

Poutre droite de section quelconque soumise à un effort tranchant

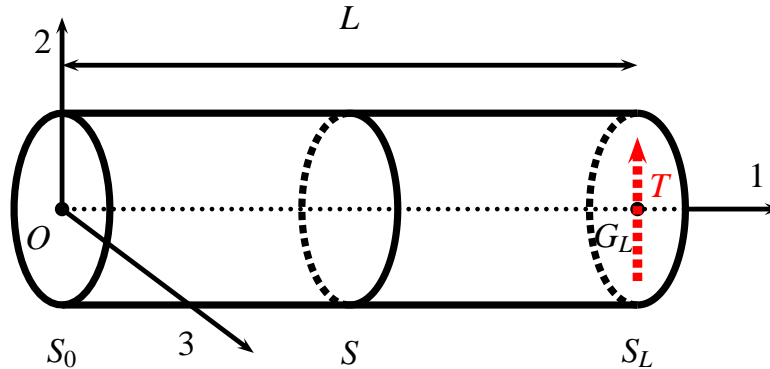
On considère une poutre cylindrique Ω de longueur L et de section droite¹ courante S simplement connexe de forme quelconque. Les frontières de Ω sont ses extrémités, à savoir les sections S_0 et S_L , et le contour latéral \mathcal{A} , de sorte que le bord $\partial\Omega = S_0 \cup \mathcal{A} \cup S_L$. Les barycentres des sections S_0 et S_L sont respectivement les points O et G_L . L'axe 1 du système de coordonnées cartésiennes orthonormées utilisé dans ce problème désigne l'axe du cylindre unissant les barycentres de toutes les sections. Les axes 2 et 3 sont choisis parallèles aux directions principales d'inertie des sections droites :

$$\int_S X_2 dS = \int_S X_3 dS = \int_S X_2 X_3 dS = 0$$

Les moments d'inertie principaux des sections sont notés :

$$I_3 = \int_S X_2^2 dS, \quad I_2 = \int_S X_3^2 dS$$

Soit R une dimension caractéristique de la section, par exemple la plus grande demi-distance entre deux points quelconques de la section.



La section S_L de la poutre est soumise à des efforts dont le torseur résultant est

$$\{G_L, \underline{\mathbf{R}}_L, \underline{\mathbf{M}}_L\} = \{G_L, T\mathbf{e}_2, 0\}$$

où T désigne l'effort résultant tangentiel appliqué sur S_L et traditionnellement appelé effort tranchant. Les surfaces latérales \mathcal{A} sont libres de tout effort appliqué.

Calculer le torseur $\{O, \underline{\mathbf{R}}_0, \underline{\mathbf{M}}_0\}$ des efforts à appliquer à la section S_0 pour que la poutre soumise à l'effort tranchant précédent soit en équilibre statique.

En l'état, le problème aux limites considéré est mal posé dans la mesure où seul le torseur des efforts appliqués aux extrémités est donné. Lorsque la poutre est suffisamment élancée, i.e. $R/L \ll 1$, le principe de Saint-Venant permet d'affirmer que la solution du problème, suffisamment loin des extrémités, ne dépend pratiquement pas de la façon dont ces efforts sont appliqués sur S_0 et S_L . L'objectif du problème est donc, d'une part, de proposer une

¹Une section droite désigne une section perpendiculaire à l'axe du cylindre.

distribution surfacique d'efforts permettant de réaliser les torseurs appliqués $\{O, \underline{\mathbf{R}}_O, \underline{\mathbf{M}}_O\}$ et $\{G_L, \underline{\mathbf{R}}_L, \underline{\mathbf{M}}_L\}$, et, d'autre part, de résoudre le problème d'équilibre élastique linéarisé bien posé correspondant.

La poutre, initialement dans son état naturel, est constituée d'un matériau homogène de comportement élastique isotrope linéaire. Le module de Young et le coefficient de Poisson sont notés E et ν respectivement. Dans l'ensemble du problème, on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. L'effet de la gravité ou d'efforts volumiques en général n'est pas pris en compte. La situation envisagée est isotherme et on ne considère pas les variations de température durant l'essai.

