

Contraintes mécaniques dans les bobines de production de champs magnétiques intenses

A l'occasion du record européen d'intensité de champ magnétique pulsé sans destruction de bobine

La génération de champs magnétiques pulsés très intenses par des bobines conductrices est limitée par les forces de Lorentz qui s'exercent sur les matériaux transportant le courant et engendrent des contraintes mécaniques pouvant conduire à la déformation plastique voire à la rupture des bobines.

Le champ pulsé produit au Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses de Toulouse¹ a la particularité de présenter une longue durée (de quelques μs à 100 ms avec une durée minimale de 20 minutes à 2 heures entre deux impulsions) et des vibrations négligeables permettant des mesures de grande précision. Dans ce but, le laboratoire a fait le choix original de bobines compactes en fil de cuivre renforcées par une frette métallique externe.

Des champs magnétiques au-delà de 100 Tesla ne peuvent être créés² que par une réduction drastique de la durée d'impulsion. Inévitablement, ils entraînent aussi la destruction de la bobine.

Ces champs magnétiques sont utilisés pour la réalisation d'expériences de physique, chimie, biologie et médecine. La bobine doit donc réserver un volume expérimental suffisant permettant d'accueillir les échantillons, des cryostats et autres équipements qui doivent rester intacts après l'expérience afin de permettre leur réutilisation. Les expériences réalisées sous champ magnétique concernent les mesures de magnétisation des matériaux, conductivité thermique, thermo-électricité (effets Seebeck et Nernst), spectroscopie ultrasonore, spectroscopie Raman, supraconductivité et résonance magnétique nucléaire, par exemple.

Le générateur Megagauss du LNCMI est constitué d'un banc de condensateurs modulaire de 200 kJ qui peut être chargé jusqu'à 60 kV. Son champ record est de 331 T, obtenu dans une bobine mono-spire de 3 mm de diamètre. L'accès aux basses températures dépend du diamètre de la bobine : des expériences à température de l'hélium liquide demandent des bobines d'au moins 12 mm, capables de produire des champs de près de 190 T.

L'objectif du problème est d'étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, l'équilibre d'un élément de bobine de cuivre utilisé pour la production de champs magnétiques intenses. La bobine de cuivre dont la portion étudiée est représentée sur la figure 1 est considérée comme un anneau parcouru par un courant électrique de densité j de la forme :

$$\underline{j} = j \underline{e}_\theta, \quad j = 1 \times 10^9 \text{ A m}^{-2} \quad (1)$$

1. LNCMI, voir le site lncmi.cnrs.fr, et plus particulièrement la page www.toulouse.lncmi.cnrs.fr/spip.php?rubrique10&lang=fr consacrée au type de bobines étudiées dans ce problème.

2. On parle de champ Megagauss : 1 Megagauss = 100 T.

dans la base de coordonnées cylindriques indiquée sur la figure 1. Remarquer la densité de courant colossale égale à 1000 A mm^{-2} . Ce courant dans la bobine induit un champ magnétique

$$\underline{\mathbf{B}} = B \underline{\mathbf{e}}_z, \quad B = 100 \text{ T} \quad (2)$$

Le champ B est supposé uniforme et constant dans le domaine $r \leq r_e$. En réalité, il varie linéairement dans la largeur et cette caractéristique pourrait aisément être prise en compte dans une seconde analyse, comme dans les travaux de (Witters and Herlach, 1983). Seul le couplage électro–magnéto–mécanique direct sera étudié. Les modifications en retour du courant électrique et du champ magnétique en raison du changement de forme de la bobine seront ignorées.

La première partie du problème est consacrée au comportement de la bobine de cuivre seule. Une frette en acier est ajoutée dans la deuxième partie pour renforcer la structure.

Le problème est traité dans le contexte des contraintes planes excluant les contraintes selon z et toute dépendance des contraintes et déformations vis-à-vis de la variable z . La résolution se fait dans le contexte des petites perturbations. Les corps matériels sont initialement dans leur état naturel et présentent un comportement élastique linéarisé homogène et isotrope. Les efforts de gravité et la pression atmosphérique sont négligés. L'élévation de température due à l'effet Joule dans la bobine n'est pas prise en compte. Les contraintes d'origine thermique ne seront donc pas considérées.

