

Ondes de surface et tremblements de terre

L'objectif du problème est de mettre en évidence l'existence d'ondes de surface dans les milieux élastiques isotropes, ondes dont l'importance physique et humaine apparaîtra clairement grâce à l'application numérique consacrée aux tremblements de terre.

Dans l'ensemble du problème, on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. L'effet de la gravité n'est pas pris en compte.

1 Préliminaires

On sait que deux types d'ondes peuvent se propager dans un milieu homogène élastique linéaire et isotrope, à savoir les ondes longitudinales et les ondes transversales. On admet que le champ de déplacement au sein d'un tel milieu peut se décomposer en deux contributions :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\mathbf{u}}_L(\underline{\mathbf{X}}) + \underline{\mathbf{u}}_T(\underline{\mathbf{X}}) \quad (1)$$

telles que

$$\text{rot } \underline{\mathbf{u}}_L = 0 \quad \text{et} \quad \text{div } \underline{\mathbf{u}}_T = 0 \quad (2)$$

où div et rot désignent respectivement les opérateurs divergence et rotationnel.

On rappelle que le champ de déplacement d'un tel milieu vérifie les équations de Navier

$$(\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div } \underline{\mathbf{u}}) + \mu\Delta\underline{\mathbf{u}} = \rho\underline{\mathbf{a}} \quad (3)$$

en l'absence d'efforts de volume et où $\underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{X}})$ désigne le champ d'accélération du milieu. Les constantes de Lamé du milieu sont λ et μ . L'opérateur Δ représente le laplacien¹.

1.1 Equations des ondes

Montrer (ou admettre) que si, dans un corps homogène élastique linéaire et isotrope, le champ $\underline{\mathbf{u}}_L$, dit onde longitudinale, et le champ $\underline{\mathbf{u}}_T$, dit onde transversale, vérifient, séparément, les équations de Navier, alors ils satisfont également aux équations d'ondes :

$$c_L^2 \Delta \underline{\mathbf{u}}_L = \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}_L}{\partial t^2}, \quad c_T^2 \Delta \underline{\mathbf{u}}_T = \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}_T}{\partial t^2} \quad (4)$$

où c_L et c_T désignent respectivement la célérité des ondes longitudinales et la célérité des ondes transversales que l'on exprimera en fonction des caractéristiques du milieu.

1.2 Rapport des célérités

Exprimer le rapport des célérités des ondes transversales et longitudinales en fonction du coefficient de Poisson. En déduire que, quel que soit le milieu homogène élastique linéaire et isotrope considéré, on a :

$$0 < c_T < c_L \quad (5)$$

¹ Le laplacien d'un champ de vecteur, dans un système de coordonnées cartésiennes, est le vecteur ayant pour composantes le laplacien de chaque composante correspondante.

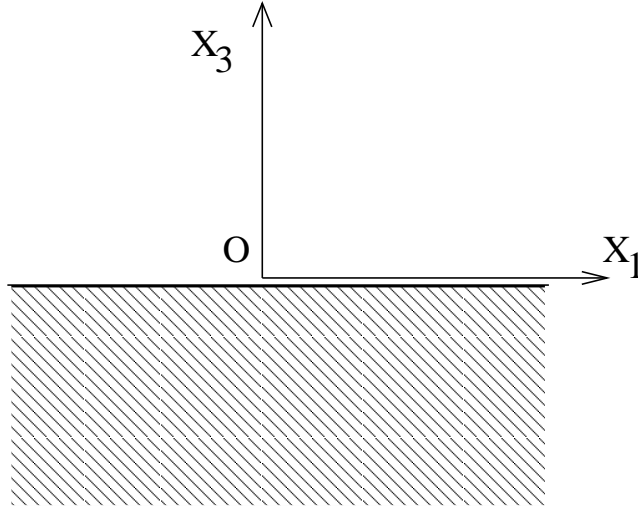


FIG. 1 – Coupe par le plan (X_1, X_3) d'un massif semi-infini et repérage correspondant.

2 Ondes dans un massif semi-infini

On considère un massif semi-infini limité par le plan $X_3 = 0$, selon le système de coordonnées cartésiennes orthonormées défini sur la figure 1. L'origine du repère et l'orientation de l'axe 3 sont choisies de telle sorte que les points matériels du massif soient caractérisés par $X_3 \leq 0$. Dans cette partie, les conditions aux limites sur la surface $X_3 = 0$ ne sont pas encore spécifiées. Le milieu semi-infini est constitué d'un matériau homogène, au comportement élastique linéarisé et isotrope.

