



CINEMATIQUE

Cadre général

Equilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple

CINEMATIQUE



CINEMATIQUE

Cadre général

Equilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

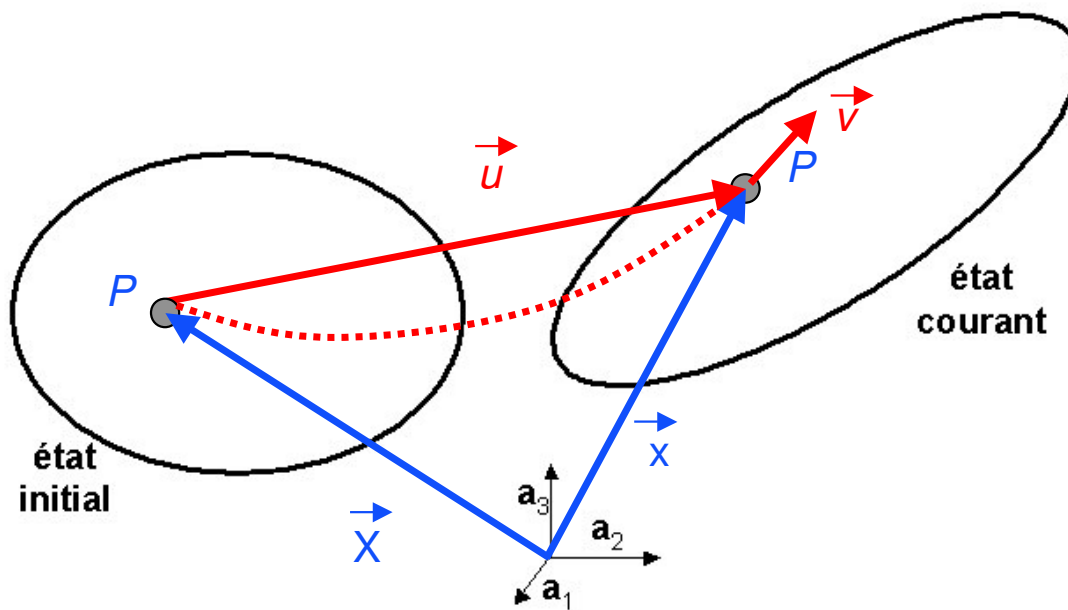
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



P : point « matériel »



CINEMATIQUE

Cadre général

Équilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

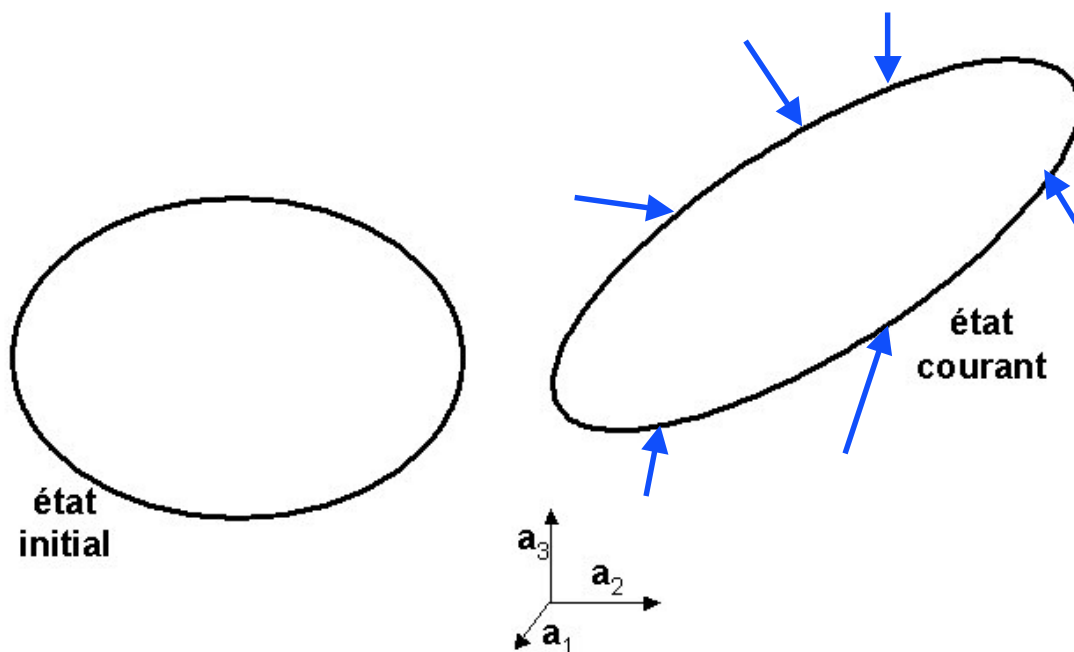
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



