DÉFORMATIONS

1 Formulation eulérienne en vitesses

1.1 Tenseur gradient des vitesses de déplacement

Sous l'effet d'un chargement extérieur, un corps solide peut se déformer. Un point matériel P, de position initiale $\overrightarrow{X}$ fixée dans la configuration C_0, vient en position $\overrightarrow{x}$ dans la configuration courante $C(t)$. Ces positions sont reliées entre elles par le vecteur déplacement $\overrightarrow{u}$. En configuration eulérienne, l'évolution de la position du point P est donnée dans $C(t)$ par sa vitesse instantanée $\overrightarrow{v}$.

Pour décrire localement la transformation du solide, nous avons vu que celle-ci était linéarisée autour du point P, ce qui permet de définir le tenseur gradient de la transformation $\underline{F}$. De la même façon, nous étudions ici l'évolution d'un vecteur $\overrightarrow{dx}$ autour du point P par l'intermédiaire de sa variation au cours du temps. Nous obtenons :

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\underline{F}.\overrightarrow{dX}\right) = \underline{\dot{F}}.\overrightarrow{dX} = \underline{\dot{F}}.\underline{F}^{-1}.\overrightarrow{dx} = \underline{L}.\overrightarrow{dx} \\ \text{avec } \underline{L} = \underline{\dot{F}}.\underline{F}^{-1} = \underline{grad}(\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t))\end{gathered} \tag{1}$$

Cette équation permet de définir le tenseur gradient des vitesses de déplacement $\underline{L}$. Il est important de noter ici que ce tenseur n'est pas la dérivée par rapport au temps d'une quantité, mais le gradient d'une vitesse. C'est pour cela qu'il est noté sans *point* dessus. Ses composantes sont pourtant homogènes à l'inverse d'un temps (s^{-1}). Dans une base orthonormée fixe, ses composantes sont :

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{2}$$

1.2 Tenseur des taux de déformation et de rotation

Par définition, le tenseur des *taux de déformation* $\underline{D}$, ou des vitesses de déformation d'Euler, est la partie symétrique du tenseur $\underline{L}$, gradient des vitesses de déplacement dans la configuration courante :

$$\underline{D} = \frac{1}{2}(\underline{L} + \underline{L}^t) \tag{3}$$

Comme le tenseur gradient des vitesses de déplacement, ses composantes sont homogènes à l'inverse d'un temps (s^{-1}), mais il n'est pas noté avec un *point* dessus. Dans une base orthonormée fixe, ses composantes sont :

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{4}$$

Le tenseur des taux de déformation est symétrique. Il permet de décrire, en termes de vitesse instantanée, le changement de forme du solide, mais pas sa position par rapport à un repère fixe. Pour décrire l'évolution, toujours en termes de vitesse instantanée, de la position du solide par rapport à un repère fixe, on définit le tenseur *taux de rotation* $\underline{\Omega}$, ou tenseur des vitesses de rotation de corps solide. Il s'agit de la partie antisymétrique du tenseur $\underline{L}$ gradient des vitesses de déplacement :

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2}(\underline{L} - \underline{L}^t) \tag{5}$$

Ce tenseur représente la vitesse de rotation des axes principaux du solide en cours de transformation. Ses composantes sont toujours homogènes à l'inverse d'un temps, mais il n'est pas la dérivée par rapport au temps d'une quantité définie. Dans une base orthonormée fixe, les composantes du tenseur taux de rotation s'écrivent :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{6}$$

1.3 Intégration dans le temps

Nous avons vu précédemment que, dans une formulation eulérienne, l'intégration en temps de la vitesse courante des particules du solide était difficile. Ceci est dû à l'évolution de la configuration du solide en cours de transformation. De même, il est très délicat d'intégrer dans le temps les tenseurs $\underline{L}$, $\underline{D}$ et $\underline{\Omega}$. La méthode la plus couramment employée actuellement est l'utilisation d'une formulation dite *lagrangienne réactualisée*, qui consiste à intégrer sans changer de configuration sur un petit incrément de temps Δt, puis à actualiser la configuration au nouvel instant calculé pour intégrer sur un nouveau petit incrément. Cette méthode ne sera pas exposée dans ce cours. Le lecteur trouvera plus de détails dans la bibliographie.

