



**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

Contraintes principales

Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé

# CONTRAINTES



## CONTRAINTES

### Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

Contraintes principales

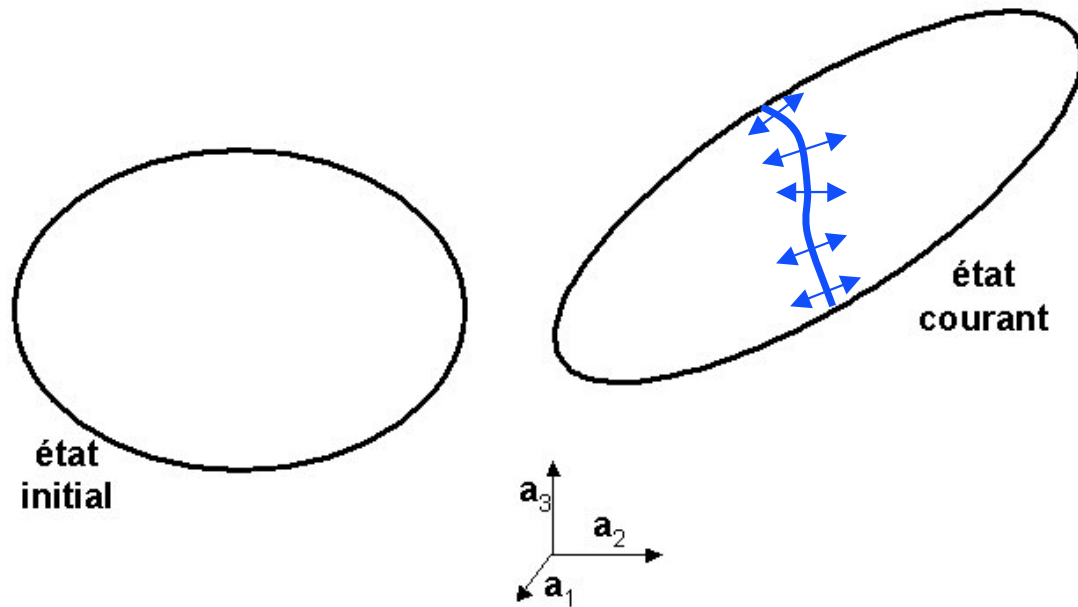
Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé

Comment décrire les efforts auxquels est soumis ce solide ?