Le solide est en équilibre sous l'action des forces extérieures

- * Σ (forces extérieures) = variation de la quantité de mouvement
- * Σ (moments) = variation du moment de quantité de mouvement



CINEMATIQUE

Cadre général

Equilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

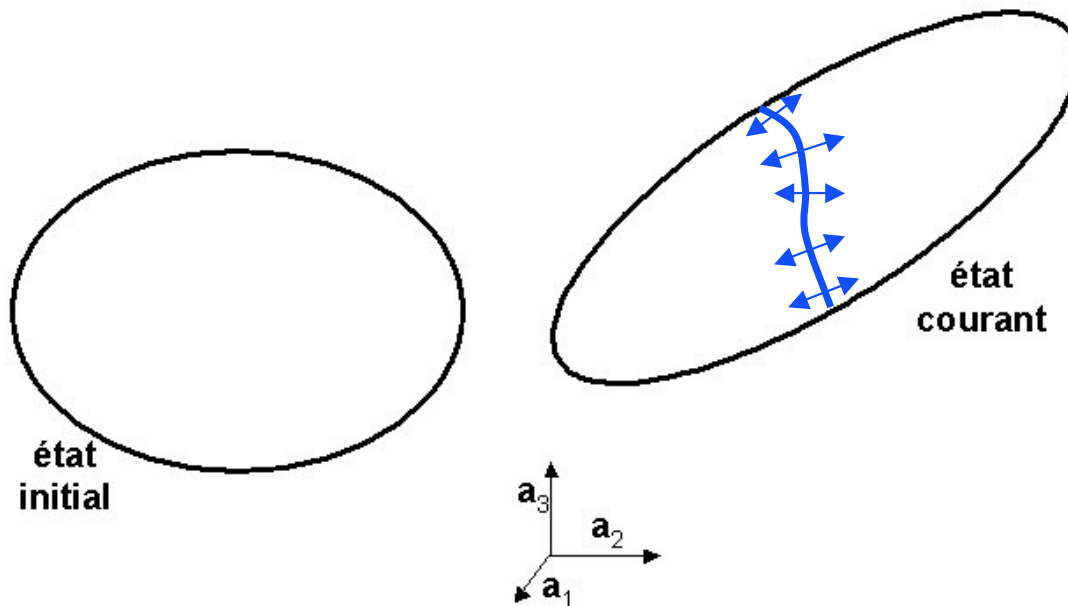
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



Des forces de cohésion assurent la continuité de la matière

* vision macroscopique

* « masse » d'un élément de volume : $dm = \rho dv$



CINEMATIQUE

Cadre général

Equilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

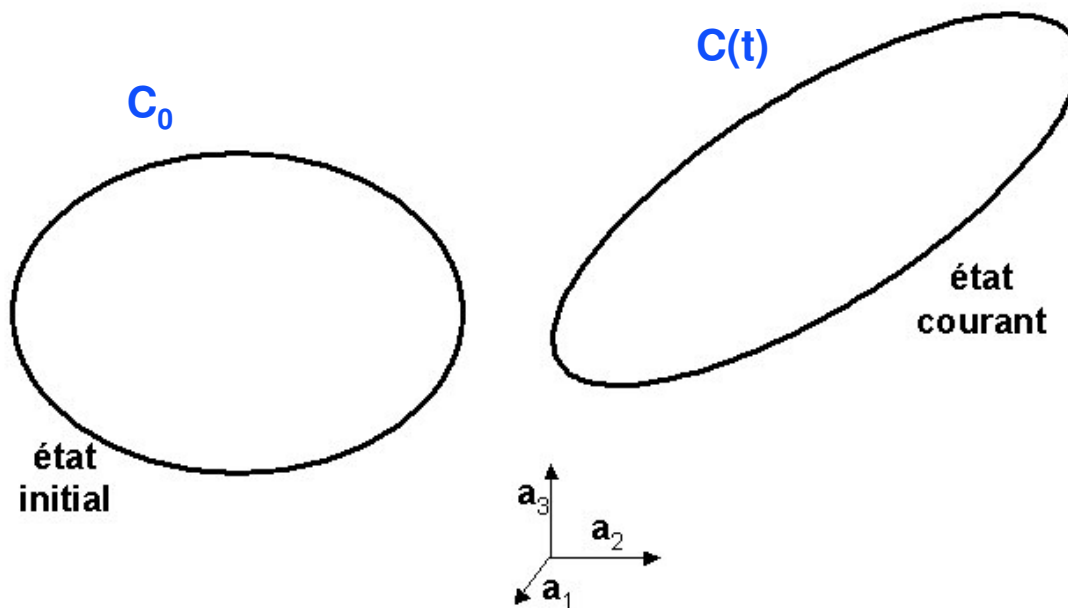
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