2 Formulation en déplacements

2.1 Tenseur des dilatations

Comme dans la formulation en vitesses, nous allons nous intéresser ici au voisinage d'un point matériel P, en considérant deux vecteurs infinitésimaux $\overrightarrow{dx}$ et $\overrightarrow{dy}$ dans $C(t)$, de positions initiales respectives $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dY}$ dans C_0. On constate que, au cours de la transformation, le produit scalaire de ces deux vecteurs évolue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dy} &= \overrightarrow{dX}.\underline{F}^t.\underline{F}.\overrightarrow{dY} \\ &= \overrightarrow{dX}.\underline{C}.\overrightarrow{dY} \text{ avec } \underline{C} = \underline{F}^t.\underline{F} \end{aligned} \tag{7}$$

Le tenseur $\underline{C}$ ainsi défini est appelé *tenseur des dilatations*. Il est lagrangien car il s'applique aux vecteurs $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dY}$ de C_0. On peut remarquer que, dans le cas d'une rotation de corps solide (sans déformation), le tenseur $\underline{F}$ cela celui d'une rotation, et satisfera donc la condition $\underline{F}^t\underline{F} = \underline{I}$, où $\underline{I}$ est le tenseur identité du second ordre. Le tenseur des dilatations devient dans ce cas le tenseur identité. Ce tenseur caractérise donc la déformation du solide.

En notant maintenant $\overrightarrow{N}_X$ et $\overrightarrow{N}_Y$ les vecteurs unitaires associés respectivement aux directions $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dY}$ de C_0, on a $\overrightarrow{dX} = dL_X\overrightarrow{N}_X$ et $\overrightarrow{dY} = dL_Y\overrightarrow{N}_Y$, ce qui permet de calculer :

– la dilatation λ dans une direction quelconque (par exemple $\overrightarrow{N}_X$) :

$$\lambda(\overrightarrow{N}_X) = \frac{\|\overrightarrow{dx}\|}{\|\overrightarrow{dX}\|} = \sqrt{\frac{\overrightarrow{dX}.\underline{C}.\overrightarrow{dX}}{\overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dX}}} = \sqrt{\overrightarrow{N}_X.\underline{C}.\overrightarrow{N}_X} \tag{8}$$

– le glissement, ou évolution de l'angle α, entre deux directions (par exemple $\overrightarrow{N}_X$ et $\overrightarrow{N}_Y$) :

$$\cos(\alpha(\overrightarrow{N}_X,\overrightarrow{N}_Y)) = \frac{\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dy}}{\|\overrightarrow{dx}\|\|\overrightarrow{dy}\|} = \frac{\overrightarrow{dX}.\underline{C}.\overrightarrow{dY}}{\sqrt{\overrightarrow{dX}.\underline{C}.\overrightarrow{dX}}\sqrt{\overrightarrow{dY}.\underline{C}.\overrightarrow{dY}}} = \frac{\overrightarrow{N}_X.\underline{C}.\overrightarrow{N}_Y}{\lambda(\overrightarrow{N}_X)\lambda(\overrightarrow{N}_Y)} \tag{9}$$

La formule 7 montre en fait que la forme bilinéaire associée au tenseur $\underline{C}$ est définie positive, et que ce tenseur est symétrique. Il est donc diagonalisable, et ses valeurs propres sont positives ou nulles. Ses directions propres correspondent aux directions principales de déformation. Ses valeurs propres caractérisent les dilatations du solide dans ces directions.

