

Contraintes dans les corps célestes

L'objectif du problème est de déterminer en chaque point matériel d'un corps les contraintes engendrées par les interactions gravitationnelles avec les autres points de ce corps. Ce type d'efforts a été écarté dans les exercices traités dans le cours mais ils deviennent prépondérants dans les planètes, leurs satellites et les étoiles. Dans ce problème sont envisagés successivement les cas d'une planète fluide, d'une planète solide et d'une planète solide à noyau fluide.

Dans tout le problème, la pression atmosphérique des corps étudiés et les interactions avec d'autres corps extérieurs sont négligées. Dans un souci de simplicité, les conséquences des variations de température au sein des corps ne sont pas prises en compte dans l'analyse.

Le problème commence par des préliminaires dont les résultats peuvent être admis dans la suite même si leur établissement ne demande pas de calculs mais seulement quelques remarques judicieuses.

1 Préliminaires

Un corps céleste dans sa configuration actuelle Ω_t est le siège d'efforts dus à l'interaction gravitationnelle à distance entre les points matériels qui le constituent. La densité volumique de tels efforts s'exerçant sur le point matériel $\underline{\mathbf{x}} \in \Omega_t$ de masse volumique $\rho(\underline{\mathbf{x}})$ est de la forme :

$$\underline{\rho\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}}) = \rho(\underline{\mathbf{x}}) \int_{\Omega_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}') \mathcal{G} \frac{\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}'}{\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}'\|^3} dv' \quad (1)$$

Il faut remarquer que l'effort exercé en $\underline{\mathbf{x}}$ résulte de l'interaction avec tous les autres points $\underline{\mathbf{x}}'$ du corps, situation inédite dans ce cours. Il fait intervenir la constante de gravitation de Newton, notée \mathcal{G} , et dont la valeur est : $\mathcal{G} = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$.

1.1 Loi de Cauchy en présence d'efforts de gravitation

Écrire les lois d'Euler pour un sous-domaine $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ en présence du champ de gravitation $\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}})$ donné par la relation (1).

Justifier ensuite brièvement le fait que la construction du tenseur des contraintes par la méthode du tétraèdre de Cauchy ne soit pas modifiée par la présence du champ de gravitation.

Déduire enfin des deux remarques précédentes que la loi locale de conservation de la quantité de mouvement en tout point régulier du corps Ω_t s'écrit :

$$\text{div } \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}}, t) + \rho(\underline{\mathbf{x}}, t) \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \rho(\underline{\mathbf{x}}, t) \underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{x}}, t) \quad (2)$$

où $\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}}, t)$ est un champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques. En général, la détermination de la forme Ω_t du corps est d'autant plus délicate que les efforts de gravitation en dépendent explicitement.

1.2 Cas d'un corps de forme sphérique

Lorsque Ω_t est une boule de centre O et de rayon R , et que la répartition de masse est également à symétrie sphérique, montrer que le champ de gravitation induit par le corps Ω_t lui-même, à l'exclusion de tout corps extérieur, se met sous la forme suivante :

$$\underline{g}(\underline{x}) = -\frac{\mathcal{G}M(r)}{r^2} \underline{e}_r \quad (3)$$

où $M(r) = \int_{\mathcal{B}_r} \rho dv$ est la masse contenue dans la boule \mathcal{B}_r de centre O et de rayon r . On utilise le système de coordonnées sphériques d'origine O.

2 Planète fluide

Lorsque le milieu constituant la planète est un fluide élastique, qu'il s'agisse d'une phase gazeuse ou liquide, les équations de l'hydrostatique suffisent à déterminer le champ de pression $p(\underline{x})$ au sein de la planète.

Montrer que, pour un fluide élastique, l'équation de Cauchy (2) conduit à l'équation usuelle de l'hydrostatique :

$$\text{grad } p = \rho \underline{g} \quad (4)$$

En supposant le fluide de densité homogène $\rho = \rho_0$ et la planète parfaitement sphérique, i.e. Ω_t est une boule de rayon R , établir le profil de pression au sein de la planète en fonction de ρ_0 , R et de la masse totale M_J de la planète.

Remarquer que le calcul précédent est fait sur la configuration actuelle observable et que l'opérateur gradient porte sur les coordonnées courantes. C'est un cas simple pour lequel la résolution est possible sur la configuration déformée.

Application numérique : estimer la pression au centre de la planète Jupiter constituée d'un noyau liquide et d'un manteau gazeux.

On prendra : $M_J = 1.9 \cdot 10^{27}$ kg, $R = 70000$ km, $\rho_0 = 1326$ kg.m⁻³.