Il faut utiliser le tenseur des contraintes



**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

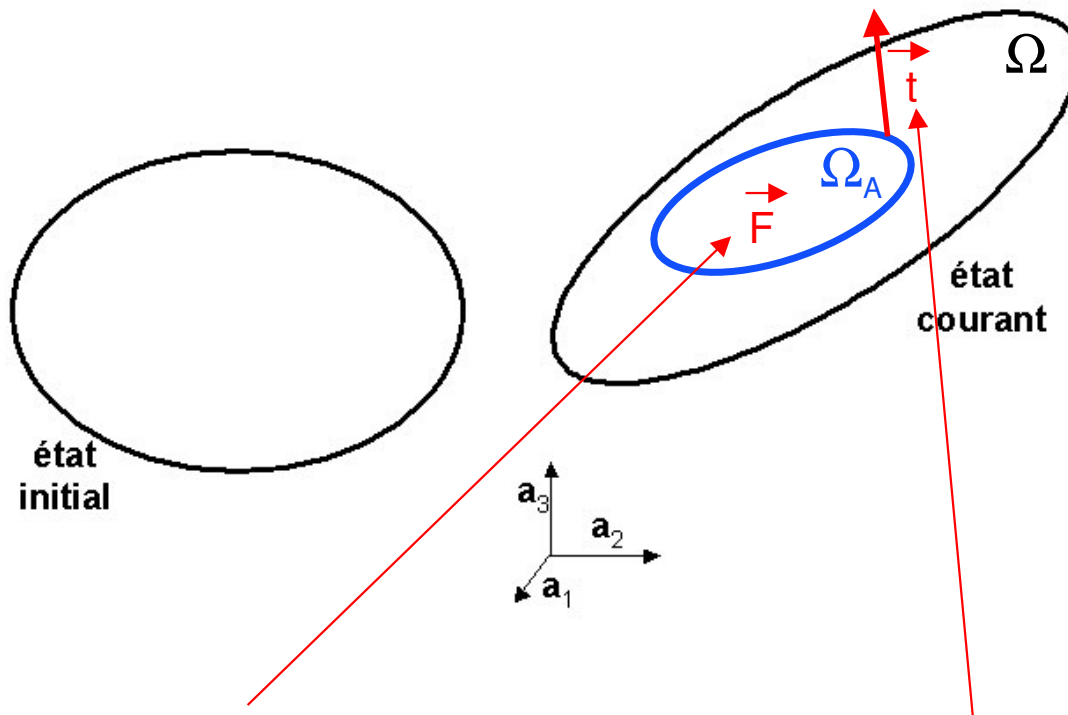
Contraintes principales

Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé



Efforts de cohésion dans  $\Omega_A$   
(dus à la déformation)

Efforts de  $\Omega$  sur  $\Omega_A$   
(provoquant la déformation)

Densité volumique de forces  $F$

Densité surfacique de forces  $t$



**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

**Théorème de l'action et de la réaction**

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

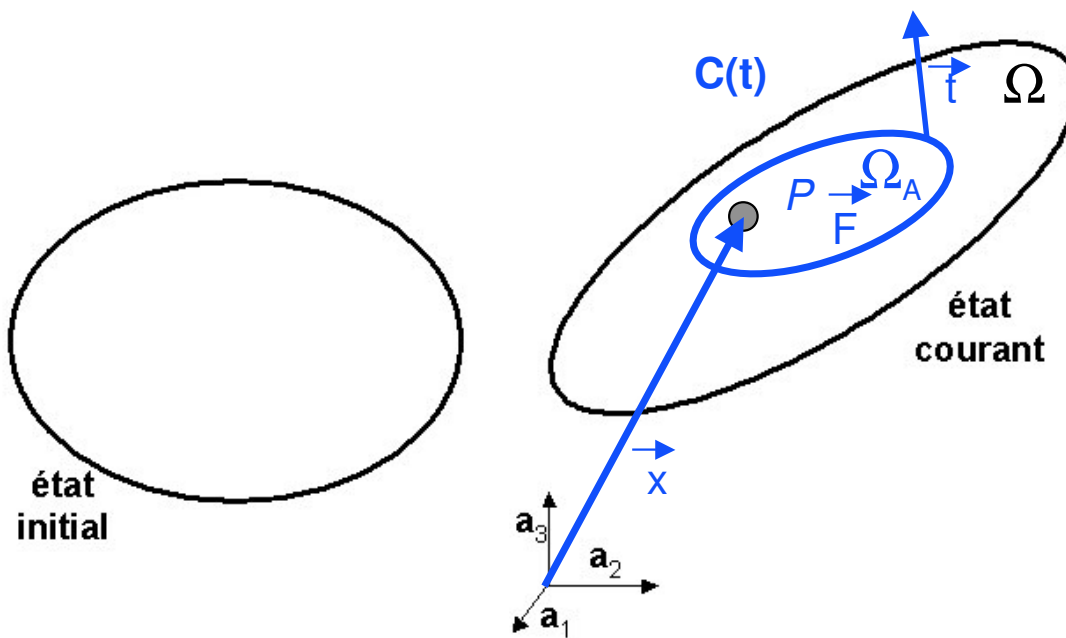
Contraintes principales

Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé



$$\int_{\Omega_A} \vec{F} dv = \int_{\partial\Omega_A} \vec{t} ds \implies \begin{cases} \vec{F} = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \\ \vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \end{cases} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Tenseur des contraintes} \\ \leftarrow \text{Vecteur contrainte} \end{array}$$

$$\int_{\Omega_A} \vec{F} \wedge \vec{x} dv = \int_{\partial\Omega_A} \vec{t} \wedge \vec{x} ds \implies \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t \quad \text{Le tenseur des contraintes est symétrique}$$