2.2 Tenseurs des déformations

Pour caractériser la déformation d'un solide en cours de transformation, on utilise l'écart entre les quantités $\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dy}$ (dans $C(t)$) et $\overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dY}$ (dans C_0). Ceci permet d'estimer à la fois les variations de longueur et la variations d'angles. On peut écrire cette différence de nombreuses façons. En particulier, on peut choisir de l'exprimer soit en fonction des vecteurs $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dY}$ (description lagrangienne), soit en fonction des vecteurs $\overrightarrow{dx}$ et $\overrightarrow{dy}$ (description eulérienne). On obtient les deux formules suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dy} - \overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dY} &= \overrightarrow{dX}.\underline{C}.\overrightarrow{dY} - \overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dY} \\ &= \overrightarrow{dX}.(\underline{C} - \underline{I}).\overrightarrow{dY} \\ &= 2\overrightarrow{dX}.\underline{E}.\overrightarrow{dY} \text{ avec } \underline{E} = \tfrac{1}{2}(\underline{F}^t.\underline{F} - \underline{I}) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dy} - \overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dY} &= \overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dy} - \overrightarrow{dx}.\underline{F}^{-t}.\underline{F}.\overrightarrow{dy} \\ &= \overrightarrow{dx}.(\underline{I} - \underline{F}^{-t}.\underline{F}).\overrightarrow{dy} \\ &= 2\overrightarrow{dx}.\underline{e}.\overrightarrow{dx} \text{ avec } \underline{e} = \tfrac{1}{2}(\underline{I} - \underline{F}^{-t}.\underline{F}) \end{aligned} \tag{11}$$

Ces deux formules définissent les tenseurs de déformation de *Green-Lagrange* (tenseur $\underline{E}$ lagrangien) et d'*Euler-Almansi* (tenseur $\underline{e}$ eulérien). Ces deux tenseurs sont symétriques. Ils représentent la déformation du solide.

En utilisant la formule reliant le tenseur gradient de la transformation $\underline{F}$ au vecteur déplacement $\overrightarrow{u}$, Le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{E}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{grad}(\overrightarrow{u}) + \underline{grad}(\overrightarrow{u})^t + \underline{grad}(\overrightarrow{u})^t.\underline{grad}(\overrightarrow{u})) \tag{12}$$

On constate que cette expressions n'est pas linéaire en fonction du champ de déplacement $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{X},t)$ ou de son gradient. Ceci signifie que, dans le cas général, on ne peut pas ajouter deux tenseurs de déformation pour représenter la déformation issue de deux champs de déplacement successifs. En fait, cette addition ne peut être réalisée que dans l'hypothèse des petites perturbations.

On peut utiliser le tenseur de Green-Lagrange pour caractériser la variation de longueur dans une direction quelconque (par exemple $\overrightarrow{dX} = dL_X\overrightarrow{N}_X$). En posant $\overrightarrow{dx} = dl_x\overrightarrow{n}_x$, où $\overrightarrow{n}_x$ est un vecteur unitaire, on obtient :

$$dl_x^2 - dL_X^2 = \overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx} - \overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dX} = 2dL_X^2\overrightarrow{N}_X.\underline{E}.\overrightarrow{N}_X \tag{13}$$

Le scalaire $\overrightarrow{N}_X.\underline{E}.\overrightarrow{N}_X$ est appelé *déformation dans la direction* $\overrightarrow{N}_X$. Il s'écrit en fonction de la dilatation $\lambda(\overrightarrow{N}_X)$ ou de l'allongement unitaire $\delta(\overrightarrow{N}_X) = \lambda(\overrightarrow{N}_X) - 1$ dans cette direction sous la forme :

$$\overrightarrow{N}_X.\underline{E}.\overrightarrow{N}_X = \frac{dl_x^2 - dL_X^2}{2dL_X^2} = \frac{1}{2}\left(\lambda^2(\overrightarrow{N}_X) - 1\right) = \delta(\overrightarrow{N}_X)\left(\frac{\delta(\overrightarrow{N}_X)}{2} + 1\right) \tag{14}$$

Enfin, il est possible de relier le tenseur des déformations de Green-Lagrange au tenseur des taux de déformation. Pour cela, il suffit de calculer la vitesse de variation de l'écart $\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dy} - \overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dY}$ des deux façons suivantes :

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dy} - \overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dY}\right) = 2\overrightarrow{dX}.\frac{d\underline{E}}{dt}.\overrightarrow{dY} \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dy}-\overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dY}\right) &= \tfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dy}\right)\\
&= \tfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dx}\right).\overrightarrow{dy}+\overrightarrow{dx}.\tfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dy}\right)\\
&= \overrightarrow{dx}.\underline{L}^t.\overrightarrow{dy}+\overrightarrow{dx}.\underline{L}.\overrightarrow{dy}\\
&= 2\overrightarrow{dx}.\underline{D}.\overrightarrow{dy}\\
&= 2\overrightarrow{dX}.\underline{F}^t.\underline{D}.\underline{F}.\overrightarrow{dY}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Il en ressort la relation suivante :