1 Contraintes dans la poutre

Nous allons mettre en œuvre la méthode des contraintes pour résoudre ce problème. Le tenseur des contraintes est recherché de la forme

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

1.1 Dépendance des fonctions inconnues

Les composantes des contraintes de la forme (1) sont a priori des fonctions des variables X_1, X_2, X_3 . Montrer toutefois que les composantes de cisaillement σ_{12} et σ_{13} ne peuvent pas dépendre de X_1 .

1.2 Forme des contraintes

Calculer le champ du tenseur des déformations régnant dans la poutre en fonction des composantes de contraintes inconnues.

En déduire que la composante axiale de contrainte est de la forme polynomiale suivante :

$$\sigma_{11} = a_1 X_1 X_2 + a_2 X_1 X_3 + a_3 X_1 + a_4 X_2 + a_5 X_3 + a_6 \quad (2)$$

où les $(a_i)_{i=1,6}$ sont six constantes que l'on déterminera dans la suite du problème.

Montrer également que les contraintes de cisaillement sont solutions des deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\Delta_2 \sigma_{12} + \frac{a_1}{1 + \nu} = 0, \quad \Delta_2 \sigma_{13} + \frac{a_2}{1 + \nu} = 0 \quad (3)$$

où $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2}$ est l'opérateur laplacien bidimensionnel dans le plan $(2, 3)$ des sections droites de la poutre.

1.3 Détermination des contraintes de cisaillement

Montrer que

$$a_1 X_2 + a_2 X_3 + a_3 + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \quad (4)$$

et, par conséquent, que

$$\frac{\partial}{\partial X_2} \left(\frac{a_3}{2} X_2 + a_2 X_2 X_3 + \sigma_{12} + f(X_3) \right) = \frac{\partial}{\partial X_3} \left(-\frac{a_3}{2} X_3 - a_1 X_2 X_3 - \sigma_{13} - g(X_2) \right) \quad (5)$$

où f et g sont des fonctions dérivables arbitraires.

En déduire qu'il existe une fonction $\psi(X_2, X_3)$ permettant d'exprimer les contraintes de cisaillement sous la forme :

$$\sigma_{12} = \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - \frac{a_3}{2} X_2 - a_2 X_2 X_3 - f(X_3) \quad (6)$$

$$\sigma_{13} = -\frac{\partial \psi}{\partial X_2} - \frac{a_3}{2} X_3 - a_1 X_2 X_3 - g(X_2) \quad (7)$$

Montrer enfin que l'on peut choisir f et g de telle sorte que la fonction ψ soit solution de l'équation

$$\Delta_2 \psi = A \quad (8)$$

où A est une constante encore indéterminée.

1.4 Forces et moments résultants

Montrer que l'on peut déterminer les constantes du polynôme (2) en fonction des conditions de chargement de la poutre :

$$\begin{aligned} a_2 = a_3 = a_5 = a_6 &= 0 \\ a_1 &= \frac{T}{I_3}, \quad a_4 = -\frac{LT}{I_3} \end{aligned}$$

Le champ des contraintes prend ainsi la forme

$$\sigma_{11} = \frac{T}{I_3} X_2 (X_1 - L), \quad \sigma_{12} = \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - \frac{a_1}{1 + \nu} \frac{X_3^2}{2}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial \psi}{\partial X_2} - a_1 X_2 X_3 \quad (9)$$

La forme des contraintes normales σ_{11} évoque les contraintes établies dans le cas de la flexion pure mais avec un moment variable $T(X_1 - L)$ dépendant de la position X_1 . C'est ainsi que l'application d'un effort tranchant s'accompagne nécessairement d'une composante de flexion.

1.5 Condition sur les surfaces latérales de la poutre

Ecrire la condition qui lie les contraintes en tout point du bord \mathcal{A} de la poutre. Interpréter cette relation en introduisant la contrainte tangentielle sur chaque section

$$\underline{\tau} = \sigma_{12} \underline{e}_2 + \sigma_{13} \underline{e}_3$$

A ce stade, on ne cherchera pas à exploiter cette condition.

