



METHODES SEMI-INVERSES

Résumé

Inconnues et équations

Équations de base

Approches en déplacements et en contraintes

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Le tube sous pression

Géométrie et cinématique

Contraintes et déformations

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Conditions aux limites

Résultats

METHODES SEMI-INVERSES



METHODES SEMI-INVERSES

Résumé

Inconnues et équations

Équations de base

Approches en déplacements et en contraintes

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Le tube sous pression

Géométrie et cinématique

Contraintes et déformations

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Conditions aux limites

Résultats

Déformations	Contraintes
Hypothèse des petites perturbations	Hypothèse des petites perturbations
vecteur déplacement : $\vec{u}(\vec{X}, t)$	vecteur contrainte : $\vec{t}(\vec{X}, \vec{n}, t)$
tenseur des déformations : $\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad}(\vec{u}) + \text{grad}(\vec{u})^t)$	tenseur des contraintes : $\vec{t} = \underline{\sigma} \cdot \vec{n}$ avec $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\vec{X}, t)$
équations de compatibilité : $\epsilon_{ki,jl} + \epsilon_{lj,ik} = \epsilon_{kj,il} + \epsilon_{li,jk}$	équations d'équilibre : $\sigma_{ij,j} + f_{vi} = \rho \gamma_i$
conditions aux limites : $\vec{u} = \vec{U}$ sur $\partial\Omega_u$	conditions aux limites : $\underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}$ sur $\partial\Omega_T$

Loi de comportement :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \text{tr}(\underline{\epsilon}) \delta_{ij}$$



METHODES SEMI-INVERSES

Résumé

Inconnues et équations

Équations de base

Approches en déplacements et en contraintes

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Le tube sous pression

Géométrie et cinématique

Contraintes et déformations

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Conditions aux limites

Résultats

Déformations

Contraintes

Hypothèse des petites perturbations

Hypothèse des petites perturbations

vecteur déplacement $\vec{u}(\vec{X}, t)$

vecteur contrainte : $\vec{t}(\vec{X}, \vec{n}, t)$

tenseur des déformations :

tenseur des contraintes :

$\epsilon = 1/2 (\text{grad}(\vec{u}) + \text{grad}(\vec{u})^t)$

$\vec{t} = \sigma \cdot \vec{n}$ avec $\sigma = \sigma(\vec{X}, t)$

équations de compatibilité :

équations d'équilibre :

$\epsilon_{kjl} + \epsilon_{lj,ik} = \epsilon_{kj,l} + \epsilon_{li,jk}$

$\sigma_{ij,j} + f_{vi} = \rho \gamma_i$

conditions aux limites :

conditions aux limites :