$$\underline{\dot{E}} = \underline{F}^t.\underline{D}.\underline{F} \tag{17}$$

3 Hypothèse des petites perturbations

3.1 Tenseur gradient des déplacements

Dans l'hypothèse des petites perturbations, les gradients de déplacement dans le solide sont suffisamment faibles pour que l'on puisse se limiter à l'application linéaire tangente calculée dans C_0 pour décrire la transformation du solide. Ceci revient à confondre les configurations initiale C_0 et courante $C(t)$, et à faire l'approximation au premier ordre suivante :

$$\underline{F}^{-1} = (\underline{I}+\underline{grad}(\overrightarrow{u}))^{-1} \equiv \underline{I}-\underline{grad}(\overrightarrow{u}) \tag{18}$$

Le fait de confondre les configurations initiale et courante permet d'intégrer directement le tenseur gradient des vitesses de déplacements pour obtenir une estimation au premier ordre du tenseur gradient des déplacements (noté $\underline{\mathrm{d}}$) sous la forme :

$$\underline{d} = \int \underline{L}dt = \int \underline{\dot{F}}.\underline{F}^{-1}dt \equiv \underline{grad}(\overrightarrow{u}) \tag{19}$$

Les composantes de ce tenseur sont fréquemment écrites sous la forme (voir les annexes pour les notions de composantes de tenseur et de dérivée covariante) :

$$d_{ij} = u_{i,j} \tag{20}$$

3.2 Déformations et de rotation de corps solide

Le fait de négliger les termes du second ordre dans les tenseurs de déformation $\underline{E}$ et $\underline{e}$ permet d'obtenir pour ces tenseurs une expression unique, notée $\underline{\epsilon}$, qui coïncide avec l'intégration en temps du tenseur des taux de déformation $\underline{D}$. On obtient un seul tenseur des déformations sous la forme :

$$\underline{E} \equiv \underline{e} \equiv \int \underline{D} dt \equiv \frac{1}{2}\left(\underline{grad}(\overrightarrow{u}) + \underline{grad}(\overrightarrow{u})^t\right) \tag{21}$$

dont les composantes s'écrivent :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{22}$$

Les mêmes hypothèses permettent d'écrire le tenseur de rotation de corps solide sous la forme :

$$\underline{\omega} \equiv \frac{1}{2}(\underline{grad}(\overrightarrow{u}) - \underline{grad}(\overrightarrow{u})^t) \tag{23}$$

avec des composantes :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \tag{24}$$

3.3 Dilatation volumique

Du fait de la linéarisation des relations, la dilatation volumique $\frac{\Delta V}{V}$ du solide est donnée dans ce cas par l'équation de transport d'un élément de volume modifiée comme suit :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{dv}{dV} - 1 = det(\underline{F}) - 1 \equiv tr(\underline{\epsilon}) = div(\overrightarrow{u}) \tag{25}$$

3.4 Équations de compatibilité

Dans l'hypothèse des petites perturbations, le tenseur gradient des déplacements caractérise complètement le changement de forme du solide (figure 1), qui se

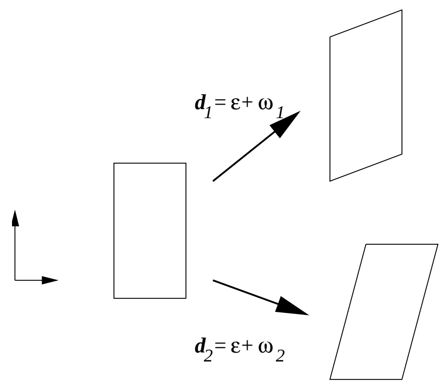

FIG. 1 – Deux transformations ayant le même tenseur de déformation, mais des gradients de déplacement différents

décompose en un changement de forme (une déformation) et une rotation (de corps solide). En particulier, ce tenseur permet d'écrire :

$$\overrightarrow{dx} = (\underline{I} + \underline{d}).\overrightarrow{dX} \text{ , soit } \overrightarrow{du} = \underline{d}.\overrightarrow{dX} = \underline{grad}(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{dX} \tag{26}$$

avec :

$$\underline{d} = \underline{grad}(\overrightarrow{u}) = \underline{\epsilon} + \underline{\omega} \tag{27}$$