configuration de référence :

C_0 : description lagrangienne

$C(t)$: description eulérienne



CINEMATIQUE

Cadre général

Équilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

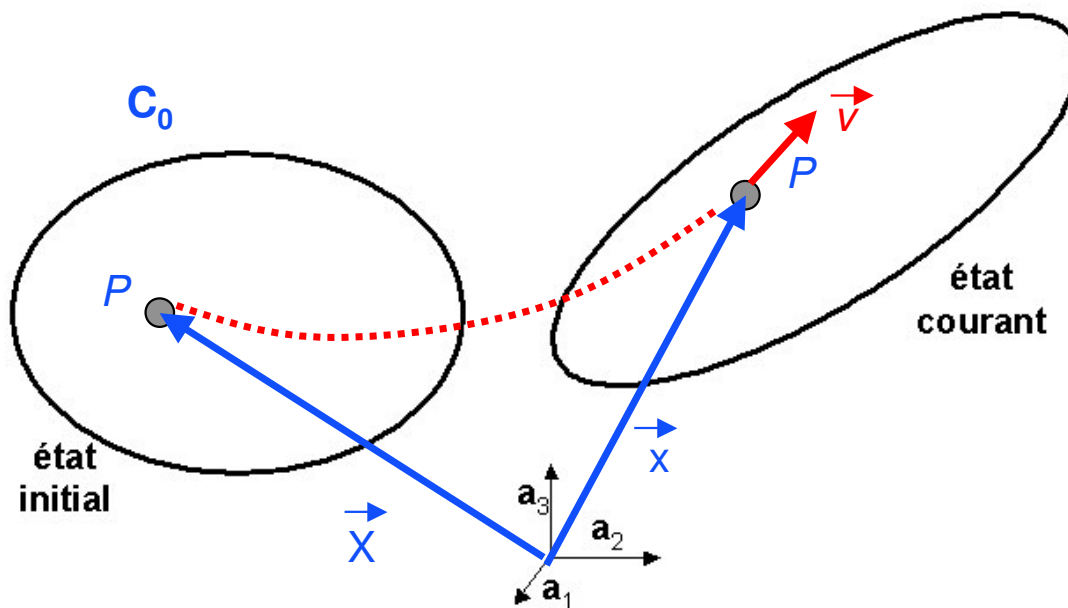
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



coordonnées d'un point : $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X}, t)$ avec $\vec{\Phi}(\vec{X}, 0) = \vec{X}$

vitesse d'un point : $\vec{v} = d\vec{x} / dt = \partial \vec{\Phi} / \partial t$