## CONTRAINTES

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

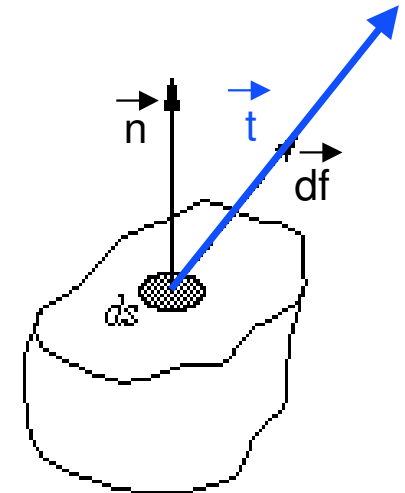
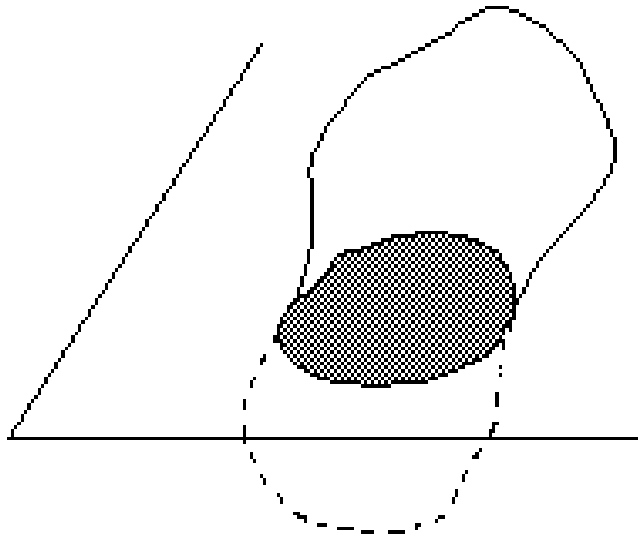
Contraintes principales

Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé



$$\vec{t} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\vec{f}}{ds}$$

Le vecteur contrainte  $n$  n'est pas forcément porté par la normale à cette surface.



$$\vec{df} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\vec{s}$$

**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

**Différents tenseurs des contraintes**

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

Contraintes principales

Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé

$C(t)$

Cauchy (eulérien, symétrique)

$C(t)$

$C_0$

Piola-Kirchhoff (lagrangien, symétrique)

$C_0$

$C(t)$

Piola-Lagrange

$C_0$

↑  
vecteur

↑  
contraintes

↑  
surface



**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

**Contraintes normale et tangentielle**

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

Contraintes principales

Contrainte moyenne et déviateur

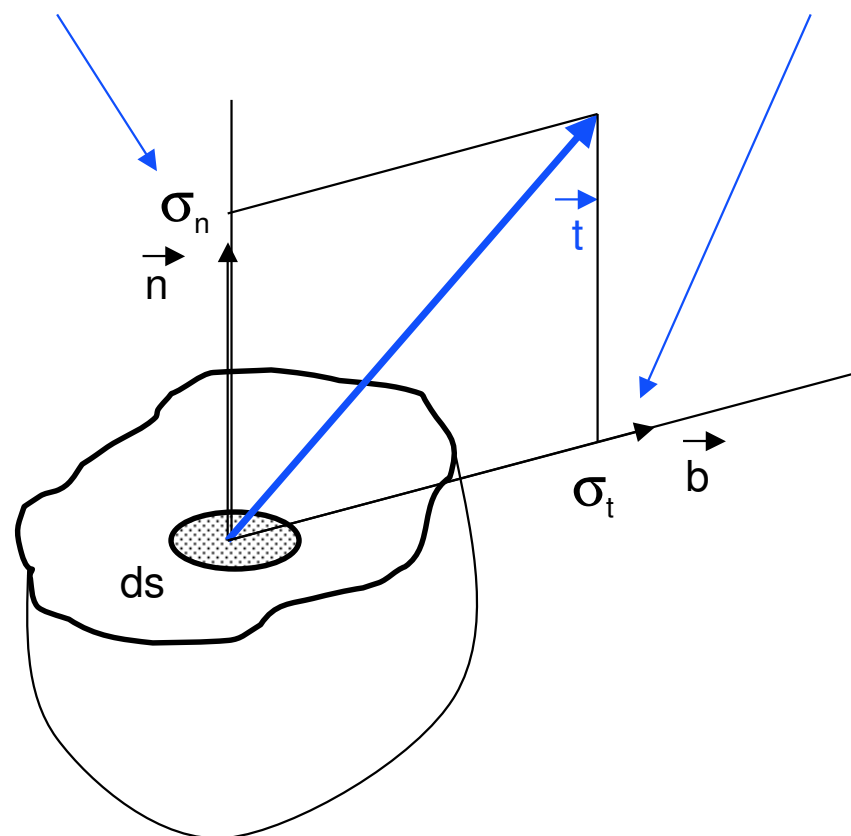
Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé

Contrainte normale

Contrainte tangentielle



$$\vec{\sigma}_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$\vec{\sigma}_t = \vec{t} \cdot \vec{b} = \sigma_{ij} b_i n_j$$

ou

$$\vec{\sigma}_t \cdot \vec{b} = \vec{t} - \sigma_n \vec{n}$$



**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

**Conditions aux limites en pression**

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

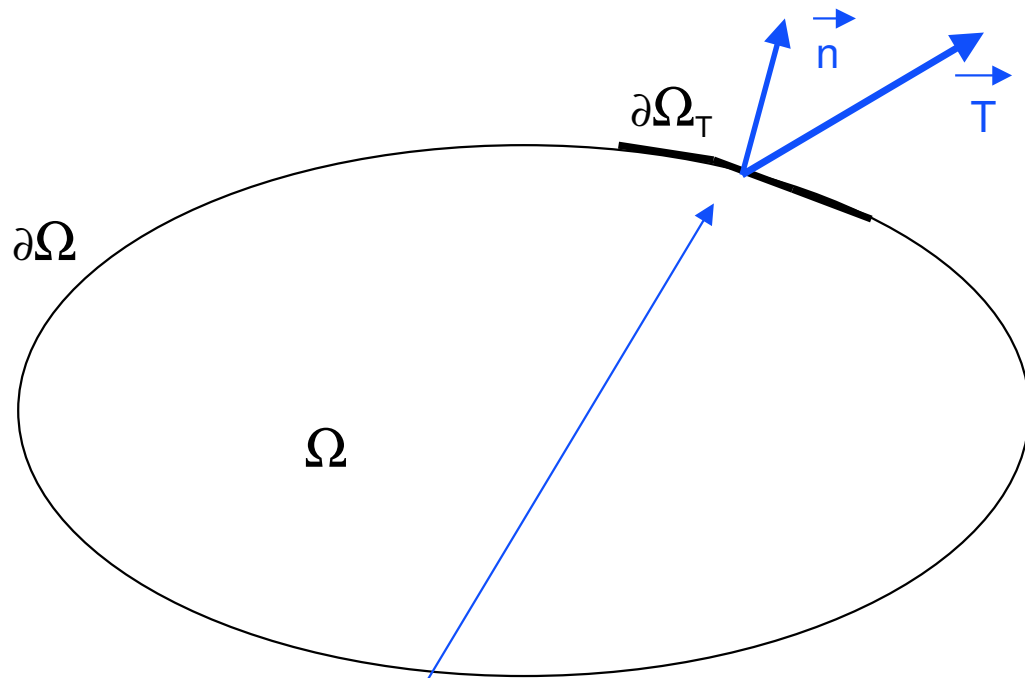
Contraintes principales

Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé



Vecteur contrainte  $\vec{T}$  connu sur la partie  $\partial\Omega_T$  de  $\partial\Omega$   $\Rightarrow$   $\vec{t} = \vec{T}$   $\Rightarrow$   $\sigma \cdot \vec{n} = \vec{T}$