2 Détermination des déplacements

La méthode systématique de construction du champ de déplacement à partir du champ de déformation établi dans la partie précédente est maintenant mise en œuvre. Montrer ainsi, au terme d'un travail méticuleux, que le champ de déplacement prend la forme

$$u_1 = \frac{a_1}{E} X_2 \left(\frac{X_1^2}{2} - LX_1 + \nu \frac{X_2^2}{6} - (2 + \nu) \frac{X_3^2}{2} \right) + \frac{1 + \nu}{E} \varphi(X_2, X_3) \quad (10)$$

$$u_2 = \frac{a_1}{E} \left(\frac{X_1^2}{2} \left(L - \frac{X_1}{3} \right) + \frac{\nu}{2} (X_1 - L)(X_3^2 - X_2^2) \right) + \frac{1 + \nu}{E} AX_1 X_3 \quad (11)$$

$$u_3 = a_1 \frac{\nu}{E} (L - X_1) X_2 X_3 - \frac{1 + \nu}{E} AX_1 X_2 \quad (12)$$

à un mouvement de corps rigide infinitésimal près. La composante u_1 , engendrée par la flexion, fait intervenir la fonction $\varphi(X_2, X_3)$, solution, à une constante près, du système d'équations

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - AX_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial X_2}, \quad -2 \frac{\partial \psi}{\partial X_2} + AX_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial X_3} \quad (13)$$

Justifier l'existence de cette fonction φ .

2.1 Fonction de gauchissement

La fonction φ est appelée fonction de gauchissement. Montrer qu'elle est solution d'un problème de Neumann posé sur une section S de contour ∂S , problème que l'on explicitera.

Vérifier que la condition nécessaire d'existence d'une solution au problème de Neumann ainsi posé est remplie. On admettra alors qu'une telle solution existe et est unique, à une constante près.

2.2 Détermination de la constante A

A l'aide d'une condition encore inexploitée jusqu'ici, établir l'équation permettant de déterminer la constante A apparue dans la formule (8). L'expression explicite de A ne pourra cependant pas être obtenue sans préciser la forme de la section.

Montrer que si la section S admet l'axe 2 comme axe de symétrie, alors la constante A est nulle. On admettra ce résultat si l'on n'a pu l'établir.

3 Cas d'une poutre de section circulaire

Les résultats précédents sont maintenant explicités dans le cas d'une poutre en forme de cylindre de révolution. La section de la poutre correspond alors à un disque de rayon R .

3.1 Fonction de gauchissement pour une section circulaire

Dans le cas d'une section circulaire, la fonction φ prend la forme polynomiale suivante que l'on admettra :

$$\varphi(X_2, X_3) = a_1 \frac{3 + 2\nu}{4(1 + \nu)} \left(X_3^2 X_2 - \frac{X_2^3}{3} + R^2 X_2 \right) \quad (14)$$

Vérifier qu'il s'agit bel et bien de la solution, à une constante près, du problème de Neumann posé au paragraphe 2.1.

3.2 Etude du contexte infinitésimal

Dans le cas d'une section circulaire, les champs de déplacements (10) à (12) prennent la forme suivante :

$$u_1 = \frac{a_1}{E} X_2 \left(X_1 \left(\frac{X_1}{2} - L \right) - \frac{1}{4} (X_2^2 + X_3^2) + \frac{1+2\nu}{4} R^2 \right) \quad (15)$$

$$u_2 = \frac{a_1}{E} \left(\frac{X_1^2}{2} \left(L - \frac{X_1}{3} \right) + \frac{\nu}{2} (X_1 - L) (X_3^2 - X_2^2) \right) \quad (16)$$

$$u_3 = a_1 \frac{\nu}{E} (L - X_1) X_2 X_3 \quad (17)$$

Donner les conditions portant sur T , E , R et L garantissant que les transformations obtenues restent infinitésimales. En notant $\epsilon = R/L \ll 1$ l'élanement de la poutre, identifier quelle est la condition la plus sévère ?

3.3 Déformée de la fibre moyenne et gauchissement de la section

Quelle forme prend la fibre moyenne initialement située en $X_2 = X_3 = 0$?

Montrer que les sections droites ne restent pas planes après déformation. Pour cela on pourra étudier la déformée de la ligne d'équation $X_1 = X_0$, $X_3 = 0$ à X_0 fixé. On appelle gauchissement de la surface cet écart à la planéité que l'on illustrera graphiquement.

3.4 Analyse des contraintes et limite d'élasticité

En tout point de chaque section droite, donner l'expression de la contrainte normale à cette section. A quel(s) endroit(s) la valeur absolue de cette contrainte normale est-elle maximale ? Quelle est la valeur de ce maximum en fonction de $|T|$ et de la géométrie de la poutre ?

