

# MÉTHODES ANALYTIQUES - EXERCICES

## Disque de turbomachine

Nous souhaitons dimensionner un disque de compresseur de turbomachine en régime permanent (vitesse de rotation angulaire constante  $\omega$ , figure 1). Pour cela, nous travaillons en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Le matériau est supposé élastique linéaire, isotrope, avec les constantes d'élasticité  $\lambda$  et  $\mu$  (coefficients de Lamé) et une masse volumique  $\rho$ . Pour simplifier les calculs, le champ de déplacements  $(u, v, w)$  dans le disque est supposé de la forme  $u = u(r)$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ . On néglige donc la réduction d'épaisseur du disque.

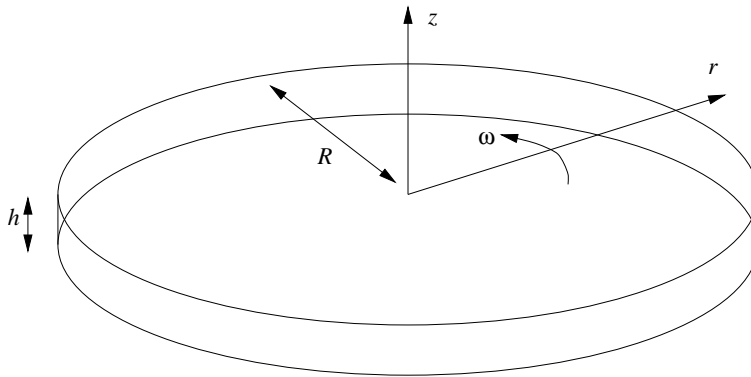


FIG. 1 – Schématisation du problème

- Donner l'expression des tenseurs des déformations et des contraintes
- Écrire l'équilibre du disque en fonction du champ de déplacements
- Montrer qu'un champ du type  $u(r) = ar^3 + br$  les satisfait, et déterminer les constantes  $a$  et  $b$

- En utilisant la contrainte équivalente de Tresca, et en notant  $\sigma_0$  sa valeur limite (avant plastification), déterminer le rayon maximal admissible du disque
- Parmi les matériaux proposés ci-dessous, sélectionner celui ou ceux permettant un fonctionnement à une vitesse de  $50000tr/mn$  avec un rayon de  $160mm$ .

matériau	$\rho(kg/m^3)$	$\nu$	$\sigma_0(MPa)$
INCO625	7800	0,3	900
TA6V	5500	0,34	700
Al 7075	2800	0,32	500

## Tenue mécanique d'un bouchon

Nous souhaitons étudier la tenue mécanique d'un bouchon cylindrique introduit dans une bouteille supposée infiniment rigide. Pour cela, nous utilisons la schématisation de la figure 2 et nous travaillons en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Le matériau constituant le bouchon est supposé élastique linéaire, isotrope, avec les constantes d'élasticité  $\lambda$  et  $\mu$  (coefficients de Lamé). Le champ de déplacements  $(u, v, w)$  dans le bouchon est supposé de la forme  $u = u(r)$ ,  $v = 0$ ,  $w = w(r, z)$ .

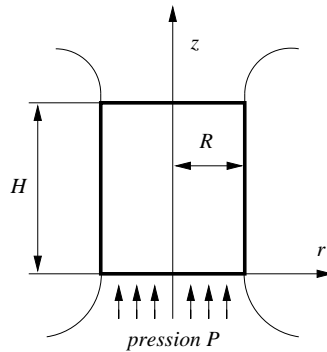


FIG. 2 – Schématisation du problème

- Exprimer le tenseur des déformations  $\underline{\epsilon}$ , le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$ , et les équations d'équilibre du bouchon, en fonction des déplacements  $(u, v, w)$  et de leurs dérivées partielles (non nulles). Montrer qu'un champ

de déplacements de la forme suivante (où  $A, B, C, D$  sont des constantes) satisfait ces équations d'équilibre :

$$\begin{cases} u = A \frac{r}{R} \\ v = 0 \\ w = \frac{B}{R^2} (r^2 - \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} z^2) + C \frac{z}{H} + D \end{cases} \quad (1)$$

- Exprimer les constantes  $B$  et  $C$  en fonction de  $A, P, R, H, \lambda, \mu$  en utilisant les conditions aux limites en pression sur les faces  $z = 0$  (pression  $P$  dans la direction  $z$ ) et  $z = H$  (pression nulle dans la direction  $z$ ).
- Donner l'expression de la constante  $A$  à l'aide de la condition aux limites en déplacement suivante : un déplacement  $u = -\delta$  en  $r = R$  est imposé (le bouchon est emmanché de force dans la bouteille !!).
- Donner l'expression complète du tenseur des contraintes. Expliquer pourquoi ce tenseur ne dépend pas de la constante  $D$ , et comment celle-ci pourrait être obtenue.
- Donner l'expression du vecteur contrainte  $\vec{t}$  exercé par la bouteille sur la face  $r = R$  du bouchon (voir figure 3). En déduire les contraintes normale  $\sigma_n$  et tangentielle  $\sigma_t$  appliquées sur cette face.