**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

**Contraintes dans un repère orthonormé**

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

Contraintes principales

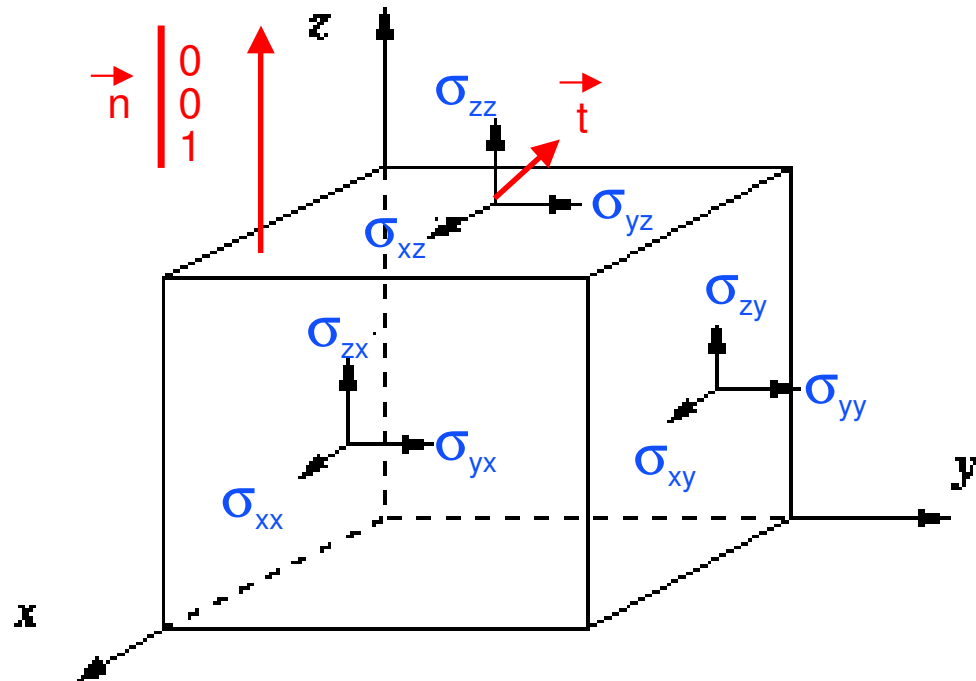
Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé

Dans un repère orthonormé (Oxyz) :



$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

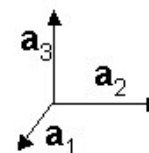
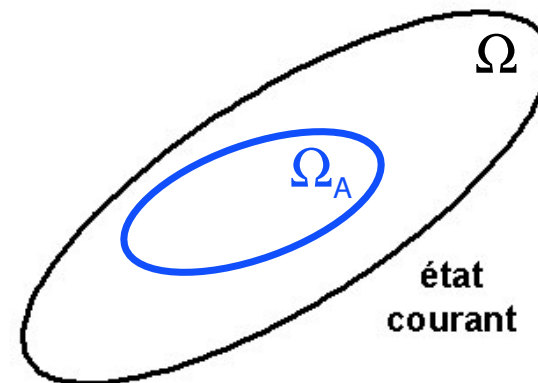
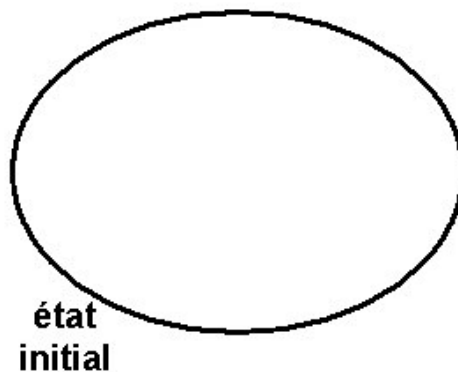
Contraintes principales

Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé



actions sur  $\Omega_A$  par le milieu extérieur

- vecteur contrainte  $\mathbf{t}$

- forces de volume  $\mathbf{f}_v$



**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

Contraintes principales

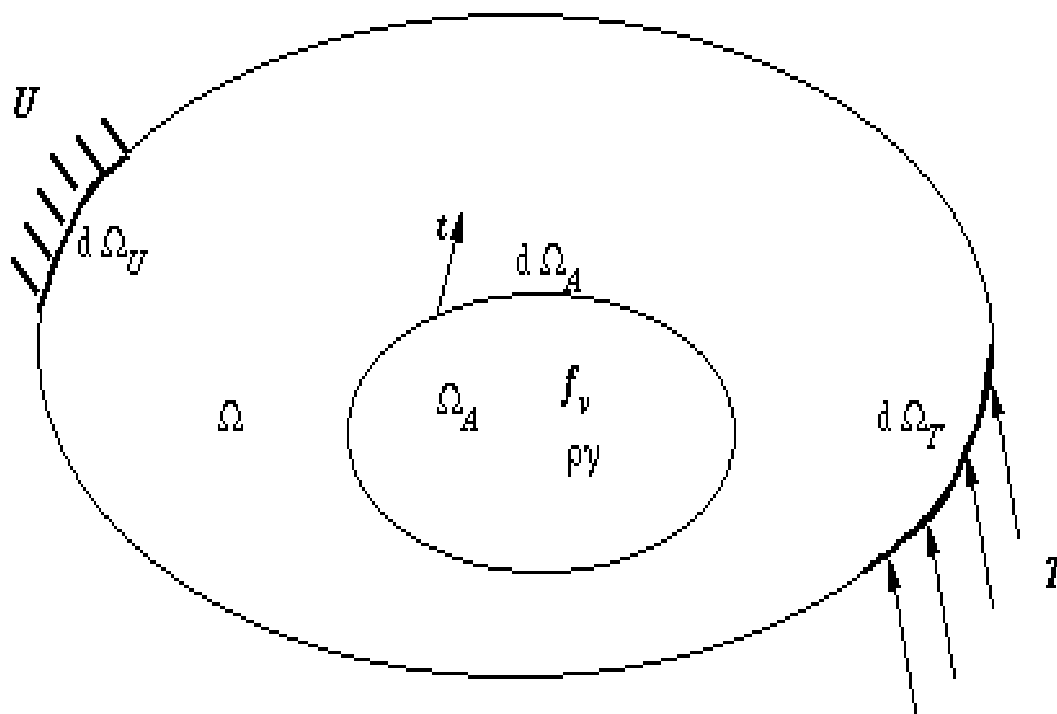
Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé

$$\int_{\partial \Omega_A} \mathbf{t} ds + \int_{\Omega_A} \mathbf{f}_v dv = \int_{\Omega_A} \rho \gamma dv$$



$$\int_{\Omega_A} (\mathit{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}_v) dv = \int_{\Omega_A} \rho \gamma dv \quad \mathit{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}_v = \rho \gamma$$



$$\int_{\partial \Omega_A} \mathbf{t} \wedge \mathbf{x} \, ds + \int_{\Omega_A} \mathbf{f}_v \wedge \mathbf{x} \, dv = \int_{\Omega_A} \rho \boldsymbol{\gamma} \wedge \mathbf{x} \, dv$$