Montrer que la norme de la contrainte tangentielle $\|\underline{\tau}\|$ est maximale au centre de chaque section et prend la valeur :

$$\|\underline{\tau}\|_{max} = |a_1| \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} R^2 = \frac{3+2\nu}{2(1+\nu)} \frac{|T|}{\pi R^2} \quad (18)$$

Indiquer quelle est, de la contrainte normale maximale et du cisaillement maximal, la contrainte dominante.

On suppose que la limite d'élasticité du matériau constitutif de la poutre est bien décrite par un critère de von Mises. Indiquer, qualitativement, à quel endroit de la poutre la plasticité va apparaître en tout premier lieu.

3.5 Application numérique : flèche de la poutre

Dans le cas d'une poutre en acier de dimensions $L = 100$ mm et $R = 10$ mm encastree en S_0 et soumise à un effort tranchant T , réalisé en suspendant un poids de 100 kg à l'extrémité S_L , calculer la flèche de la poutre, définie comme le déplacement u_2 du barycentre de la section S_L . L'encastrement en S_0 sera traduit ici par le fait que le barycentre de S_0 ne se déplace pas et que la section S_0 ne subit aucune rotation de corps rigide. Vérifier que le contexte infinitésimal est bien respecté dans ces conditions.

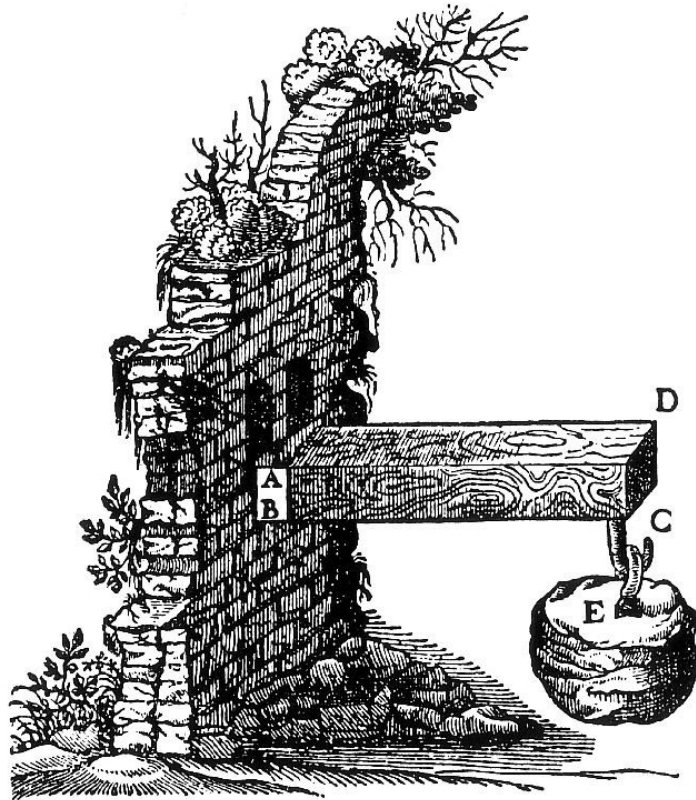


FIG. 1 – Dessin paru dans les *Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due nuoue scienze attenanti alla mecanica ed i movimenti locali* de Galilée (1638).

Cette situation correspond peu ou prou au problème considéré par Galilée comme le montre le fameux dessin de la figure 1, à ceci près que Galilée a considéré une poutre en bois de section rectangulaire.

Evaluer les contraintes tangentielles et normales maximales. Pensez-vous que la limite d'élasticité soit franchie et que la poutre métallique soit irrémédiablement fléchie par cette charge ?

4 Le problème de Saint–Venant (question subsidiaire)

Arrivés au terme de la résolution du problème de la poutre soumise à un effort tranchant, et forts de la connaissance des solutions des problèmes de traction/compression simple, flexion pure et torsion d'une poutre acquises en exercice, justifier que nous sommes en mesure de fournir une solution exhaustive au problème dit de Saint-Venant consistant à imposer un torseur quelconque donné sur l'une des extrémités de la poutre.

Saint–Venant publia pour la première fois la solution générale de ce problème en 1856 dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences.

* * *