$\vec{u} = \vec{U}$ sur $\partial\Omega_u$

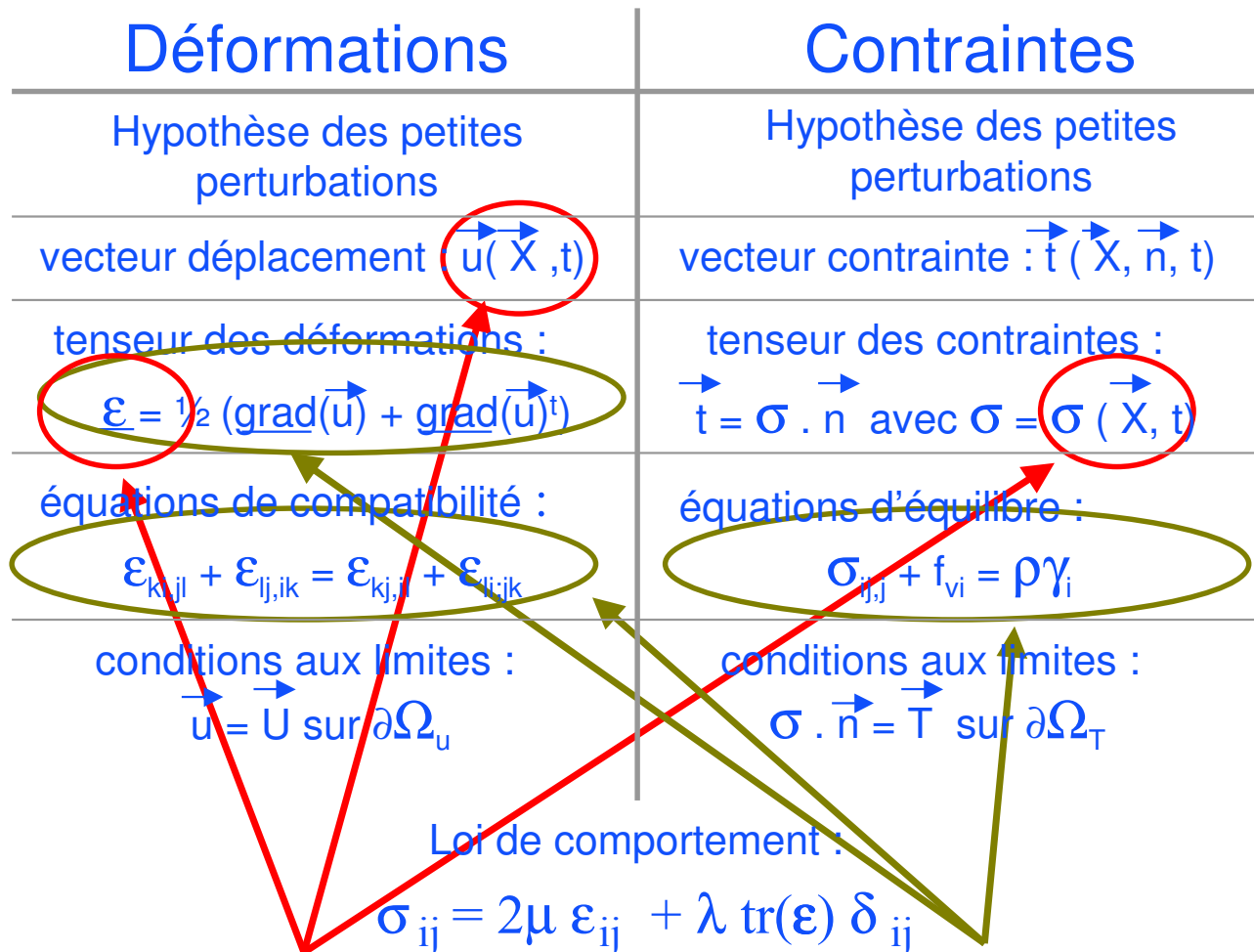
$\sigma \cdot \vec{n} = \vec{T}$ sur $\partial\Omega_T$

Loi de comportement :

$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \text{tr}(\epsilon) \delta_{ij}$

15 inconnues (champs)

15 équations (EDP)





METHODES SEMI-INVERSES

- Résumé
- Inconnues et équations
- Équations de base
- Approches en déplacements et en contraintes
- Résolution en déplacements
- Résolution en contraintes
- Le tube sous pression
- Géométrie et cinématique
- Contraintes et déformations
- Résolution en déplacements
- Résolution en contraintes
- Conditions aux limites
- Résultats

Déformations	Contraintes
Hypothèse des petites perturbations	Hypothèse des petites perturbations
vecteur déplacement $\vec{u}(\vec{X}, t)$	vecteur contrainte : $\vec{t}(\vec{X}, \vec{n}, t)$
tenseur des déformations : $\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}}(\vec{u}) + \underline{\text{grad}}(\vec{u})^t)$	tenseur des contraintes : $\vec{t} = \underline{\sigma} \cdot \vec{n}$ avec $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\vec{X}, t)$
équations de compatibilité : $\epsilon_{ki,jl} + \epsilon_{lj,ik} = \epsilon_{kj,il} + \epsilon_{li,jk}$	équations d'équilibre : $\sigma_{ij,j} + f_{vi} = \rho \gamma_i$
conditions aux limites : $\vec{u} = \vec{U}$ sur $\partial\Omega_u$	conditions aux limites : $\underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}$ sur $\partial\Omega_T$

Loi de comportement :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \text{tr}(\underline{\epsilon}) \delta_{ij}$$

Approche en déplacements

Approche en contraintes



METHODES SEMI-INVERSEES

Résumé

Inconnues et équations

Équations de base

Approches en déplacements et en contraintes

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Le tube sous pression

Géométrie et cinématique

Contraintes et déformations

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Conditions aux limites

Résultats

équations d'équilibre (en statique) :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}_v = 0$$

utilisation de la loi de comportement et de la définition des déformations :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mu \mathbf{div}(\mathbf{grad}(\mathbf{u}) + \mathbf{grad}(\mathbf{u})^t) + \lambda \mathbf{div}(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I})$$



$$\mu \Delta(\mathbf{u}) + (\lambda + \mu) \mathbf{grad}(\text{div}(\mathbf{u})) + \mathbf{f}_v = 0$$

déformation pure ($\mathbf{u} = \mathbf{grad}(\phi)$) :

$$(\lambda + 2\mu) \Delta(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_v = 0$$

matériau incompressible ($\text{div}(\mathbf{u}) = 0$) :

$$\mu \Delta(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_v = 0$$

thermo-élasticité linéaire (gradients thermiques) :

$$\mathbf{f}_v \rightarrow \mathbf{f}_v - (3\lambda + 2\mu) \alpha \mathbf{grad}(\Delta t)$$