**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

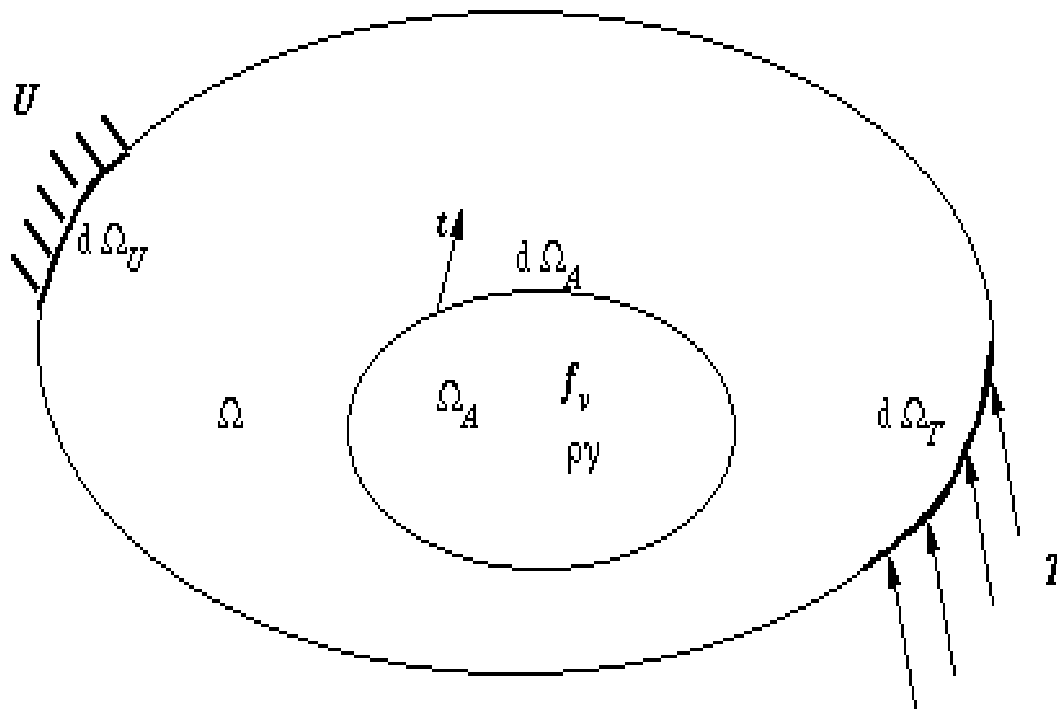
Contraintes principales

Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé



$$\int_{\Omega_A} (\cancel{\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}_v - \rho \boldsymbol{\gamma}}) \wedge \mathbf{x} \, dv + \int_{\Omega_A} (\cancel{\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^t}) \, dv = 0$$

équilibre des forces

symétrie du tenseur des contraintes



**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

**Contraintes principales**

Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé

$\sigma = \sigma^t$   Dans le repère « principal » :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

**Contraintes principales**



**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

Contraintes principales

**Contrainte moyenne et déviateur**

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé

contrainte moyenne :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} tr(\sigma)$$

déviateur des contraintes :

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{pmatrix}$$

symétrique  
de trace nulle



## CONTRAINTES

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

Contraintes principales

Contrainte moyenne et déviateur

**Contraintes équivalentes**

Bilan

Résumé

contrainte équivalente de von Mises :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}$$

contrainte équivalente de Tresca :

$$\bar{\sigma} = \text{Sup}(|\sigma_I - \sigma_{III}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_I - \sigma_{II}|)$$



**CONTRAINTES**

Cadre général

Tenseur des contraintes

Hypothèses de base

Théorème de l'action et de la réaction

Signification physique du vecteur contrainte

Différents tenseurs des contraintes

Signification physique des contraintes

Contraintes normale et tangentielle

Conditions aux limites en pression

Contraintes dans un repère orthonormé

Équations d'équilibre

Forces extérieures agissant sur un volume

Équilibre des forces

Équilibre des moments

Utilisation du tenseur des contraintes

Contraintes principales

Contrainte moyenne et déviateur

Contraintes équivalentes

Bilan

Résumé

# Contraintes

Hypothèse des petites perturbations

vecteur contrainte :  $\vec{t}(\vec{X}, \vec{n}, t)$

tenseur des contraintes :  
 $\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$  avec  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\vec{X}, t)$

équations d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + f_{vi} = \rho \gamma_i$$

conditions aux limites :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T} \text{ sur } \partial\Omega_T$$