cauchy et des déformations sont symétriques. Ils n'ont donc chacun que 6 composantes indépendantes, et leur liaison linéaire peut alors être réalisée à l'aide de 36 termes seulement. La forme suivante est souvent utilisée, dans un repère orthonormé, pour relier les composantes des contraintes et des déformations :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (12)$$

avec la condition $C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} = C_{jilk}$. Les composantes de la matrice présente dans la relation précédente sont souvent notées C_{IJ} , avec I et J variant de 1 à 6.

3.2 Énergie de déformation élastique

Nous avons jusqu'à présent utilisé la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations, ainsi que leur relation linéaire via la loi de Hooke. Nous pouvons maintenant utiliser l'autre caractéristique de la déformation élastique, qui est sa réversibilité. Considérons donc un solide Ω , et isolons un sous-domaine Ω_A soumis à des forces volumiques \vec{f}_v , et à un vecteur contrainte \vec{t} sur sa frontière (pas de forces d'accélération, figure 6).

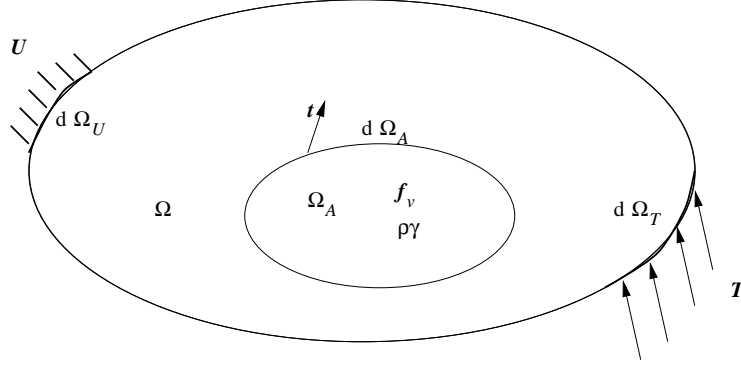


FIG. 6 – Solide en cours de transformation

Nous nous intéressons à une transformation élémentaire associée aux efforts appliqués sur le sous-domaine Ω_A . Cette transformation élémentaire réversible sera caractérisée par un vecteur déplacement $\delta \vec{u}$, et une énergie interne dE sous la forme :

$$dE = \delta W + \delta Q \text{ avec } \begin{cases} \delta W = \int_{\partial\Omega_A} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} ds + \int_{\Omega_A} \vec{f}_v \cdot \delta \vec{u} ds \\ \delta Q = T dS \end{cases} \quad (13)$$

où T est la température absolue et S l'entropie. Toutefois le terme δW peut être modifié comme suit, en utilisant le théorème de la divergence, le fait que le système est en équilibre, et la symétrie du tenseur des contraintes :

$$\delta W = \int_{\Omega_A} \underline{\sigma} : \delta \underline{\epsilon} dv \quad (14)$$

Il est donc possible d'écrire l'énergie interne par unité de volume dans le solide de sous la forme $de = \underline{\sigma} : \delta \underline{\epsilon} + T ds$. La température est dans notre cas constante (pas d'échange de chaleur entre Ω_A et l'extérieur). De plus, e et s sont des fonctions d'état, de sorte que de et ds sont des différentielles totales. Le travail δw s'écrit donc sous la forme :

$$\delta w = de - T ds = d(e - Ts) = dw = \underline{\sigma} : d\underline{\epsilon} \quad (15)$$

On peut en déduire que :

$$\frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} = \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}}, \text{ d'où } \frac{\partial^2 w}{\partial \underline{\underline{\epsilon}} \partial \underline{\underline{\epsilon}}} = \underline{\underline{C}} \quad (16)$$

L'énergie de déformation par unité de volume est finalement la forme quadratique définie positive suivante :

$$w = \frac{1}{2} \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (17)$$

Les relations précédentes se traduisent par le fait que la matrice 6x6 de l'équation 12 est symétrique et définie positive. Cette matrice ne possède donc que $6 \times 7 / 2 = 21$ composantes indépendantes. Le tenseur des rigidités élastiques $\underline{\underline{C}}$ ne possède donc que 21 composantes indépendantes dans le cas le plus général. Un raisonnement analogue nous aurait conduit au même résultat pour le tenseur des compliances $\underline{\underline{S}}$, qui ne possède aussi que 21 composantes indépendantes.

3.3 Relations de symétrie

En pratique, les matériaux possèdent des symétries supplémentaires qui permettent de restreindre encore le nombre de composantes indépendantes du tenseur des rigidités. Les principaux cas rencontrés sont l'orthotropie (symétrie par rapport à trois plans orthogonaux), qui réduit le nombre de composantes à 9 (c'est le cas par exemple du bois et des cristaux orthorhombiques), la symétrie cubique (orthotropie avec des propriétés identiques dans les trois directions orthogonales aux plans de symétrie), qui réduit le nombre de composantes à 3 (c'est la cas de la structure de nombreux métaux), et l'isotropie (mêmes propriétés dans toutes les directions), qui réduit le nombre de composantes à 2 (cette hypothèse est largement utilisée en mécanique des milieux continus, pour les matériaux courants).

