

# A propos du problème de Flamant

à l'occasion du centenaire de la disparition de A. Flamant (1839–1915)

L'application d'efforts distribués ou concentrés à la surface d'un massif, domaine matériel occupant un demi-espace infini, constitué d'un matériau homogène élastique linéaire et isotrope, est une situation fréquente en génie civil et en mécanique des structures. Elle engendre des contraintes dont la connaissance est de première importance pour le dimensionnement de bâtiments sur un sol ou de composants industriels. Le premier type d'efforts considérés dans ce problème est d'intérêt essentiellement académique, mais délivre une solution d'une remarquable simplicité. Ce problème débouche dans la deuxième partie sur celui traité par Alfred–Aimé Flamant en 1892, disciple d'Adhémar Barré de Saint–Venant, ami de Joseph–Valentin Boussinesq et Ferdinand de Lesseps, professeur à l'Institut Industriel du Nord, et dont on célèbre ainsi les cent ans de la disparition. La solution de Flamant pose de sérieuses questions à la mécanique des milieux continus, on le verra. Elle sert enfin de générateur pour résoudre un problème d'une grande portée dans les techniques de l'ingénieur, à savoir celui de la réponse d'un massif à une distribution donnée de pression sur une bande de sa surface, problème traité dans une troisième partie.

Dans tout le problème, on se contente de solutions bidimensionnelles en contraintes planes et dans le contexte infinitésimal. Le matériau constitutif du massif est pris dans son état initial naturel. Il se comporte de manière élastique linéaire et isotrope jusqu'à une limite d'élasticité suivant un critère de plasticité de Tresca ou de von Mises. Les efforts de volume et d'inertie ne sont pas considérés. La méthode de résolution adoptée dans tout le problème est la méthode des contraintes.

## 1. Distribution de pression appliquée le long d'une gouttière

On considère un demi-espace  $X_1 \geq 0$  percé d'une rigole semi-cylindrique de section semi-circulaire de rayon  $r_0$ , d'axe  $(O, \underline{e}_3)$  contenu dans la surface  $X_1 = 0$  du massif. Le plan de coupe  $(X_1, X_2)$  est représenté sur la figure 1, ainsi que le système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  utilisées dans le plan d'étude.

### 1.1. Conditions aux limites

La surface du massif  $X_1 = 0$  et la rigole  $r = r_0$  sont soumises à la distribution surfacique de forces suivante :

- $\underline{t}^d = 0$  pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  et  $r \geq r_0$ ,
- $\underline{t}^d = p_0 \cos \theta \underline{e}_r$  pour  $r = r_0$ .

Calculer la force résultante à la surface du massif, par unité d'épaisseur,  $F/h$ ,  $h$  étant l'épaisseur du massif selon  $X_3$  considérée pour le calcul de la résultante.