Les équations précédentes conduisent à des relations supplémentaires que doit satisfaire le tenseur des déformations. En effet, si tout champ de déplacements permet par dérivation d'obtenir un champ de déformations, tout tenseur symétrique ne correspond pas forcément à un tenseur de déformations. Il faut pour cela que les termes du tenseur gradient des déplacements qui en découle forment une différentielle totale $\overrightarrow{du}$, c'est-à-dire que les dérivées secondes croisées coïncident :

$$u_{i,jk} = u_{i,kj} \Rightarrow d_{ij,k} = d_{ik,j} \Rightarrow \epsilon_{ik,j} - \epsilon_{ij,k} = \omega_{ij,k} - \omega_{ik,j} \tag{28}$$

En utilisant la définition des composantes de rotation de corps solide, le respect de la condition sur les dérivées secondes croisées du champ de déplacements $\overrightarrow{u}$ permet d'écrire le second terme de l'équation précédente sous la forme :

$$
\begin{aligned}
\omega_{ij,k} - \omega_{ik,j} &= \frac{1}{2}\left(d_{ij,k} - d_{ji,k} - d_{ik,j} + d_{ki,j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_{i,jk} - u_{j,ik} - u_{i,kj} + u_{k,ij}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-u_{j,ki} + u_{k,ji}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(d_{kj,i} - d_{jk,i}\right) \\
&= \omega_{kj,i}
\end{aligned} \tag{29}
$$

Ceci conduit à l'expression suivante en permutant le indices i et k dans les équations précédentes :

$$\epsilon_{ki,j} - \epsilon_{kj,i} = \omega_{ij,k} \tag{30}$$

Chaque terme $\epsilon_{ki,j} - \epsilon_{kj,i}$ représente donc la composante selon la direction k de la différentielle totale de rotation de corps solide $d\omega_{ij}$. Pour que ceci soit possible, il faut que l'égalité des dérivées secondes croisées soit satisfaite sur chaque $d\omega_{ij}$, soit $\omega_{ij,kl} = \omega_{ij,lk}$. On aboutit alors aux équations suivantes sur les composantes du tenseur des déformations :

$$\epsilon_{ki,jl} + \epsilon_{lj,ik} = \epsilon_{kj,il} + \epsilon_{li,jk} \tag{31}$$

Cette équation représente 81 relations entre les déformations. Toutefois, seules six sont indépendantes. Elles sont obtenues par exemple en effectuant le produit doublement contracté par les termes g^{jl} de la métrique de l'espace (voir les annexes pour la définition de la métrique). Dans un repère orthonormé, ceci revient à faire $j = l$ et à sommer sur j. On obtient :

$$\sum_j \epsilon_{ki,jj} + \epsilon_{jj,ik} = \sum_j \epsilon_{kj,ij} + \epsilon_{ji,jk} \tag{32}$$

Ceci peut être écrit à l'aide des opérateurs différentiels classiques :

$$\underline{\Delta}(\underline{\epsilon}) + \underline{grad}(\overrightarrow{grad}(tr(\underline{\epsilon}))) = \underline{grad}(\overrightarrow{div}(\underline{\epsilon})) + \underline{grad}(\overrightarrow{div}(\underline{\epsilon}))^t \tag{33}$$

Il s'agit d'une équation entre des tenseurs d'ordre 2, qui représente donc un ensemble de neuf relations, qui se réduit à six du fait de la symétrie des tenseurs résultants. Ces relations sont appelées "équations de compatibilité". Dans un repère orthonormé, elles sont souvent écrites sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}\epsilon_{22,33}+\epsilon_{33,22}-2\epsilon_{23,23}=0\\\epsilon_{33,11}+\epsilon_{11,33}-2\epsilon_{31,31}=0\\\epsilon_{11,22}+\epsilon_{22,11}-2\epsilon_{12,12}=0\\\epsilon_{11,23}+(\epsilon_{23,1}-\epsilon_{31,2}-\epsilon_{12,3})_{,1}=0\\\epsilon_{22,31}+(\epsilon_{31,2}-\epsilon_{12,3}-\epsilon_{23,1})_{,2}=0\\\epsilon_{33,12}+(\epsilon_{12,3}-\epsilon_{23,1}-\epsilon_{31,2})_{,3}=0\end{array}\right. \quad (34)$$