METHODES SEMI-INVERSES

Résumé

Inconnues et équations

Équations de base

Approches en déplacements et en contraintes

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Le tube sous pression

Géométrie et cinématique

Contraintes et déformations

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Conditions aux limites

Résultats

équations de compatibilité :

$$\Delta(\boldsymbol{\varepsilon}) + \text{grad}(\text{grad}(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))) = \text{grad}(\text{div}(\boldsymbol{\varepsilon})) + \text{grad}(\text{div}(\boldsymbol{\varepsilon}))^t$$

loi de comportement :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}$$



$$\Delta(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \text{grad}(\text{grad}(\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}))) + \text{grad}(\mathbf{f}_v) + \text{grad}(\mathbf{f}_v)^t - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \text{div}(\mathbf{f}_v) \mathbf{I} = 0$$

forces volumiques homogènes (indépendantes de \mathbf{X}) :

$$\Delta(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \text{grad}(\text{grad}(\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}))) = 0$$



METHODES SEMI-INVERSE

Résumé

Inconnues et équations

Équations de base

Approches en déplacements et en contraintes

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Le tube sous pression

Géométrie et cinématique

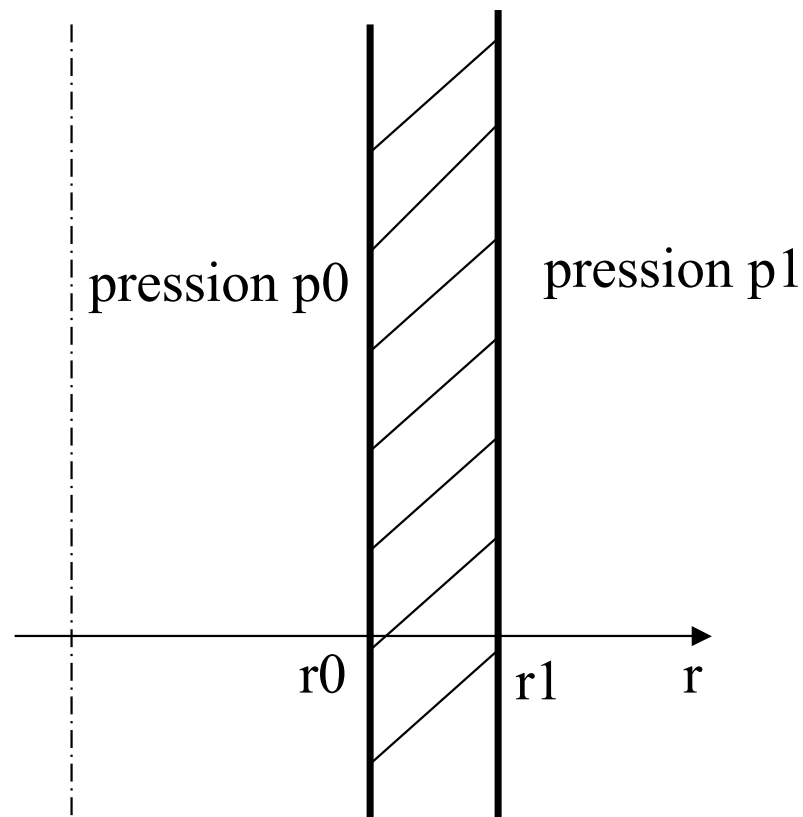
Contraintes et déformations

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Conditions aux limites

Résultats



coordonnées cylindriques : $\vec{u}(r, \theta, z) = \begin{cases} u(r) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$



METHODES SEMI-INVERSES

Résumé

Inconnues et équations

Équations de base

Approches en déplacements et en contraintes

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Le tube sous pression

Géométrie et cinématique

Contraintes et déformations

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Conditions aux limites

Résultats

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} u' & 0 & 0 \\ 0 & u/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gradient en coordonnées
cylindriques !!!

