MÉTHODES ANALYTIQUES

1 Bilan

1.1 Nombre d'inconnues, nombre d'équations

En élasticité linéaire, et dans l'hypothèse des petites perturbations, le nombre d'inconnues dans un problème de mécanique des milieux continus est égal à 15. En effet, l'objectif est de déterminer en chaque point du solide le vecteur déplacement $\overrightarrow{u}$ (trois composantes), le tenseur des déformations $\underline{\epsilon}$ (six composantes indépendantes) et le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ (six composantes indépendantes).

Pour résoudre un tel problème, nous devons donc disposer de 15 équations. Ces équations sont les trois équations d'équilibre :

$$\overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) + \overrightarrow{f}_v = 0 \tag{1}$$

les six équations de compatibilité des déformations (qui assurent que les déformations dérivent d'un champ de déplacement sous la forme $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ obtenues par le système :

$$\underline{\Delta}(\underline{\epsilon}) + \underline{grad}(\overrightarrow{grad}(tr(\underline{\epsilon}))) = \underline{grad}(\overrightarrow{div}(\underline{\epsilon})) + \underline{grad}(\overrightarrow{div}(\underline{\epsilon}))^t \tag{2}$$

et les six équations de comportement reliant les contraintes aux déformations sous la forme :

$$\underline{\sigma} = 2\mu\underline{\epsilon} + \lambda tr(\underline{\epsilon})\underline{I} \tag{3}$$

où le tenseur $\underline{I}$ représente le tenseur identité.

On constate que les équations sont en fait des équations différentielles. Leur intégration se fera donc à une constante près, qui sera déterminée à l'aide des conditions aux limites en pression ou en déplacement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{U} \text{ sur } \partial\Omega_U \\ \overrightarrow{t} = \underline{\sigma}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{T} \text{ sur } \partial\Omega_T \end{array} \right. \tag{4}$$

1.2 Méthodes de résolution

Il existe beaucoup de méthodes de résolution des équations précédentes. Toutefois, les méthodes dites "semi-inverses" présentent l'avantage de fournir des expressions analytiques pour les champs de déplacement, de déformations et de contraintes dans le solide. Ce chapitre est consacré aux méthodes semi-inverses, dans le cas de matériaux homogènes, au comportement élastique linéaire et isotrope. De plus, nous négligerons les effets d'accélération (résolution statique). En effet, ces hypothèses permettent de mettre en place des équations relativement simples à résoudre.

Il existe existe deux grandes méthodes de résolution semi-inverse de ce type de problèmes. La première, dite "résolution en déplacements", consiste à écrire toutes les conditions que doivent satisfaire les déplacements dans la structure, pour en déduire une solution. La seconde, dite "résolution en contraintes", consiste à écrire ces équations à l'aide du tenseur des contraintes.

2 Résolution en déplacements

2.1 Équations de Lamé-Clapeyron

Lorsque l'on souhaite obtenir un champ de déplacements dans le matériau, on traite un problème à trois inconnues (les trois déplacements dans les trois directions). Pour cela, on dispose de trois équations, qui sont les équations d'équilibre que l'on va formuler en déplacements en utilisant la loi de comportement et le définition des déformations. En effet, le champ de déformation que l'on déduira du champ de déplacement respectera par définition les six équations de compatibilité. L'ensemble des équations précédentes nous permet d'exprimer la divergence de l'état de contrainte sous la forme :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) &= \mu(\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{div}(\underline{grad}(\overrightarrow{u})^t)) + \lambda\overrightarrow{div}(tr(\underline{\epsilon})\underline{I}) \\ &= \mu\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) + (\lambda+\mu)\overrightarrow{grad}(div(\overrightarrow{u}))\end{aligned} \tag{5}$$

La résolution en déplacements d'un problème de mécanique des milieux continus se fait donc à l'aide des trois équations différentielles dites de "Lamé-Clapeyron" ou de "Navier" :

$$\mu\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) + (\lambda+\mu)\overrightarrow{grad}(div(\overrightarrow{u})) + \overrightarrow{f}_v = \overrightarrow{0} \tag{6}$$

La résolution de ces équations est surtout pratique lorsque les conditions aux limites (qui servent à déterminer les constantes d'intégration) sont exprimées en déplacement. Si des conditions sont exprimées en contraintes, alors il faut calculer le tenseur des contraintes à partir du champ de déplacements, puis appliquer ces conditions pour déterminer les constantes.

2.2 Cas particuliers

2.2.1 Déformation pure

Dans le cas d'une déformation pure (pas de rotation de corps solide), le champ de déplacements dérive d'un potentiel ϕ sous la forme $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{grad}(\phi)$, de sorte que les équations de Lamé-Clapeyron peuvent s'écrire sous forme suivante :

$$(\lambda+2\mu)\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{f}_v = \overrightarrow{0} \tag{7}$$

En l'absence de forces volumiques, le champ de déplacements correspondant à une déformation pure est une fonction harmonique, c'est-à-dire qui vérifie la condition :

$$\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \tag{8}$$

2.2.2 Matériau incompressible

Dans le cas d'un matériau incompressible ($tr(\underline{\epsilon}) = div(\overrightarrow{u}) = 0$), les équations de Lamé-Clapeyron se réduisent à :

$$\mu\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{f}_v = \overrightarrow{0} \tag{9}$$

En l'absence de forces volumiques, le champ de déplacements correspondant à un matériau incompressible est également une fonction harmonique.