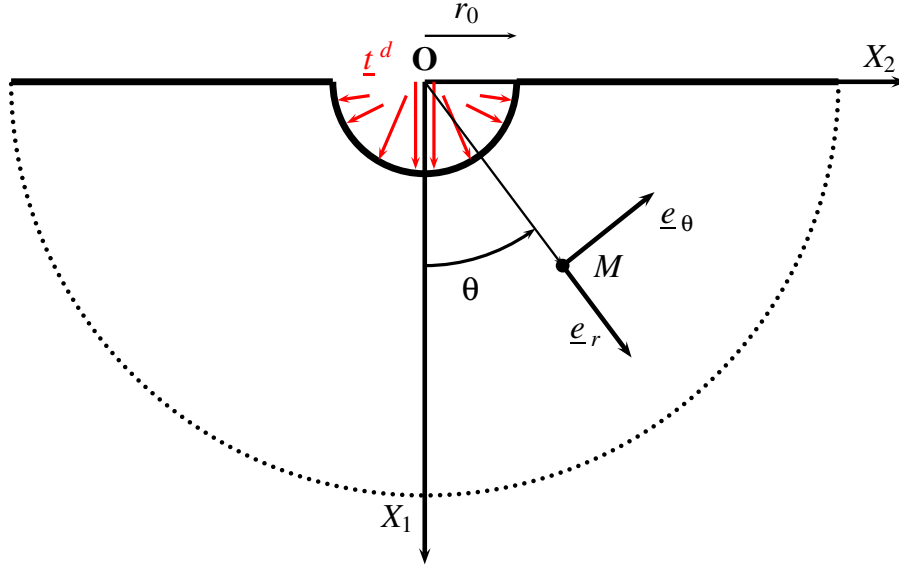


FIGURE 1: Coupe d'un massif semi-infini par le plan  $(X_1, X_2)$  percé d'une rigole cylindrique de rayon  $r_0$  et soumis à sa surface à une distribution de forces  $\underline{t}^d$ . Le demi-cercle pointillé suggère la nature semi-infinie du massif.

## 1.2. Champ de contraintes

Montrer que le champ de contraintes

$$\underline{\sigma} = k \frac{\cos \theta}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \quad (1)$$

est statiquement admissible<sup>1</sup>. Identifier  $k$  en conséquence et l'exprimer également en fonction de la force linéique appliquée.

## 1.3. Champ de déformations

Calculer le champ des déformations associées aux contraintes (1). Les caractéristiques élastiques du matériau constitutif du massif sont  $E$  et  $\nu$ .

Commenter cet état de contraintes et de déformations en chaque point du massif.

## 1.4. Expression des déplacements dans le plan

Déterminer les expressions des déplacements  $u_r$  et  $u_\theta$  à partir de celles trouvées pour  $\varepsilon_{rr}$  et  $\varepsilon_{\theta\theta}$ . On introduira les fonctions d'intégration  $f(\theta)$  et  $g(r)$ .

En utilisant la valeur de  $\varepsilon_{r\theta}$  déterminer les fonctions  $f$  et  $g$  précédentes en faisant intervenir trois constantes d'intégration.

Donner la signification mécanique des termes associés à ces constantes d'intégration.

On ne cherchera pas à déterminer la composante de déplacement  $u_z$  et on se contente ici de la solution bidimensionnelle établie.

---

1. Un champ de contraintes est statiquement admissible s'il vérifie les équations d'équilibre en volume et les conditions d'efforts imposés au bord.

### 1.5. Conditions aux limites en déplacements et déplacements finaux

On donne les conditions cinématiques suivantes :

$$u_r(r = \ell, \theta = 0) = u_\theta(r = \ell, \theta = 0) = 0, \quad u_\theta(r = r_0, \theta = 0) = 0$$

où  $\ell > r_0$  est une distance fixée quelconque.

Justifier sans recours aux équations, que ces conditions permettent de fixer le mouvement de corps rigide infinitésimal qui restait indéterminé dans la résolution précédente par la méthode des contraintes.

Montrer finalement que le champ de déplacements s'écrit :

$$u_r = \frac{k}{E} \left( \cos \theta \ln \frac{r}{\ell} + \frac{1-\nu}{2} \theta \sin \theta \right) \quad (2)$$

$$u_\theta = -\frac{k}{E} \left( \left( \nu + \ln \frac{r}{\ell} \right) \sin \theta + \frac{1-\nu}{2} (\sin \theta - \theta \cos \theta) \right) \quad (3)$$

### 1.6. Respect du contexte infinitésimal

Donner les conditions assurant que le contexte infinitésimal est respecté. Elles portent sur la force linéique  $F/h$  appliquée, la géométrie du problème et les propriétés mécaniques du matériau.

Dans le cas  $r_0 = 1$  mm et d'un massif en acier, chiffrer ces conditions.

### 1.7. Energie élastique stockée

Calculer l'énergie élastique stockée par unité d'épaisseur dans une couronne  $[r_0, r_1]$  pour le rayon extérieur  $r_1$  donné.

### 1.8. Limite d'élasticité

Le matériau possède une limite d'élasticité  $\sigma_0$  en traction. Calculer la force linéique  $F/h$  maximale autorisée avant que le régime plastique ne soit atteint. On utilisera successivement les critères de Tresca et de von Mises.

A quel endroit du massif la limite d'élasticité est-elle atteinte ?

Faire l'application numérique pour le massif en acier avec  $\sigma_0 = 100$  MPa,  $r_0 = 1$  mm.