Les caractéristiques élastiques du cuivre sont : $E^{\text{Cu}} = 120 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$.

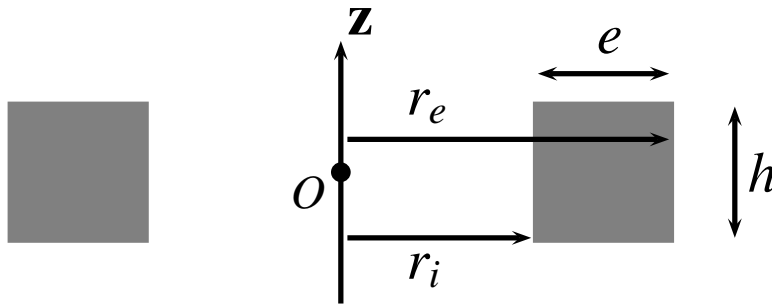


FIGURE 1: Section d'un élément de bobine pour l'induction d'un champ magnétique. Le cuivre est en gris sur la figure.

Les lecteurs avides de connaître plus amplement les couplages entre mécanique des milieux continus et électromagnétisme sont invités à consulter les ouvrages (Maugin, 1988; Eringen and Maugin, 1990) et plus récemment (Dorfmann and Ogden, 2014).

1. Forces de volume d'origine électromagnétique

En régime stationnaire, à l'équilibre, la bobine est le siège de contraintes engendrées par la force volumique de Lorentz, $\rho \underline{\mathbf{f}}$, selon l'équation :

$$\text{div } \underline{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\mathbf{f}} = 0 \quad (3)$$

En physique des milieux continus, la force volumique de Lorentz prend la forme suivante :

$$\rho \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{j}} \wedge \underline{\mathbf{B}} \quad (4)$$

Dans cette première partie du problème, on étudie la réponse mécanique de l'élément de bobine de cuivre seul soumis aux forces de Lorentz. Les surfaces externes de la bobine de cuivre sont libres de tout effort mécanique.

1.1. Expression de la densité volumique de force de Lorentz

Vérifier que le produit $\underline{j} \wedge \underline{B}$ a bien la dimension physique d'une force par unité de volume, à savoir Nm^{-3} .

Substituer les expressions (1) et (2) dans la définition (4) de la force de Lorentz. Indiquer l'orientation et l'intensité de la force de Lorentz obtenue. Commenter.

Donner la valeur numérique de l'intensité de la force de Lorentz avec les valeurs données précédemment pour j et B .

1.2. Forme et équilibre des contraintes

Le tenseur des contraintes est supposé revêtir la forme suivante :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Les composantes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont recherchées comme des fonctions de la seule variable r .

Exprimer alors les équations d'équilibre en fonction des composantes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ et des grandeurs imposées j et B ?

1.3. Une relation supplémentaire liant les contraintes

Dans le cadre de l'élasticité isotrope linéarisée pour un problème axisymétrique, établir la relation suivante :

$$(1 + \nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r(\sigma'_{\theta\theta} - \nu\sigma'_{rr}) \quad (6)$$

où σ'_{rr} (resp. $\sigma'_{\theta\theta}$) désigne la dérivée par rapport à r de σ_{rr} (resp. $\sigma_{\theta\theta}$).

1.4. Détermination des contraintes radiales

Déduire des deux équations précédentes une équation différentielle portant sur la contrainte radiale, σ_{rr} .

Résoudre cette équation et montrer que

$$\sigma_{rr}(r) = -\alpha r + C - \frac{A}{r^2} \quad (7)$$

On exprimera α en fonction de j, B et des caractéristiques élastiques du matériau. A et C , quant à eux, sont des constantes d'intégration déterminées dans la suite.

1.5. Détermination des contraintes orthoradiales

Montrer que les contraintes orthoradiales sont de la forme

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -\beta r + C + \frac{A}{r^2} \quad (8)$$

On exprimera β en fonction de j, B et des caractéristiques élastiques du matériau.

1.6. Détermination complète des contraintes

Obtenir finalement les constantes d'intégration A et C .

Donner aussi le signe de la contrainte σ_{rr} lorsque $jB > 0$.