3.3.1 Symétrie cubique

Dans le cas de la symétrie cubique, les trois composantes indépendantes de $\underline{\underline{C}}$ sont souvent notées $C_{11}(= C_{1111})$, $C_{12}(= C_{1122})$ et $C_{44}(= C_{2323})$. Des notations identiques pour $\underline{\underline{S}}$ conduisent aux relations suivantes :

Material	ϵ_{11}	ϵ_{33}	ϵ_{23}	ϵ_{12}	ϵ_{44}	ϵ_{22}
Ag	22.58	21.68	-9.83	124.0	46.1	93.4
Ag	23.2	22.9	-9.93	120.0	43.6	89.7
Ag-Au (25 At. % Au)	20.7	20.5	-8.91	—	—	—
Ag-Au (50 At. % Au)	19.7	19.7	-8.52	—	—	—
Ag-Au (75 At. % Au)	20.5	20.6	-9.09	—	—	—
Ag-Cd (1.34 At. % Cd)	23.07	21.89	-9.91	122.3	46.1	93.5
Ag-Cd (1.9 At. % Cd)	23.10	21.77	-9.91	121.6	45.9	91.3
Ag-In (8.36 At. % In)	25.1	22.20	-10.95	136.6	45.0	89.0
Ag-Mg (3.97 At. % Mg)	23.77	21.74	-10.01	139.8	46.0	93.8
Ag-Mg (7.33 At. % Mg)	23.94	22.10	-10.24	133.9	43.2	86.6
Ag-Pd (6.22 At. % Pd)	21.93	20.79	-9.40	127.7	48.1	95.3
Ag-Sn (1.17 At. % Sn)	24.22	21.82	-10.21	123.0	45.8	92.2
Ag-Zn (1.4 At. % Zn)	23.89	21.85	-10.20	120.9	45.8	91.6
Ag-Zn (2.4 At. % Zn)	23.54	21.68	-10.16	121.0	46.1	93.3
Ag-Zn (3.3 At. % Zn)	17.40	25.1	-8.6	105.6	28.3	63.9
Al	15.7	15.9	-3.8	112.0	27.9	66.0
Al	15.0	17.0	-6.9	102.0	27.0	56.0
Al-Cu (5% Cu)	—	—	—	89.4	41.5	44.2
Al-Sb (50 At. % Sb)	—	—	—	—	—	—
Au	23.3	23.8	-10.7	136.0	42.0	157.0
Au-Cd (47.5 At. % Cd)	112.4	23.63	-54.46	—	—	—
Au-Cd (50 At. % Cd)	89.2	22.75	-42.25	—	—	—
Cu	14.95	13.23	-6.28	173.0	75.6	124.0
Cu	15.3	15.3	-6.1	170.0	64.5	124.0
Cu	15.0	13.26	-6.3	168.0	75.4	121.0
Cu-Al (4.81 At. % Al)	15.86	13.25	-6.73	165.3	74.9	121.6
Cu-Al (9.98 At. % Al)	16.75	13.05	-7.11	159.5	76.6	117.6
Cu-Au (25 At. % Au)	13.4	15.1	-5.65	225.0	68.2	173.0
Cu-Ga (1.28 At. % Ga)	15.38	15.46	-6.45	165.0	74.3	118.2
Cu-Ga (4.15 At. % Ga)	15.91	15.50	-6.73	163.2	74.1	121.0
Cu-Ge (1.02 At. % Ge)	15.44	13.33	-6.20	166.6	75.0	121.0
Cu-Ge (1.71 At. % Ge)	15.72	13.33	-6.60	163.1	75.0	118.2
Cu-Si (4.17 At. % Si)	16.10	13.37	-6.85	167.8	74.8	124.2
Cu-Si (5.16 At. % Si)	16.71	13.35	-7.10	160.8	74.9	118.8
Cu-Si (7.69 At. % Si)	17.72	13.50	-7.66	165.8	74.3	126.4
Cu-Zn (4.59 At. % Zn)	15.91	13.48	-6.71	163.4	74.2	119.2
Cu-Zn (12% Zn)	19.4	13.9	-8.25	147.0	72.0	111.0
Cu-Zn (15.1 At. % Zn)	36.4	12.2	-16.8	127.9	52.2	109.1
Cu-Zn (55.1 At. % Zn)	41.93	12.44	-18.98	119.0	74.0	102.0
Fe	7.57	8.62	-2.82	237.0	116.0	141.0
Ge-As (50 At. % As)	126.4	186.0	-23.24	119.2	53.8	39.9
Ge-Sb (50 At. % Sb)	15.8	23.1	-4.96	38.5	23.7	40.4
Ge (25 °C)	9.78	14.90	-2.66	128.7	67.3	48.3
Ge (25 °C)	9.62	14.94	-2.70	131.6	68.9	50.9
In-Sb (50 At. % Sb)	24.2	33.1	-8.55	67.0	30.2	35.7
K	833.0	380.0	-370.0	4.59	2.61	1.72
Li (78 K)	295.0	92.6	-135.0	14.8	19.8	12.5
Mg	2.30	9.10	-0.78	255.0	110.0	176.0
Na (210 K)	555.0	203.7	-233.0	5.85	4.25	4.91
Nb	—	—	—	192.0	56.3	134.0
Ni (nonmagnétique)	7.69	8.36	-2.92	253.6	119.6	149.4
Ni (magnétique)	7.67	8.24	-2.95	251.2	121.5	157.1
Ni (magnétique)	7.50	8.16	-2.86	252.6	122.6	156.1
Ni (magnétique)	7.21	8.08	-2.71	252.8	123.8	152.0
Pb	93.0	69.4	-42.6	48.3	14.4	40.9
Pd	—	—	—	226.6	71.5	175.2
Si	7.65	11.9	-2.16	168	84.0	60.0
Ta	—	—	—	265.0	83.1	159.0
Tb	27.2	20.9	-10.7	75.3	47.8	48.9
V	—	—	—	229.0	43.8	117.0
W	2.573	6.55	-0.729	301.0	151.0	198.0