CINEMATIQUE

Cadre général

Equilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

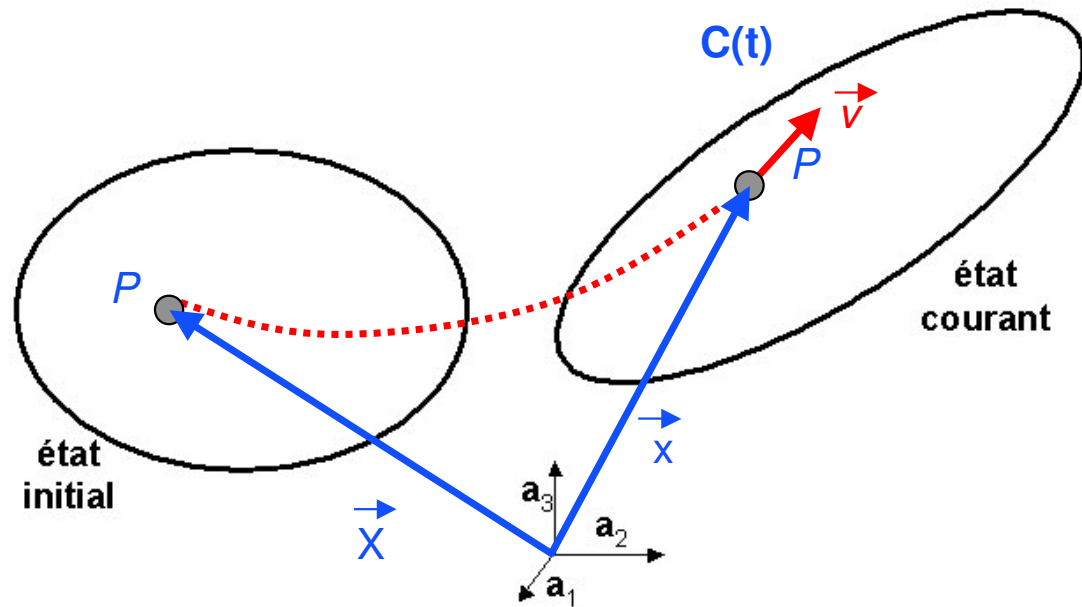
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



vitesse d'un point : $\vec{v}(\vec{x}, t)$

coordonnées d'un point : $\vec{x} = \vec{X}$ à $t=0$, puis $d\vec{x} = \vec{v}(\vec{x}, t)dt$



CINEMATIQUE

Cadre général

Equilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

Équations de bilan

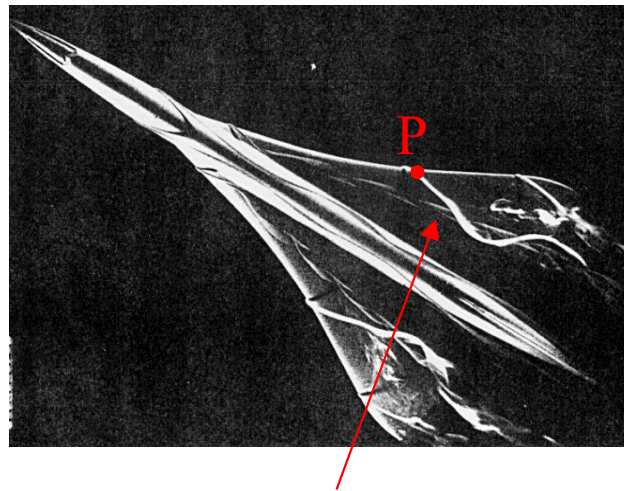
Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

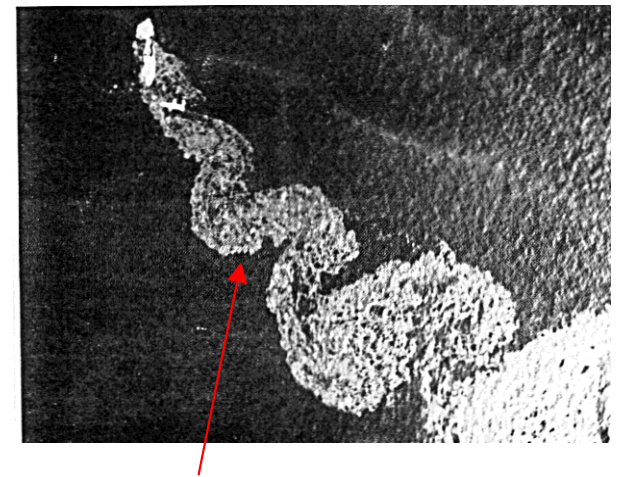
1 - Cisaillement simple

maquette du Concorde
(document ONERA)



ligne d'émission du point P

cargo échoué



trace produite sur la mer
(ligne d'émission du cargo)