1.7. Tracé des contraintes

Tracer les profils des contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ en utilisant les valeurs numériques données précédemment pour j et B . Les dimensions du solénoïde sont :

$$r_i = 4 \text{ mm}, \quad r_e = 6 \text{ mm} \quad (9)$$

On prendra soin en particulier de déterminer les valeurs numériques de $\sigma_{\theta\theta}(r = r_i)$ et $\sigma_{\theta\theta}(r = r_e)$.

1.8. Calcul des déformations ; contexte infinitésimal

Calculer les déformations en fonction des constantes A, C et des caractéristiques élastiques du matériau.

En déduire une condition sur jB garantissant que les déformations restent infinitésimales. Cette condition est-elle satisfaite pour le champ magnétique et le courant visés dans le cas du solénoïde en cuivre considéré dans cette partie ?

1.9. Intégration des déplacements ; limites de l'approche proposée

Construire les déplacements u_r et u_θ associés aux déformations précédentes.

Montrer finalement qu'il n'est pas possible de déterminer un champ u_z satisfaisant. Ce constat signe l'échec de la démarche proposée. Quelle simplification doit être remise en question ?

Cette difficulté est rencontrée assez fréquemment dans le contexte des contraintes planes. Il s'avère toutefois que les expressions trouvées précédemment pour les contraintes, déformations et déplacements, représentent une approximation satisfaisante à bien des égards³ de la solution recherchée lorsque l'épaisseur h de la spire est suffisamment petite devant son rayon.

On continue donc à utiliser ces expressions dans la suite du problème.

Calculer la valeur numérique du rayon intérieur de la spire sous chargement magnétique.

1.10. Limite d'élasticité de la bobine

En utilisant le critère de plasticité de Tresca pour un corps isotrope de limite d'élasticité σ_0 en traction, indiquer à quel endroit de l'anneau la plasticité va commencer. Donner la valeur critique correspondante de jB en fonction des caractéristiques géométriques de l'anneau et des propriétés mécaniques du matériau.

Qu'en est-il avec la valeur visée de jB lorsque $\sigma_0 = 500 \text{ MPa}$ correspondant à du cuivre fortement écroui⁴ ?

3. Par comparaison avec une solution numérique, par exemple.

4. C'est-à-dire durci.

1.11. Cas d'une spire de faible largeur relative

Dans le cas où la largeur de l'anneau est très faible devant son rayon R :

$$\frac{e}{R} \ll 1$$

Le rayon R est pris comme $(r_i + r_e)/2$, par exemple. Montrer que, dans ce cas, l'état de contraintes au sein de l'anneau s'identifie à un état de traction simple orthoradiale dont on donnera l'expression en fonction de jB et R . Donner alors l'expression simplifiée de la valeur critique de jB pour laquelle la limite d'élasticité est atteinte. Vérifier que cette expression est conforme au développement au premier ordre de la formule trouvée au paragraphe 1.10.

En supposant que le seuil de plasticité n'est pas franchi, calculer la valeur numérique de la déformation orthoradiale dans le cas de l'anneau mince avec $R = 5$ mm.

2. Solénoïde renforcé par une frette en acier

Afin de limiter l'élargissement des spires du solénoïde et les contraintes engendrées par le champ magnétique, un anneau d'acier est introduit autour des spires comme sur la figure 2. Ce cerclage constitue un frettage de la bobine bridant l'augmentation du rayon de la spire sous charge. Il possède un rayon extérieur r_f et on suppose qu'il n'y a pas de jeu entre l'anneau de cuivre et l'anneau d'acier de sorte que la largeur de l'anneau d'acier vaut $r_f - r_e$. L'objectif de cette partie est de calculer la réduction de contrainte dans la bobine de cuivre en fonction du rayon r_f , du chargement jB appliqué et des caractéristiques géométriques et matérielles des constituants de la structure.

Comme aucun courant électrique ne circule dans le cerclage d'acier, on suppose que le champ magnétique appliqué n'a aucun effet mécanique sur celui-ci. Les anneaux de cuivre et d'acier en contact sont supposés jointifs garantissant la continuité du déplacement u_r et la transmission du vecteur-contrainte lorsque la contrainte radiale est de compression⁵. Par contre, ils peuvent glisser l'un par rapport à l'autre, autorisant ainsi une discontinuité du déplacement u_z .