Notons enfin que les équations de compatibilité fournissent une relation scalaire importante, qui est obtenue en multipliant la relation générale par les termes $g^{jk}g^{il}$, et en effectuant les deux produits doublement contractés. On obtient :

$$div(\overrightarrow{div}(\underline{\epsilon})) = \Delta(tr(\underline{\epsilon})) \quad (35)$$

3.5 Mesures des déformations

La variation relative de longueur d'un vecteur élémentaire $\overrightarrow{dX} = dL_X\overrightarrow{N}_X$, que l'on notera δ, est reliée à la déformation dans la direction $\overrightarrow{N}_X$ par l'équation 14. Dans l'hypothèse des petites perturbations, cette équation devient :

$$\delta\left(\frac{\delta}{2}+1\right) = \overrightarrow{N}_X.\underline{\epsilon}.\overrightarrow{N}_X \quad (36)$$

Par exemple, si le vecteur élémentaire est parallèle au premier axe $\overrightarrow{N}_X = \overrightarrow{a}_1$, alors la relation s'écrit $\delta(\frac{\delta}{2}+1) = \epsilon_{11}$. S'il est parallèle au second, on a $\delta(\frac{\delta}{2}+1) = \epsilon_{22}$. Enfin, s'il est situé sur la bissectrice de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$ (à 45 degrés), alors $\delta(\frac{\delta}{2}+1) = \frac{1}{2}(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+2\epsilon_{12})$. Le placement de trois jauges tel que décrit sur la figure suivante permet donc de caractériser toutes les déformations dans le plan des jauges.

3.6 Conditions aux limites

Dans les problèmes de mécanique des milieux continus, les solides considérés sont reliés au milieu extérieur par des conditions aux limites. Par exemple, si une partie du solide est encastrée, alors il faudra tenir compte dans la

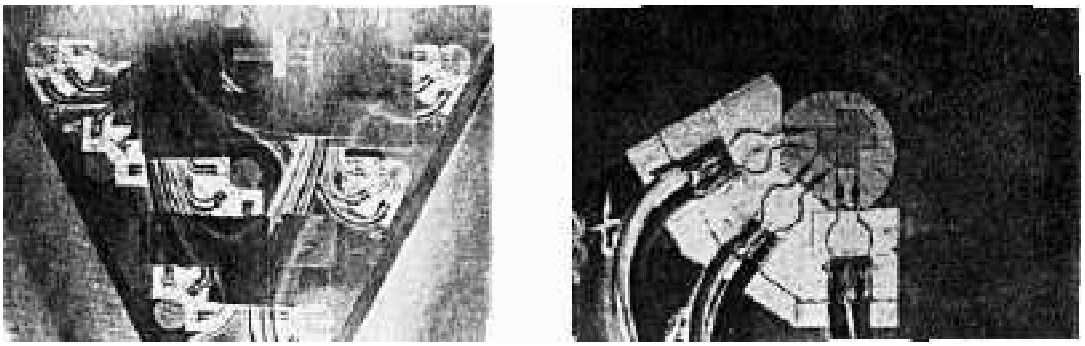

FIG. 2 – Jauges de déformation placées sur un solide à 0, 45 et 90 degrés

résolution du problème de cet encastrement. D'une façon plus générale, les conditions aux limites agissant sur la cinématique du problème sont formulées en déplacements. On note $\partial\Omega_U$ la partie de la frontière $\partial\Omega$ d'un solide Ω sur laquelle les déplacements sont imposés (au moins partiellement). Les conditions aux limites sont alors dites "en déplacements" et on écrit que :

$$\forall P \in \partial\Omega_U, \overrightarrow{u}(P) = \overrightarrow{U} \tag{37}$$

Parfois, seules certaines composantes de déplacement u_i de $\overrightarrow{u}$ sont connues. La condition précédente n'est alors appliquée qu'à ces composantes. Toutefois, nous garderons une expression vectorielle de ces conditions aux limites dans la suite de ce support de cours, afin de ne pas compliquer encore les notations.