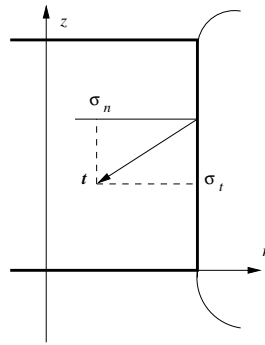
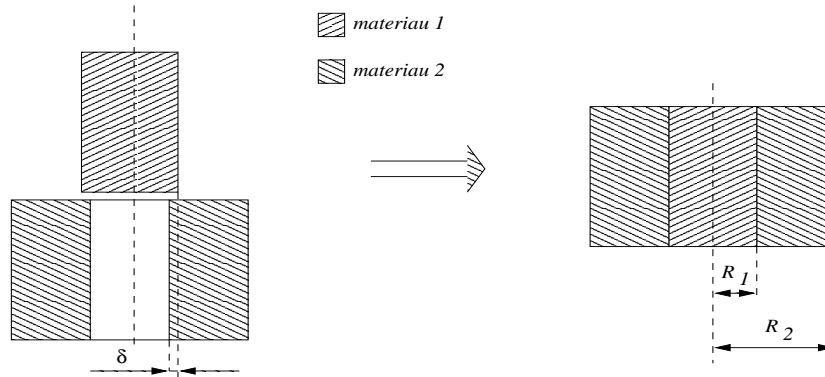


FIG. 3 – Schématisation du problème

- Ce vecteur contrainte pourra être exercé par la bouteille tant que le rapport  $\frac{\sigma_t}{\sigma_n}$  n'excédera pas le coefficient de frottement  $m$  de l'interface bouteille-bouchon. En déduire la pression  $P$  limite à partir de laquelle le bouchon sortira.
- Calculer cette pression limite pour  $H = 30mm$ ,  $R = 10mm$ ,  $\delta = 1mm$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 6MPa$  et  $m = 0,1$ .

## Frettage cylindrique

Le "frettage cylindrique" consiste à emmancher deux formes axisymétriques l'une dans l'autre, la forme intérieure ayant auparavant un diamètre externe supérieur au diamètre interne de la forme extérieure. On parle alors d'emmanchement "serré". Dans ce travail, nous nous intéresserons simplement aux conséquences du frettage, sans nous soucier du mode d'assemblage (thermique ou mécanique). L'objectif est de calculer les champs de contraintes, de déformation, et les déplacements dans des assemblages cylindriques frétés. Nous allons traiter le cas du frettage d'un tube sur un cylindre plein, tel qu'il est décrit dans la figure .



Dans tous les calculs, nous nous placerons en coordonnées cylindriques et dans l'hypothèse des petites perturbations. De plus, nous négligerons le poids propre et les effets d'accélération, et nous supposerons que les matériaux frétés sont homogènes, et ont le même comportement élastique isotrope (nous noterons  $\lambda$  et  $\mu$  leurs coefficients de Lamé). Enfin, le champ de déplacements  $(u_i, v_i, w_i)$  à l'intérieur de chaque matériau  $i$  sera supposé radial et de la forme suivante :

$$\begin{cases} u_i = u_i(r) \\ v_i = 0 \\ w_i = 0 \end{cases} \quad (2)$$

- Donner les composantes du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}^{(i)}$  et du tenseur des déformations  $\underline{\epsilon}^{(i)}$  dans le matériau  $i$ , en fonction de  $u_i$  et de ses dérivées successives. En déduire les équations d'équilibre dans chaque matériau formulées en déplacements.