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)u'+\lambda u/r & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+2\mu)u/r+\lambda u' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda u/r+\lambda u' \end{pmatrix}$$



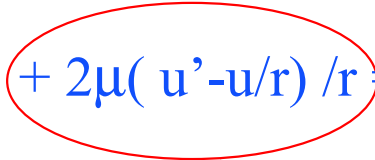
METHODES SEMI-INVERSES

- Résumé
- Inconnues et équations
- Équations de base
- Approches en déplacements et en contraintes
- Résolution en déplacements
- Résolution en contraintes
- Le tube sous pression
- Géométrie et cinématique
- Contraintes et déformations
- Résolution en déplacements
- Résolution en contraintes
- Conditions aux limites
- Résultats

$$\vec{\text{div}}(\underline{\sigma}) = \vec{0}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} ((\lambda+2\mu)u' + \lambda u/r)' + 2\mu(u' - u/r)/r = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$



divergence en coordonnées cylindriques !!



$$u'' + u'/r - u/r^2 = 0$$



$$u = ar + b/r$$



METHODES SEMI-INVERSES

Résumé

Inconnues et équations

Équations de base

Approches en déplacements et en contraintes

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Le tube sous pression

Géométrie et cinématique

Contraintes et déformations

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Conditions aux limites

Résultats

$\Delta(\underline{\sigma})$ et $\text{grad}(\overrightarrow{\text{grad}}(\text{tr}(\underline{\sigma})))$? Expressions très complexes en coordonnées cylindriques !!

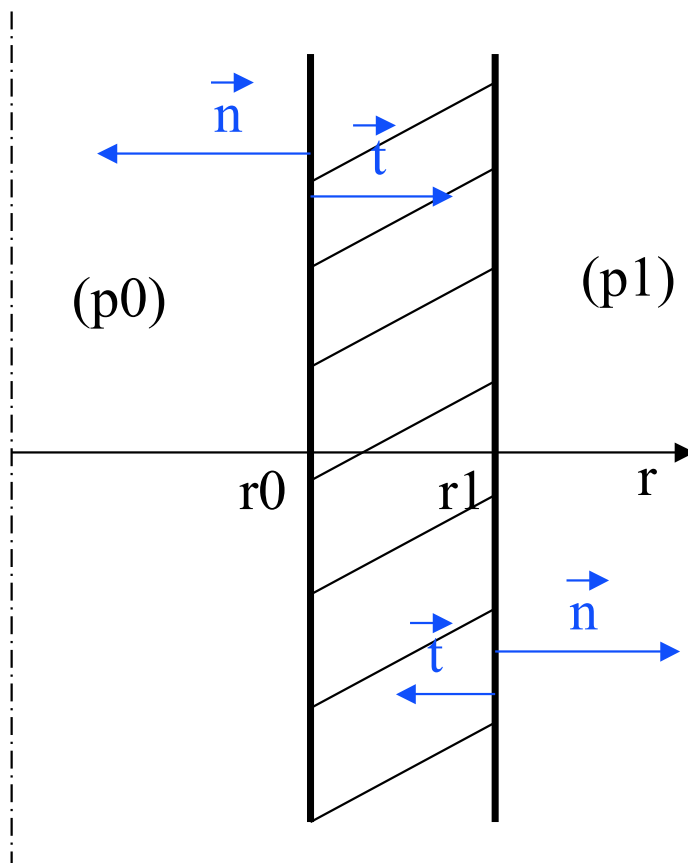
➔ On estime $\underline{\sigma}$ en fonction du champ de déplacements : $u = ar + b/r$:

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu)a - 2\mu b/r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda + \mu)a + 2\mu b/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda a \end{pmatrix}$$



METHODES SEMI-INVERSES

- Résumé
- Inconnues et équations
- Équations de base
- Approches en déplacements et en contraintes
- Résolution en déplacements
- Résolution en contraintes
- Le tube sous pression
- Géométrie et cinématique
- Contraintes et déformations
- Résolution en déplacements
- Résolution en contraintes
- Conditions aux limites
- Résultats



face interne ($r = r_0$) : $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{t} = \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\sigma \cdot \vec{n} = \vec{t}$

$\rightarrow -\sigma_{rr}(r=r_0) = p_0$
 $\rightarrow 2(\lambda + \mu)a - 2\mu b/r_0^2 = -p_0$

face externe ($r = r_1$) : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{t} = \begin{pmatrix} -p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\sigma \cdot \vec{n} = \vec{t}$

$\rightarrow \sigma_{rr}(r=r_1) = -p_1$
 $\rightarrow 2(\lambda + \mu)a - 2\mu b/r_1^2 = -p_1$



METHODES SEMI-INVERSES

Résumé

Inconnues et équations

Équations de base

Approches en déplacements et en contraintes

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Le tube sous pression

Géométrie et cinématique

Contraintes et déformations

Résolution en déplacements

Résolution en contraintes

Conditions aux limites

Résultats

$$2(\lambda+\mu)a - 2\mu b/r_0^2 = -p_0$$

$$2(\lambda+\mu)a - 2\mu b/r_1^2 = -p_1$$

(p1=0)

→ $\sigma = p_0 \frac{r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{r_1^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{r_1^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{pmatrix}$$

→ $\bar{\sigma}_T = 2p_0 \frac{r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \frac{r_1^2}{r^2}$