La gaine est constituée d'un acier inoxydable avec une limite d'élasticité de 1 GPa. L'acier est traité comme un matériau homogène et isotrope présentant un comportement élastique linéarisé. Les caractéristiques élastiques de l'acier sont :

$$E^{\text{acier}} = 210 \text{ GPa}, \quad \nu^{\text{acier}} = \nu^{\text{Cu}} = \nu = 0.3$$

Le cuivre et l'acier sont supposés avoir le même coefficient de Poisson pour simplifier les calculs.

2.1. Contraintes radiales dans l'assemblage fretté

Justifier brièvement que les contraintes radiales dans le cuivre et l'acier prennent la forme suivante :

$$\sigma_{rr}^{\text{Cu}}(r) = -\alpha r + C - \frac{A}{r^2}, \quad \sigma_{rr}^{\text{acier}}(r) = C_f - \frac{A_f}{r^2} \quad (10)$$

où A, C, A_f et C_f sont des constantes à déterminer dans la suite.

Etablir trois relations liant ces quatre constantes.

5. Sinon les deux anneaux se séparent car ils ne sont pas collés. En réalité, ils sont nécessairement séparés par un mince revêtement isolant, non considéré ici, cf. (Witters and Herlach, 1983).

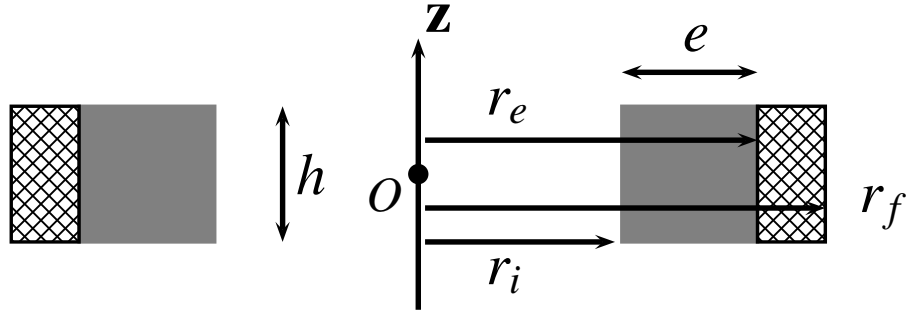


FIGURE 2: Section d'un élément de bobine de cuivre renforcé par une frette en acier. La partie en acier est hachurée sur la figure.

2.2. Contraintes orthoradiales dans l'assemblage fretté

Donner la forme des contraintes orthoradiales dans le cuivre et l'acier en fonction des constantes A, C, A_f, C_f introduites précédemment.

2.3. Détermination de la quatrième relation cherchée

Calculer la déformation $\varepsilon_{\theta\theta}$ dans le cuivre et dans l'acier en fonction des constantes A, C, A_f, C_f , puis le champ de déplacement radial u_r .

En déduire la relation manquante pour déterminer les quatre constantes recherchées.

On ne demande pas de résoudre ce système même si cela ne pose aucune difficulté.