FIG. 7 – Rigidités et compliances de différents métaux cubiques

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Le tableau 7 donne des valeurs pour ces coefficients dans le cas de métaux dont la maille élémentaire est à symétrie cubique. Les compliances sont en TPa^{-1} , soit $10^{-12}Pa^{-1}$. Les rigidités sont en GPa , soit 10^9Pa .

3.3.2 Isotropie

Dans le cas isotrope, le nombre de coefficients est réduit à deux par la relation $C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$. Il existe plusieurs façon d'exprimer ces coefficients. On peut par exemple choisir ceux de Lamé $\lambda = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})$ et $\mu = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$, ou le module d'Young $E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$ et le coefficient de Poisson $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ vus dans le cas de l'essai de traction. La loi de comportement élastique linéaire s'écrit dans le cas isotrope de la façon suivante :

$$\underline{\sigma} = 2\mu\underline{\epsilon} + \lambda tr(\underline{\epsilon})\underline{I} = \frac{E}{1 + \nu}(\underline{\epsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu}tr(\underline{\epsilon})\underline{I}) \quad (20)$$

et dans le sens inverse :

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2\mu}\underline{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}tr(\underline{\sigma})\underline{I} = \frac{1 + \nu}{E}\underline{\sigma} - \frac{\nu}{E}tr(\underline{\sigma})\underline{I} \quad (21)$$

où \underline{I} est le tenseur identité.

Notons enfin que le module de compression hydrostatique K est également utilisé. Il relie la partie hydrostatique de la déformation ($\epsilon_H = tr(\underline{\epsilon})$) à la contrainte hydrostatique ($\sigma_H = tr(\underline{\sigma})$). Il peut être exprimé en fonction des coefficients de Lamé ou en fonction de E et ν sous la forme :

$$K = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1 - 2\nu} \quad (22)$$

3.4 Thermo-élasticité linéaire

Les matériaux sont souvent soumis à des chargements thermiques qui ont pour effet de dilater les structures. Les déformations thermiques sont directement proportionnelles à la variation de température ΔT , par le coefficient de dilatation thermique α :

$$\underline{\epsilon}^{th} = \alpha \Delta T \underline{I} \quad (23)$$

Lorsque la structure n'est pas liée mécaniquement à l'extérieur, alors ce champ de déformation thermique ne générera pas de contraintes s'il vérifie les équations de compatibilité. On montre qu'une telle condition impose un champ de températures linéaire dans la structure. Dans le cas contraire, ou si la structure est liée mécaniquement à l'extérieur (on parle alors de dilatation contrariée), alors des contraintes seront générées dans le solide.

Par exemple, lorsque l'on chauffe de façon homogène une barre de métal, celle-ci se dilate sans qu'il y ait création de contraintes à l'intérieur. Par contre, si on impose à celle-ci de garder la même longueur, alors une contrainte de compression sera créée dans la barre pour respecter cette condition. Une autre façon de créer des contraintes dans la barre est de la chauffer de façon non homogène. Par exemple, lors d'un chauffage par induction à haute fréquence, le diamètre extérieur de la barre est plus dilaté que le centre. La partie extérieure de la barre sera donc mise en compression par la partie intérieure.

D'une façon plus générale, lors d'une sollicitation dite "thermo-mécanique", les déformations thermiques s'ajoutent aux déformations mécaniques, elles-même reliées aux contraintes par la loi de comportement du matériau. Dans le cas élastique linéaire isotrope, on obtient une relation entre les déformations et les contraintes sous la forme :

$$\underline{\epsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\sigma} + \left(\alpha \Delta T - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\sigma}) \right) \underline{I} \quad (24)$$

L'inversion de cette relation nous fournit la loi de comportement dite "thermo-élastique" du matériau :

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\underline{\epsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\underline{\epsilon}) \underline{I} \right) - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha \Delta T \underline{I} \quad (25)$$