CINEMATIQUE

Cadre général

Équilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

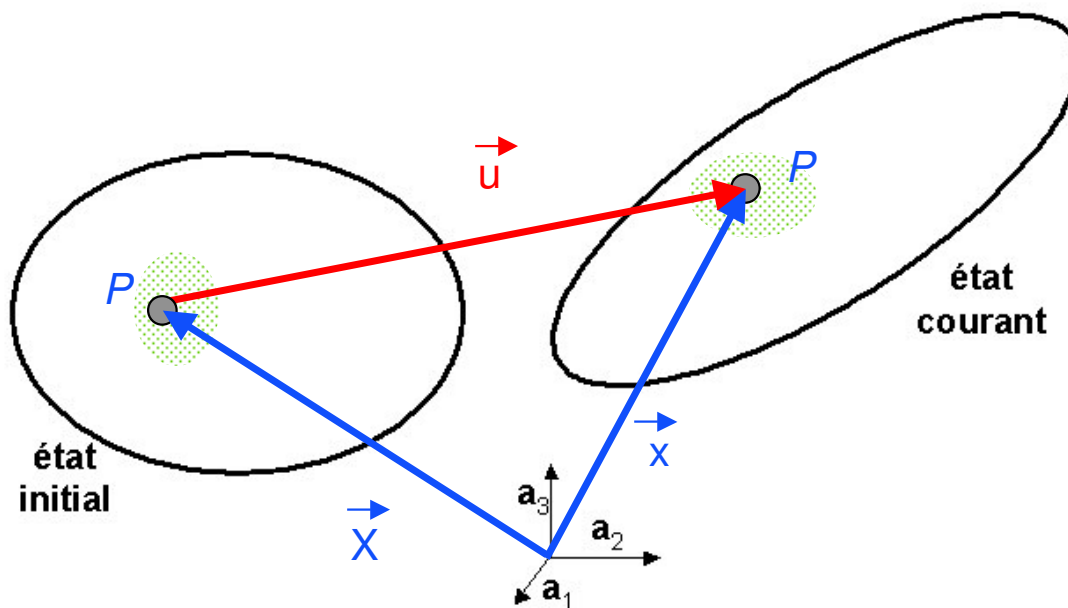
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



* déplacement du point P : $\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x} - \vec{X}$

* déplacement autour du point P : $\text{grad}(\vec{u}) = \text{grad}(\vec{x}) - I = \vec{F}(\vec{X}, t) - I$

tenseur gradient de la transformation



CINEMATIQUE

Cadre général

Équilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

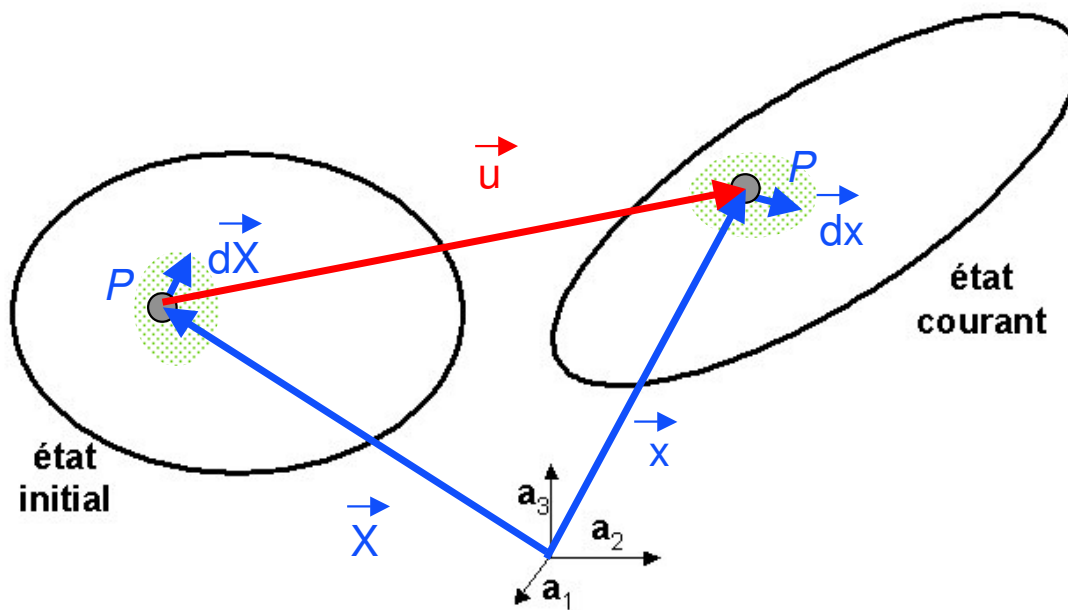
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u} \quad \Rightarrow \quad d\vec{x} = (I + \text{grad}(\vec{u})) \cdot d\vec{X} = F \cdot d\vec{X}$$