2.2.3 Thermo-élasticité linéaire

Dans le cas où la température intervient, les relations entre les contraintes et les déformations sont modifiées (voir chapitre sur l'élasticité). Il s'en suit que les équations de Lamé-Clapeyron deviennent :

$$\mu\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) + (\lambda+\mu)\overrightarrow{grad}(div(\overrightarrow{u}))] + \overrightarrow{f}_v - (3\lambda+2\mu)\alpha\overrightarrow{grad}(\Delta T) = \overrightarrow{0} \tag{10}$$

3 Résolution en contraintes

3.1 Équations de Beltrami-Michell

Lorsque seules des conditions aux limites en contraintes existent, il peut être intéressant de résoudre le problème en utilisant les six composantes indépendantes du tenseur des contraintes comme inconnues. Il faut alors disposer de six équations, qui sont obtenues en écrivant que les déformations obtenues par la loi de comportement respectent les équations de compatibilité. Les équations d'équilibre sont donc ici simplement utilisées pour simplifier les équations de compatibilité exprimées en contraintes. Ces équations s'écrivent tout d'abord globalement sous la forme suivante, en notant Σ le scalaire représentant la trace du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} & \underline{\Delta}(\underline{\sigma}) + \underline{grad}(\overrightarrow{grad}(\Sigma)) - \underline{grad}(\overrightarrow{div}(\underline{\sigma})) - \underline{grad}(\overrightarrow{div}(\underline{\sigma}))^t \\ - & \tfrac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(\Delta(\Sigma)\underline{I} - \underline{grad}(\overrightarrow{grad}(\Sigma))) = \underline{0} \end{aligned} \tag{11}$$

On remarque que l'expression à annuler dans l'équation précédente est un tenseur d'ordre 2 symétrique. Il n'y a donc que six équations indépendantes. En utilisant les équations d'équilibre, on peut écrire cette équation sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \underline{\Delta}(\underline{\sigma})) + \tfrac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\underline{grad}(\overrightarrow{grad}(\Sigma)) \\ + \quad & (\underline{grad}(\overrightarrow{f}_v) + \underline{grad}(\overrightarrow{f}_v)^t) - \tfrac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\Delta(\Sigma)\underline{I} = \underline{0} \end{aligned} \tag{12}$$

Une simplification est encore possible à l'aide des équations d'équilibre, en utilisant la relation scalaire issue des équations de compatibilité et la loi de comportement. On obtient alors :

$$div(\overrightarrow{f}_v) = \frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\Delta(\Sigma) \tag{13}$$

Ceci conduit aux équations dites de "Beltrami-Michell", qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} & \underline{\Delta}(\underline{\sigma}) + \tfrac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\underline{grad}(\overrightarrow{grad}(\Sigma)) \\ + \quad & \underline{grad}(\overrightarrow{f}_v) + \underline{grad}(\overrightarrow{f}_v)^t - \tfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}div(\overrightarrow{f}_v)\underline{I} = \underline{0} \end{aligned} \tag{14}$$

Ce système d'équations différentielles permet d'obtenir le champ de contraintes, à des constantes près qu'il faut déterminer en utilisant les conditions aux limites en pression. Toutefois, il est difficile ici d'introduire les conditions aux limites en déplacements, car le champ de déplacements n'est pas obtenu directement à partir du champ de contraintes. Il faut pour cela intégrer les déformations. Pour cette raison, la résolution en contraintes est moins utilisée que celle en déplacements.

3.2 Cas particuliers

3.2.1 Forces massiques homogènes

Dans le cas de forces massiques homogènes, leur gradient et leur divergence sont nuls, ce qui annule le terme en forces volumiques dans les équations de Beltrami-Michell, qui deviennent :

$$\underline{\Delta}(\underline{\sigma}) + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\underline{grad}(\overrightarrow{grad}(\Sigma)) = \underline{0} \tag{15}$$

De plus, appliquant l'opérateur laplacien à l'équation précédente, on fait apparaître le laplacien de Σ, qui est nul car il dépend uniquement de la divergence des forces volumiques. On en déduit que le tenseur des contraintes est dans ce cas "bi-harmonique", c'est-à-dire qu'il satisfait la condition $\underline{\Delta}(\underline{\Delta}(\underline{\sigma})) = \underline{0}$.

3.2.2 Utilisation pratique

Lorsque le problème possède des conditions aux limites en déplacements, celles-ci sont difficiles à introduire. En effet, le champ de déplacements n'est pas obtenu directement à partir du champ de contraintes. Il faut pour cela intégrer les déformations. Pour cette raison, la résolution en contraintes est moins utilisée que celle en déplacements.