## 2. Le problème de Flamant

On considère le problème traité dans la première partie comme un élément d'une suite de problèmes paramétrés par le rayon  $r_0$  de la gouttière. Pour chaque valeur de  $r_0$ , la pression  $p_0$  appliquée sur la rigole est ajustée pour que la force linéique résultante  $F/h$  appliquée à la surface soit constante.

### 2.1. Formulation du problème

Formuler le problème–limite obtenu en faisant tendre le rayon de la rigole  $r_0$  vers 0 dans cette suite de problèmes.

Comment évolue la pression  $p_0$  lors de ce passage à la limite ? Quelle est la différence essentielle entre ce problème, dit de Flamant, et ceux traités dans le cours de mécanique des milieux continus jusqu'ici ?

### 2.2. Contraintes de Flamant

Proposer un champ de contraintes solution du problème de Flamant défini au paragraphe 2.1, pour un massif élastique linéaire homogène et isotrope, dans l'hypothèse des petites perturbations.

### 2.3. Visualisation par photoélasticité

Lorsque le massif est constitué d'un matériau photoélastique, le champ de contraintes précédent est visible comme le montre la figure 2. Sachant que les lignes observées, dites *isochromes*, représentent les lieux des points où  $\sigma_1 - \sigma_2 = Cste$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  étant les contraintes principales dans le plan  $(X_1, X_2)$ , interpréter les courbes visibles sur la figure 2. Indiquer également les raisons pouvant expliquer les différences que vous pourriez observer entre l'expérience et la théorie.

### 2.4. Caractère pathologique de la solution de Flamant

Indiquer plusieurs raisons suggérant que la solution de Flamant est physiquement inacceptable.

On verra toutefois dans la partie 3 le profit que l'on peut tirer de cette solution mathématique.

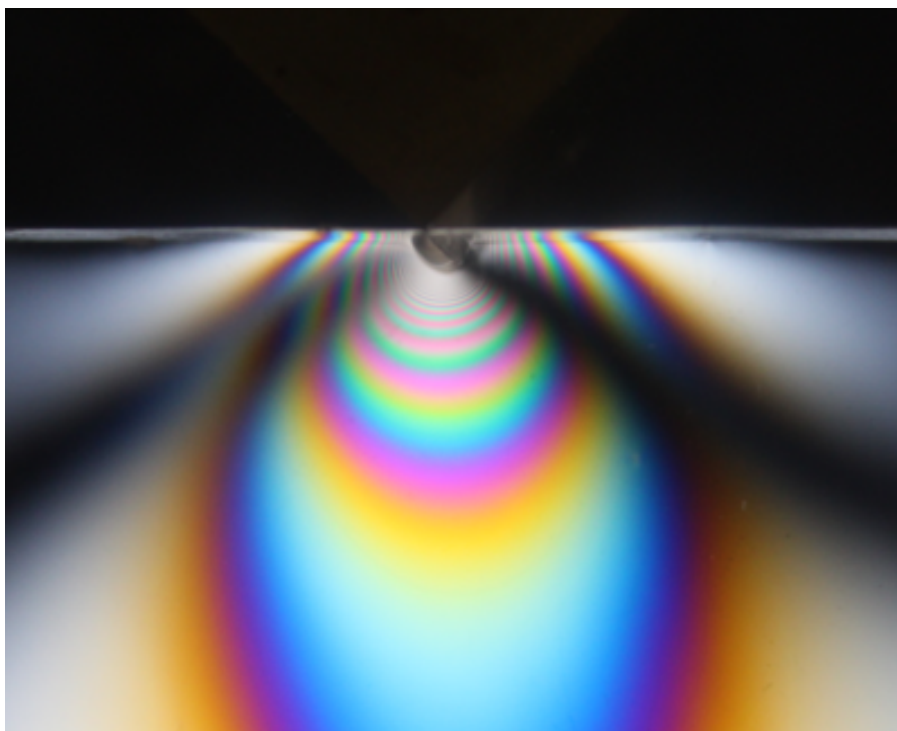
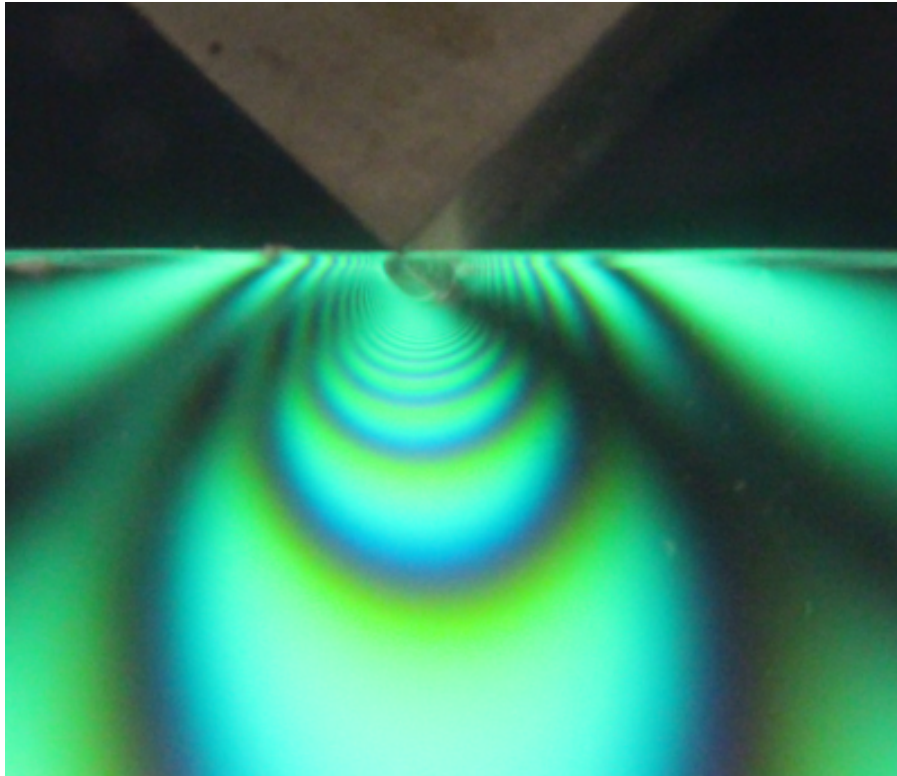