CINEMATIQUE

Cadre général

Equilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

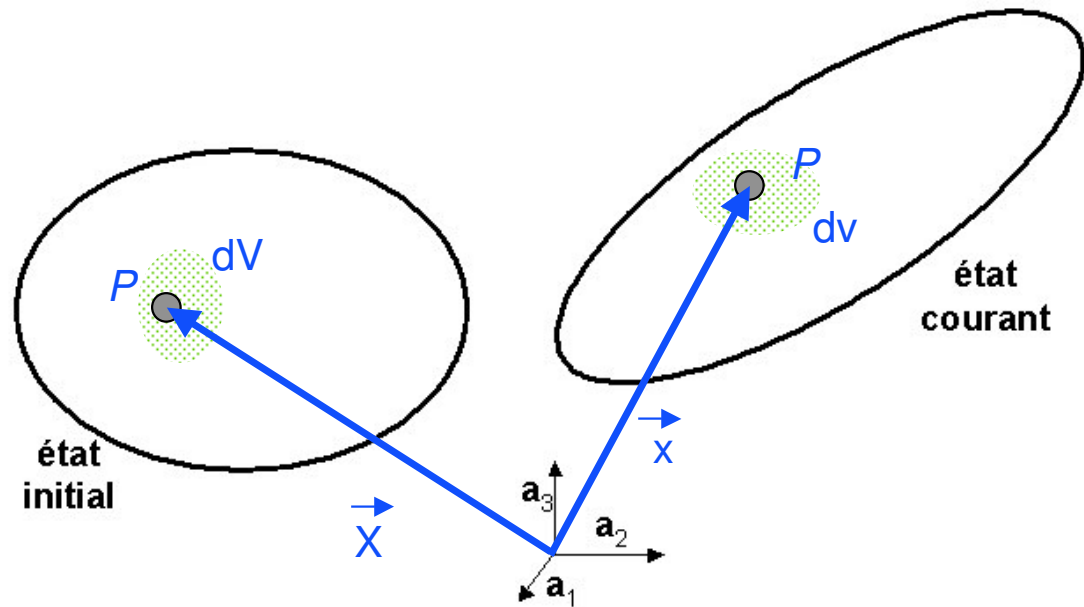
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



$$dV = [dX, dY, dZ]$$

$$dv = [dx, dy, dz] = [F \cdot dX, F \cdot dY, F \cdot dZ] = J dV \text{ avec } J = \det(F)$$



CINEMATIQUE

Cadre général

Équilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

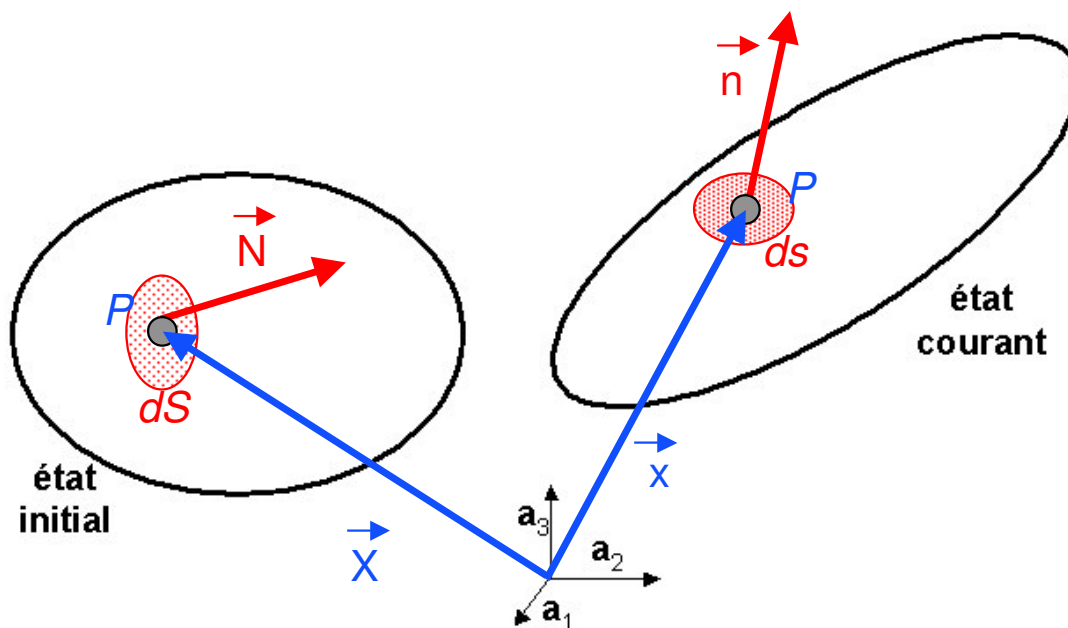
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