Comparer le résultat aux valeurs disponibles sur le net qui vont de $3 \cdot 10^{12}$ Pa = 3000 GPa à 10^{13} Pa = 10000 GPa selon les sources.

L'estimation précédente peut être améliorée en prenant en compte le fait que le noyau de Jupiter, de la taille de la Terre, est constitué de roches silicatées et de fer, et que le manteau est constitué d'hydrogène métallique ou liquide, ce qui conduit à une répartition non homogène de masse.

3 Planète solide

Certaines planètes et satellites naturels se présentent sous forme solide. Le but de cette partie est d'examiner la pertinence du traitement de tels corps comme des milieux élastiques dans l'hypothèse des petites perturbations. Le corps est considéré comme isotrope et homogène de masse volumique ρ_0 et de coefficients de Lamé λ et μ .

L'analyse proposée consiste à considérer le corps comme une boule de rayon R dans sa configuration de référence naturelle et à déterminer les contraintes engendrées par la mise en place des efforts dus à la gravitation. Elle ne prend pas en compte le processus réel de formation

de la planète mais elle a le mérite de fournir, dans certaines conditions qui seront discutées, un ordre de grandeur des contraintes régnant dans une planète ou un satellite.

Donner l'équation d'équilibre statique local tenant compte des efforts de gravitation dans le cas d'une planète sphérique homogène, dans l'hypothèse des petites perturbations.

3.1 Équation différentielle régissant le déplacement

L'inconnue principale du problème est, pour des raisons que l'on indiquera, le déplacement radial $u(r)$, fonction de r seulement. En suivant la méthode des déplacements dans le cas statique, montrer que le déplacement est solution de l'équation différentielle suivante :

$$u'' + \frac{2}{r}u' - \frac{2}{r^2}u - \rho_0^2 \frac{4\pi\mathcal{G}}{3(\lambda + 2\mu)}r = 0 \quad (5)$$

où u' est la dérivée de la fonction $u(r)$ par rapport à r .

3.2 Détermination complète du déplacement

Montrer que la résolution de l'équation différentielle précédente conduit à un déplacement de la forme

$$u(r) = Ar + Kr^3 \quad (6)$$

Déterminer complètement les constantes A et K en fonction des propriétés du milieu et de la constante de gravitation.

3.3 Vérification du contexte infinitésimal

Indiquer les conditions garantissant que le contexte infinitésimal est respecté dans l'analyse précédente.

On prêtera une attention toute particulière aux conditions relatives à la linéarisation des efforts volumiques.

Application numérique : indiquer dans quelle mesure les conditions précédentes sont satisfaites dans le cas de la Terre :

$$R_{Terre} = 6370 \text{ km}, \quad \rho_{Terre} = 5500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad M_{Terre} = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

puis de la Lune :

$$R_{Lune} = 1737 \text{ km}, \quad \rho_{Lune} = 3350 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad M_{Lune} = 7.3477 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

Dans les deux cas, on prendra les modules de rigidité typiques d'une roche¹ : $\lambda = \mu = 30\text{GPa}$.

3.4 Étude des déformations de la planète

Montrer que tous les points matériels du corps subissent une contraction de leur volume mais qu'il existe un rayon critique, à déterminer, au-delà duquel la déformation radiale, ε_{rr} , devient positive.

Calculer la réduction de volume de la planète due aux forces de gravitation.

¹ Le cas $\lambda = \mu$ correspond à un coefficient de Poisson égal à 0.25, valeur souvent prise par défaut en l'absence de mesures précises (délicates pour ν).

3.5 Pression au centre de la planète

Montrer que la pression p_{\odot} au centre de la boule étudiée se met sous la forme

$$p_{\odot} = \frac{\rho_0 g_R R}{10} \frac{3 - \nu}{1 - \nu} \quad (7)$$

où g_R est la valeur absolue de l'accélération de la pesanteur à la surface de la planète, et ν est le coefficient de Poisson du matériau constitutif de la planète. La pression au centre de la planète ne dépend donc pas du module de Young du matériau.

Comparer cette expression à la relation obtenue pour la planète fluide. Commenter.

3.6 Limites de l'approche

Exprimer les contraintes $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$. Étudier notamment les valeurs obtenues en surface. En quoi ne sont-elles pas très réalistes ? Quelle(s) hypothèse(s) de l'approche proposée pourrait être remise en question à ce propos ?