FIGURE 2: Visualisation par photoélasticité des contraintes induites par l'application d'une force sur une ligne à la surface d'un massif élastique : en lumière monochromatique en haut, en lumière blanche en bas (réalisation : M. Mazière). La force linéique est appliquée par l'arête d'un cube dont une partie est visible sur la figure du haut. Des images en photoélasticité pour ce type de chargements se trouvent également dans le livre de ([Johnson, 1987-2004](#)) repris par [Sadd \(2005\)](#).

### 3. Distribution de pression sur un massif

La solution de Flamant peut être utilisée comme génératrice de la solution d'un problème important en mécanique des sols et des structures. Il s'agit de l'application d'une distribution de pression sur un segment  $[AB]$  de longueur  $2a$  à la surface d'un massif semi-infini, comme sur la figure 3. Le segment  $[AB]$  engendre dans la troisième direction  $X_3$  une bande sur laquelle la distribution de pression est appliquée. La méthode permet d'obtenir la réponse du massif pour toute distribution hétérogène de pression le long de  $[AB]$  mais on considère dans cette partie une pression uniforme  $p$  :

$$\underline{t}^d = p\underline{e}_1, \quad \forall \underline{X} \in [AB]$$

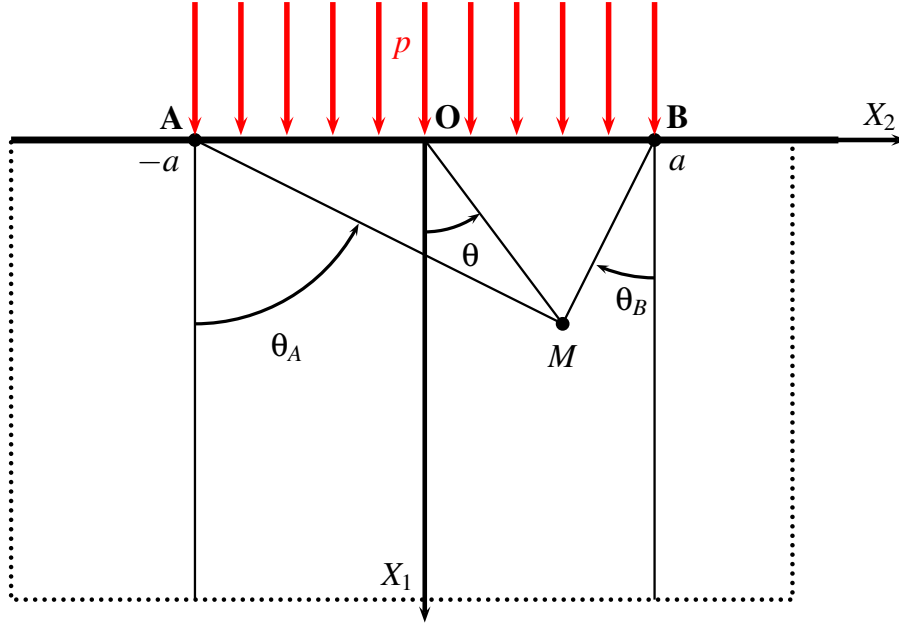


FIGURE 3: Coupe d'un massif semi-infini par le plan  $(X_1, X_2)$  soumis à une pression uniforme  $p$  le long d'une bande décrite par le segment  $[AB]$  et l'épaisseur  $h$  dans la troisième direction. Définition des angles  $\theta, \theta_A, \theta_B$  associés au point courant  $M$ . Les lignes pointillées indiquent que le domaine matériel  $X_1 \geq 0$  est infini.

#### 3.1. Question préliminaire

Montrer que les composantes cartésiennes des contraintes de Flamant, exprimées en fonction des coordonnées  $r, \theta$ , s'écrivent :

$$\underline{\sigma} = \frac{k \cos \theta}{r} (\cos^2 \theta \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sin^2 \theta \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sin \theta \cos \theta (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)) \quad (4)$$

#### 3.2. Champ de contraintes dans le massif

A l'aide de la solution du problème de Flamant et du théorème de superposition en élasticité linéarisée, établir les expressions suivantes des contraintes qui se développent dans le massif en conséquence des pressions appliquées à sa surface :

$$\sigma_{11} = \frac{p}{2\pi} [2\theta + \sin 2\theta]_A^B \quad (5)$$

$$\sigma_{22} = \frac{p}{2\pi} [2\theta - \sin 2\theta]_A^B \quad (6)$$

$$\sigma_{12} = \frac{p}{2\pi} [-\cos 2\theta]_A^B \quad (7)$$

avec la notation  $[f(\theta)]_A^B = f(\theta_B) - f(\theta_A)$ , les angles  $\theta_A$  et  $\theta_B$  étant définis pour chaque point  $M$  du massif par la figure 3, en respectant l'orientation directe dans le plan  $(X_1, X_2)$ .

Vérifier que les conditions aux limites sur le plan  $X_1 = 0$  sont satisfaites par le champ proposé.

### 3.3. Régularité des contraintes

Montrer que le champ de contraintes (5)–(7) ne présente pas de singularité.

Etudier la continuité des composantes du tenseur des contraintes le long d'une ligne d'équation  $X_1 = b$ . Justifier que les discontinuités observées ne contreviennent pas aux lois de l'équilibre.

### 3.4. Respect du contexte infinitésimal

Fournir une condition de respect du contexte infinitésimal par la solution (5)–(7).

### 3.5. Limite d'élasticité

Donner les contraintes principales du tenseur (5)–(7).

Lorsque le massif est constitué d'un matériau élastoplastique de limite d'élasticité  $\sigma_0$  en traction simple, indiquer pour quelle valeur de la pression imposée  $p$  la limite d'élasticité est atteinte et à quel endroit. On utilisera le critère de Tresca.

Montrer enfin que les directions principales des contraintes (5)–(7) sont les bissectrices des droites  $(AM)$  et  $(BM)$ .

### 3.6. Déformée de la surface

En utilisant à nouveau le théorème de superposition, donner les déplacements à la surface du massif.

## Références

Johnson, K., 1987–2004. Contact mechanics. Cambridge University Press.

Sadd, M.H., 2005. Elasticity. Elsevier Academic Press.

\* \* \*