$$\vec{dS} = N dS \text{ et } dV = dS \cdot dZ$$

$$\vec{ds} = n ds \text{ et } dv = ds \cdot dz = J dV, \text{ avec } dz = F \cdot dZ$$

$$\vec{ds} = J(F^{-1})^t \cdot \vec{dS} \text{ avec } J = \det(F)$$



CINEMATIQUE

Cadre général

Équilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

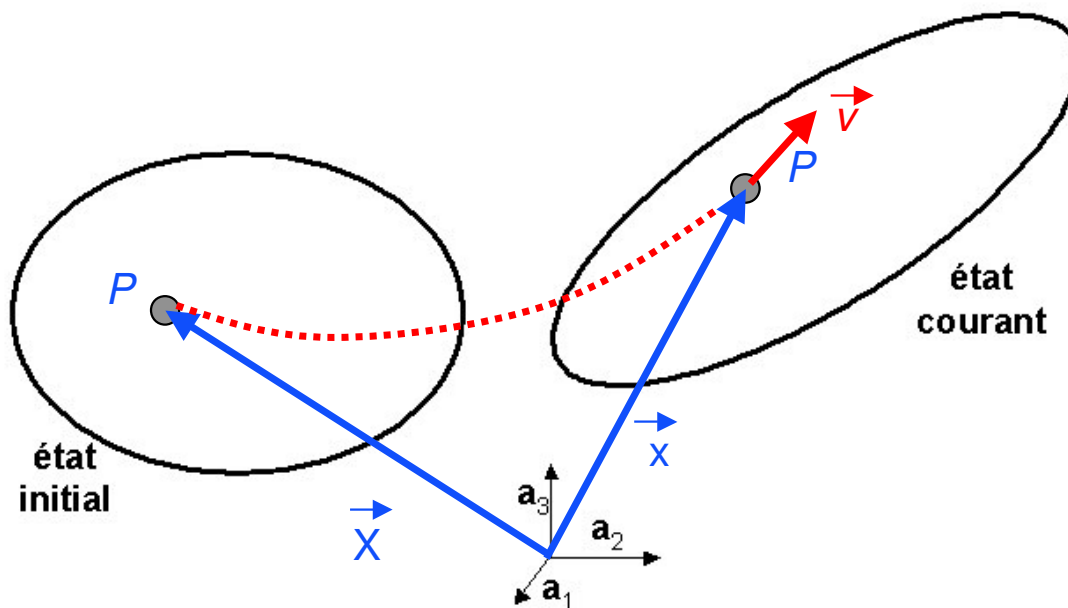
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



Évolution d'une grandeur physique « $f(\vec{x}, t)$ » au cours du temps ?

$$df / dt = \partial f / \partial t + \partial f / \partial x_i \cdot dx_i / dt = \partial f / \partial t + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}(f)$$