- Trouver une forme analytique de  $u_i(r)$ , dépendant de deux constantes  $a_i$  et  $b_i$ , satisfaisant les équations d'équilibre obtenues. Pour cela, intégrer les équations d'équilibre en effectuant un changement de variable  $t_i = \ln(u_i)$ .
- En notant  $\delta$  l'écart entre les rayons initiaux de deux formes frêtées 1 (intérieure) et 2 (extérieure), montrer que les déplacements  $u_1$  et  $u_2$  satisfont la condition  $u_2 - u_1 = \delta$  au niveau de l'interface. La quantité  $\delta$  est appelée "serrage".
- A l'interface entre deux formes frêtées 1 et 2, écrire la continuité de la contrainte normale, et montrer que cette continuité se traduit par la condition  $\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}$ .
- Appliquer les conditions aux limites au centre, à l'interface et à l'extérieur pour déterminer les quatre constantes  $a_1, b_1, a_2, b_2$ . Exprimer ensuite les champs de déplacement, de contraintes et de déformation dans les matériaux frêtés en fonction des rayons  $R_1$  et  $R_2$ , du serrage  $\delta$ , et des coefficients de Lamé.
- Dessiner l'évolution des contraintes  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{zz}$  le long du rayon de l'assemblage. En déduire la contrainte équivalente de Tresca  $\bar{\sigma}$  dans l'assemblage. Dessiner son évolution le long du rayon de l'assemblage. Donner la position dans l'assemblage où la plastification du matériau apparaîtra en premier.

## Tube sous pression

On considère un tube d'axe  $Oz$ , infiniment long, de rayon intérieur  $r_0$ , de rayon extérieur  $r_1$ . On travaillera en coordonnées cylindriques  $r, \theta, z$ . Le matériau est supposé avoir un comportement élastique isotrope caractérisé par ses coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . La face intérieure est soumise à une pression  $p_0$ , celle de l'extérieur à une pression  $p_1$ .

- Justifier le choix d'un champ de déplacements  $u, v, w$  tel que  $u = u(r), v = 0, w = 0$  (champ radial). En déduire l'expression du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes en fonction de  $u$  et de ses dérivées par rapport à  $r$ .
- Résoudre le problème en déplacements en écrivant l'équilibre statique du système. Montrer qu'un champ de déplacements du type  $u(r) = a + \frac{b}{r}$  satisfait cet équilibre.

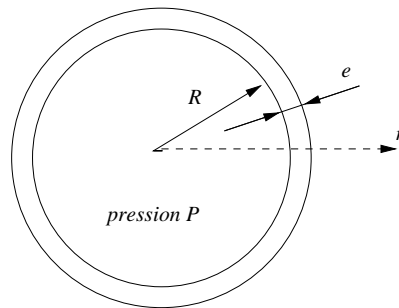
- Résoudre le problème en contraintes en écrivant l'équilibre statique du système. Utiliser le champ de déplacements obtenu précédemment pour estimer une forme de champ de contraintes.
- Écrire les conditions aux limites pour déterminer les constantes  $a$  et  $b$  en fonction des caractéristiques du matériau et de la géométrie du système.

Dans la suite, nous supposons que  $p_1 = 0$  (pas de pression externe).

- Exprimer les composantes du tenseur des contraintes, puis la contrainte équivalente de Tresca (que l'on notera  $\sigma$ ), en fonction de la pression interne dans le tube, des caractéristiques élastiques du matériau, et de la géométrie. Tracer l'évolution de  $\sigma$  dans la paroi du tube.
- En utilisant un critère basé sur la contrainte équivalente de Tresca, et en notant  $\sigma_0$  la limite d'élasticité du matériau, déterminer la pression interne maximale  $p_{max}$  pour laquelle il n'y a pas de plastification locale. Calculer  $p_{max}$  pour  $\sigma_0 = 200MPa$ ,  $r_0 = 100mm$  et  $r_1 = 120mm$ .

## Ballon de football

Un ballon de football est gonflé à une pression  $P$ . On note  $R$  son rayon interne et  $e$  son épaisseur. Le matériau constituant le ballon est supposé homogène, élastique linéaire et isotrope ( $\lambda$  et  $\mu$  sont ses coefficients de Lamé). On se place dans l'hypothèse des petites perturbations. On néglige la pression atmosphérique et le poids propre du matériau. On utilise un système de coordonnées sphériques  $r, \theta, \phi$ , dans lequel on suppose un champ de déplacements radial  $u = u(r), v = 0, w = 0$ .



- Exprimer le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes en fonction de  $u$ , de ses dérivées successives, et des coefficients de Lamé.

- Exprimer l'équilibre statique sous la forme d'une équation différentielle en  $u(r)$ . Montrer qu'un champ de la forme  $u = Ar + B/r^2$  satisfait cet équilibre ( $A$  et  $B$  sont des constantes).
- Utiliser les conditions aux limites en pression pour déterminer les constantes  $A$  et  $B$ . En déduire un expression complète des contraintes.
- en notant  $\delta = r - R$ , montrer que la contrainte radiale s'exprime sous la forme  $-P(1 - \delta/e)$  lorsque  $e \ll R$ .