Une autre limitation de l'approche est liée au fait que le comportement de la roche est supposé élastique alors que les valeurs numériques obtenues pour la Lune par exemple suggèrent que la limite d'élasticité soit systématiquement dépassée.

Pour le voir, on considère le critère de plasticité de Tresca qui stipule que la limite d'élasticité est atteinte en un point donné lorsque

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_0$$

où σ_1 et σ_3 sont respectivement la plus grande et la plus petite des contraintes principales en ce point. Le cisaillement maximal est τ_0 . En imaginant que l'on puisse accroître la constante de gravitation de 0 jusqu'à la valeur connue, indiquer pour quelle valeur de \mathcal{G} et à quel endroit de la planète la plasticité va commencer.

En considérant ensuite la valeur connue de \mathcal{G} , déterminer le rayon maximal du corps céleste solide pour que la limite d'élasticité ne soit jamais atteinte.

Application numérique : calculer ce rayon critique pour un corps ayant la même masse volumique que la Lune et une limite d'élasticité typique $\tau_0 = 100$ MPa. Commenter.

La prise en compte de la plasticité sera considérée à la fin de la partie suivante qui aborde une configuration plus réaliste des corps tels que la Lune et la Terre.

4 Planète possédant un noyau fluide et un manteau solide

La structure interne des planètes et satellites comporte souvent un noyau liquide de rayon a entouré d'un manteau solide d'épaisseur $R - a$. L'objectif de cette partie du problème est de la prendre en compte dans l'analyse des contraintes induites par les forces de masse. La Terre comporte en outre une graine solide au sein du noyau. L'existence d'une graine solide n'est pas intégrée dans la présente analyse pour des raisons de brièveté car elle conduit à des développements très similaires.

Le noyau et la planète elle-même sont des boules concentriques de rayons a et R , respectivement. Pour simplifier les calculs, on considérera la même masse volumique de référence

ρ_0 pour le manteau et le noyau. Le manteau est constitué d'une roche dont le comportement est décrit par une loi d'élasticité linéarisée (coefficients de Lamé λ et μ). L'analyse est réalisée sous l'hypothèse des petites perturbations par rapport à un état naturel de référence pour les deux matériaux.

4.1 Loi de comportement du noyau fluide

Le noyau liquide est représenté par un milieu fluide élastique dont la loi de comportement relie la pression à la masse volumique du milieu de la manière suivante :

$$p(\rho) = \chi \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \quad (8)$$

où χ est la caractéristique élastique du milieu.

Il est possible d'identifier formellement la loi de comportement précédente avec la loi de Hooke d'un solide élastique isotrope. A quelles valeurs des coefficients de Lamé, exprimés en fonction de χ , correspond-elle ?

4.2 Détermination du champ de déplacement

L'inconnue principale du problème est à nouveau la composante radiale du déplacement, notée $u(r)$ pour $0 \leq r \leq a$ et $u_1(r)$ pour $a \leq r \leq R$.

Donner les équations différentielles régissant u et u_1 .

Donner la forme des solutions. Montrer qu'elles font intervenir 4 constantes d'intégration, A, A_1, B, B_1 et les deux constantes :

$$K = \frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{15\chi}, \quad K_1 = \frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{15(\lambda + 2\mu)}$$

4.3 Conditions aux limites et d'interface

Donner les quatre conditions permettant de déterminer les constantes d'intégration précédentes.

Poser le système d'équations linéaires dont ces constantes sont les solutions. On ne demande pas de résoudre ce système.

4.4 Discussion des résultats

La résolution du système précédent conduit à la détermination des déplacements, des déformations et des contraintes au sein de la planète. Les profils correspondants sont donnés sur la figure 1 pour la Terre et la Lune avec les caractéristiques suivantes :

Lune : $\chi = \lambda = \mu = 30 \text{ GPa}$, $\rho_0 = 3500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $a = 500 \text{ km}$.

Terre : $\chi = \lambda = \mu = 30 \text{ GPa}$, $\rho_0 = 5500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $a = 3500 \text{ km}$.

Commenter l'ensemble de ces résultats. De nombreuses remarques s'imposent.

Finalement, constatez-vous une amélioration du réalisme des résultats par rapport à ceux obtenus en considérant la planète comme un solide homogène ?