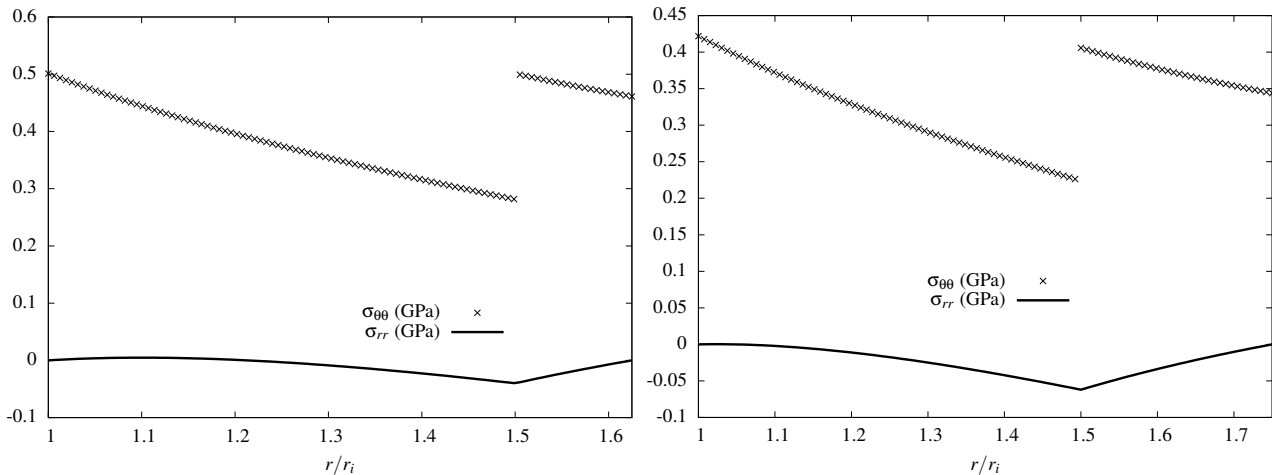


FIGURE 3: Profils des contraintes radiale et orthoradiale dans la section de la bobine de cuivre et la frette d'acier pour deux largeurs différentes de frette : $r_f = 0.5$ mm (à gauche), $r_f = 1$ mm (à droite). Les caractéristiques géométriques de l'anneau de cuivre sont données par (9).

2.4. Limite d'élasticité de l'assemblage fretté

Après résolution du système précédent (non demandée ici), les courbes donnant les contraintes et le déplacement radial sont données sur la figure 3 pour deux valeurs du rayon extérieur de frette, r_f .

Commenter les résultats. La frette remplit-elle son rôle ?

Commenter également le déplacement radial donné sur la figure 4 avec et sans frette.

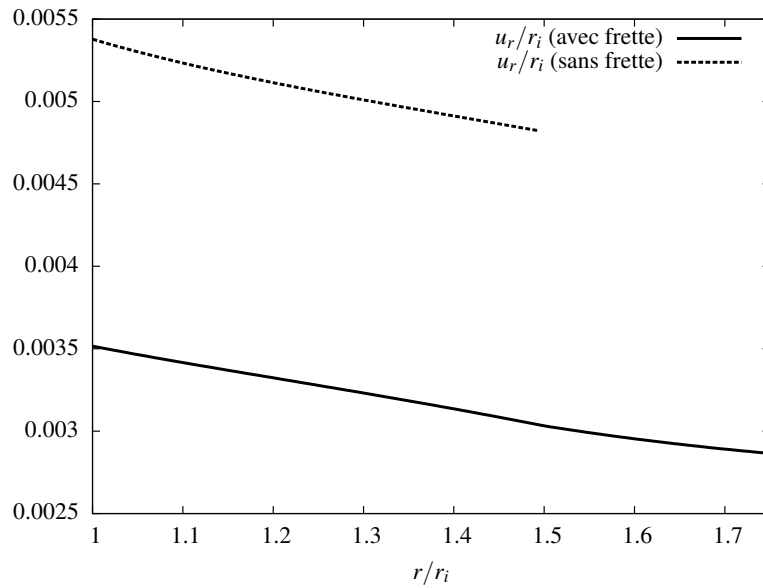


FIGURE 4: Déplacement radial normé dans la section de la bobine de cuivre et la frette d'acier. Ce profil est comparé au déplacement en absence de frette pour le même champ jB appliqué ($r_f = 1$ mm). Les caractéristiques géométriques de l'anneau de cuivre sont données par (9).

2.5. Autre méthode de renforcement de la bobine conductrice

Proposer d'autres méthodes que le frettage pour renforcer la bobine conductrice et éviter que le cuivre ne plastifie.

Références

- Dorfmann, L., Ogden, R.W., 2014. Nonlinear Theory of Electroelastic and Magnetoelastic Interactions. Springer. doi :<https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9596-3>.
- Eringen, A.C., Maugin, G.A., 1990. Electrodynamics of Continua I, Foundations and Solid Media. Springer-Verlag, New York. doi :<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3226-1>.
- Maugin, G.A., 1988. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids. Elsevier Science Publishers, North Holland.
- Witters, J., Herlach, F., 1983. Analytical stress calculations for magnetic field coils with anisotropic modulus of elasticity. J. Phys. D : Appl. Phys. 16, 255–260. doi :[10.1088/0022-3727/16/3/008](https://doi.org/10.1088/0022-3727/16/3/008).

* * *