CINEMATIQUE

Cadre général

Equilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

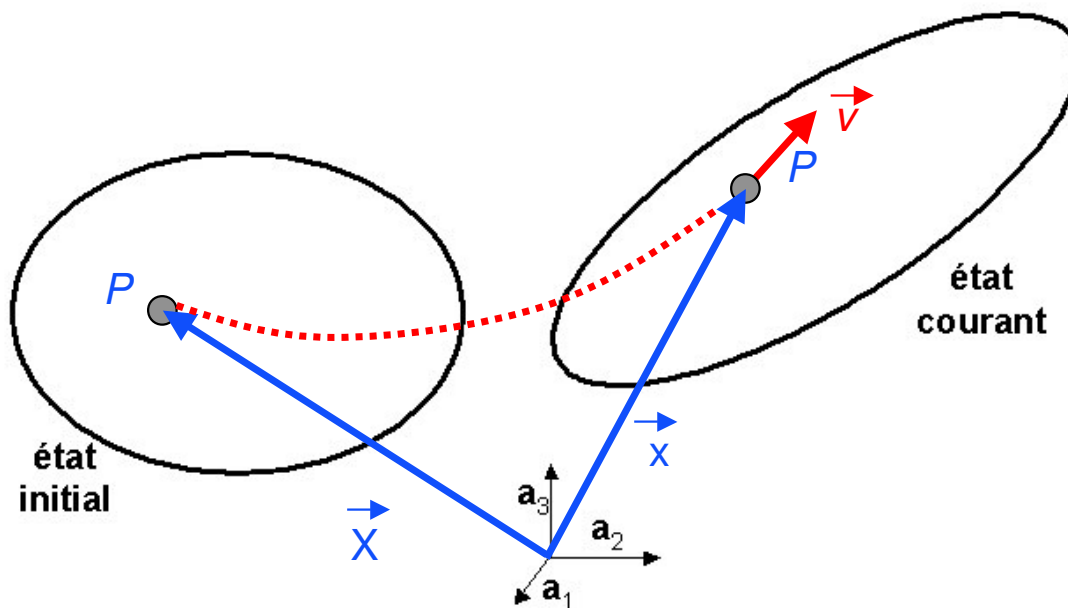
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



$$m = \int dm = \int \rho dv = \text{cste} \implies \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$



CINEMATIQUE

Cadre général

Équilibre et continuité

Équilibre d'un solide

Continuité de la matière

Description d'une transformation

Configuration

Description lagrangienne

Description eulérienne

Ligne d'émission

Transport de quantités

Tenseur gradient d'une transformation

Transport d'un vecteur élémentaire

Transport d'un volume élémentaire

Transport d'une surface élémentaire

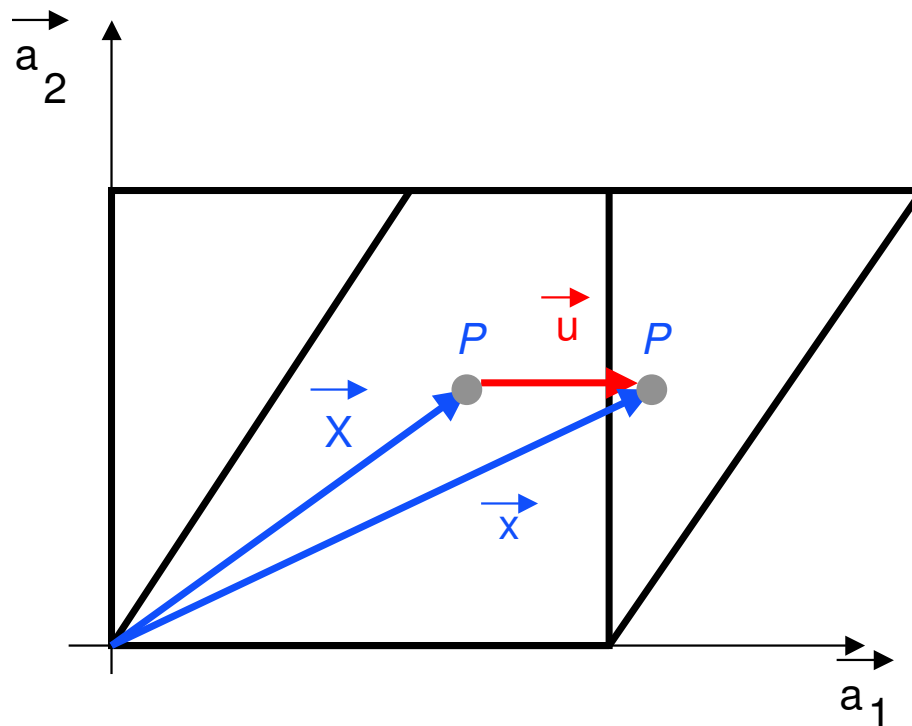
Équations de bilan

Dérivées particulières

Conservation de la masse

Exemples

1 - Cisaillement simple



Description lagrangienne :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 2\alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Description eulérienne :

$$\begin{cases} v_1 = 2\alpha x_2 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$