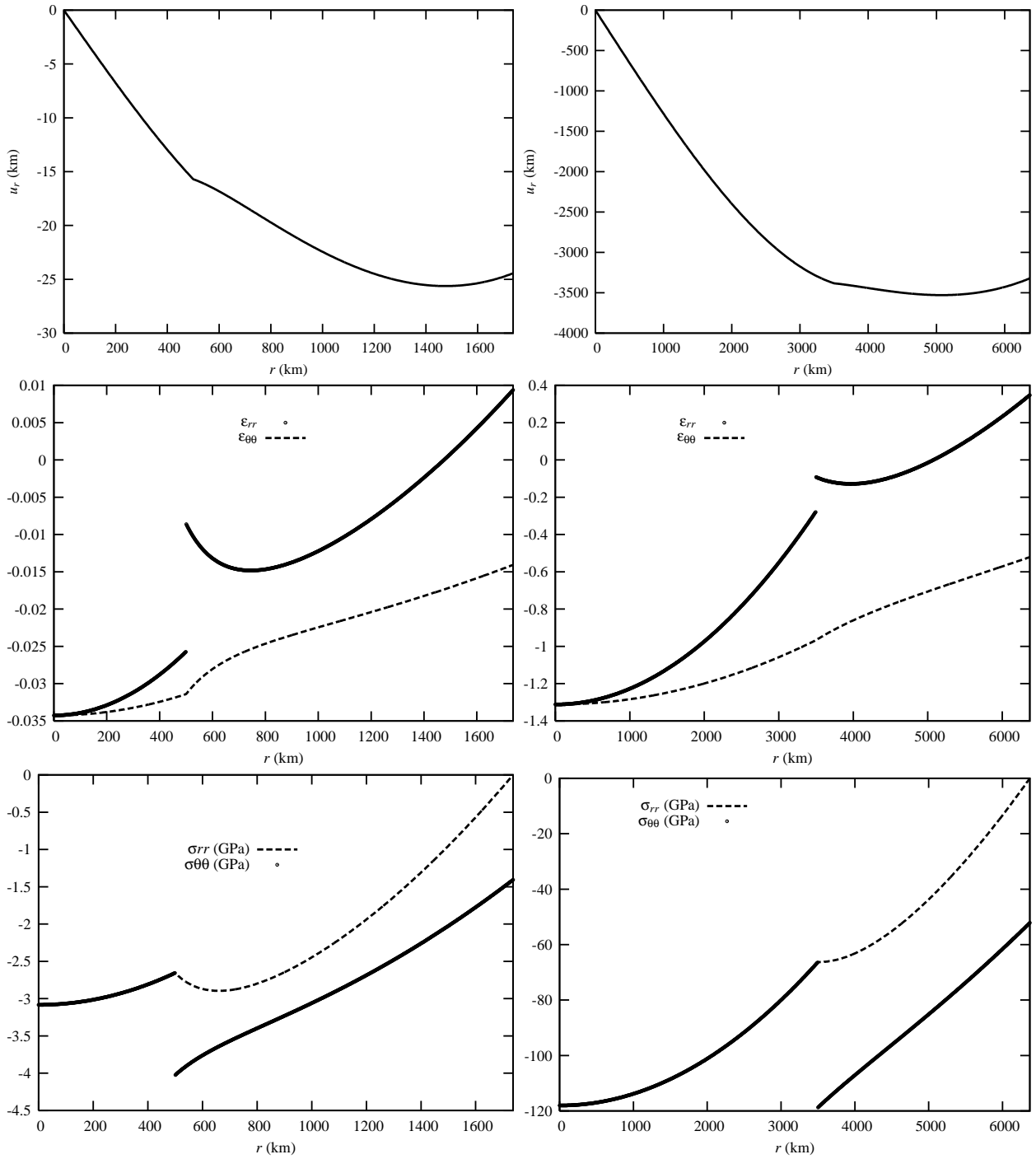


FIG. 1 – Profils de déplacement (haut), déformations (milieu) et contraintes (bas). Les courbes de la colonne de gauche (resp. droite) concernent la Lune (resp. la Terre).

4.5 Plasticité du manteau

Pour des planètes suffisamment massives, il est légitime de considérer que l'ensemble des points matériels du manteau ont atteint la limite d'élasticité. En l'absence d'écroutissage ou d'endommagement, ce contexte de plasticité généralisée se traduit par le fait que

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2\tau_0, \quad \text{pour tout } a \leq r \leq R \quad (9)$$

En prenant en compte ce fait, reprendre l'équation d'équilibre en contraintes et la résoudre pour les points du manteau.

En supposant que le noyau reste un fluide élastique, obtenir le champ de contraintes sur toute la planète. On ne demande pas de déterminer les déformations, ni le déplacement.

Montrer enfin que cette solution fournit une excellente estimation de la pression au centre de la Lune.

* * *