On s'intéresse aux ondes planes se propageant dans la direction 1 et invariantes selon la direction 2. Elles s'expriment comme la superposition d'une onde longitudinale et d'une onde transversale que l'on représente sous la forme exponentielle complexe suivante :

$$\underline{\mathbf{u}}_L(\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\mathbf{f}}^L(X_3)e^{ik(X_1-ct)}, \quad \underline{\mathbf{u}}_T(\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\mathbf{f}}^T(X_3)e^{ik(X_1-ct)} \quad (6)$$

Le vecteur d'onde admet $k > 0$, le nombre d'onde, comme unique composante réelle non nulle, dans la direction 1. La célérité de l'onde est réelle et vaut c . En outre, $i^2 = -1$. Dans cette représentation, les champs recherchés correspondent aux parties réelles des champs précédents. Les champs $\underline{\mathbf{u}}_L$ et $\underline{\mathbf{u}}_T$ recherchés vérifient les équations de Navier et les conditions (2).

Les grandeurs $\underline{\mathbf{f}}^L(X_3)$ et $\underline{\mathbf{f}}^T(X_3)$ sont deux champs de vecteurs à déterminer, ne dépendant que de la variable X_3 et caractérisant l'amplitude des ondes étudiées.

2.1

Donner les deux équations différentielles vectorielles régissant les fonctions $\underline{\mathbf{f}}^L(X_3)$ et $\underline{\mathbf{f}}^T(X_3)$.

2.2 Ondes de surface

On s'intéresse dans la suite du problème aux ondes de surface dont l'amplitude décroît exponentiellement lorsque $X_3 \rightarrow -\infty$.

Justifier que de telles ondes de surface ne peuvent exister que si leur célérité est plus faible que la célérité des ondes transversales dans le volume :

$$c < c_T \quad (7)$$

Montrer que les amplitudes de telles ondes de surface se mettent sous la forme :

$$\underline{\mathbf{f}}^L = \underline{\mathbf{A}} e^{b_L X_3}, \quad \underline{\mathbf{f}}^T = \underline{\mathbf{B}} e^{b_T X_3} \quad (8)$$

avec

$$b_L = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_L^2}}, \quad b_T = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}} \quad (9)$$

2.3

Montrer que l'onde longitudinale $\underline{\mathbf{u}}_L$ n'a pas de composante dans la direction 2 : $A_2 = 0$.

Etablir deux autres relations, l'une portant sur certaines composantes de $\underline{\mathbf{A}}$ et l'autre sur certaines composantes de $\underline{\mathbf{B}}$.

3 Ondes de Rayleigh

On considère maintenant que la surface X_3 du massif semi-infini précédent est libre de tout effort. Dans ce cas, les ondes de surfaces sont appelées ondes de Rayleigh qui les mit en évidence de manière théorique en 1887. La forme obtenue précédemment est rappelée ci-dessous :

$$[\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t)] = \begin{bmatrix} A_1 e^{b_L X_3} + B_1 e^{b_T X_3} \\ B_2 e^{b_T X_3} \\ A_3 e^{b_L X_3} + B_3 e^{b_T X_3} \end{bmatrix} e^{ik(X_1 - ct)} \quad (10)$$

3.1 Déformations

Calculer le gradient du champ de déplacements (10) et le champ des déformations infinitésimales correspondantes.

Indiquer les conditions assurant le respect du contexte infinitésimal.

3.2 Contraintes

Calculer le champ des contraintes associées, toujours dans le cadre de l'élasticité homogène isotrope linéarisée.

3.3 Polarisation des ondes de Rayleigh

En utilisant la condition aux limites de surface libre en $X_3 = 0$, montrer que $B_2 = 0$. Cela signifie que $u_2 = 0$ et que les ondes de Rayleigh sont polarisées dans le plan (1,3). C'est une caractéristique importante de ce type d'ondes de surface.

3.4 Equation de Rayleigh

En achevant l'exploitation de la condition aux limites en $X_3 = 0$, établir que le carré du rapport c/c_T de la célérité des ondes de Rayleigh sur la célérité des ondes transversales en volume est racine du polynôme suivant :

$$P(\xi) = \xi^3 - 8\xi^2 + 8\xi\left(3 - 2\frac{c_T^2}{c_L^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_T^2}{c_L^2}\right) \quad (11)$$

La célérité des ondes de Rayleigh ne dépend donc que des célérités des ondes élastiques volumiques. En particulier, elle ne dépend pas du vecteur d'onde k .

3.5

Montrer qu'il existe au moins une racine du polynôme $P(\xi)$ satisfaisant aux exigences requises pour c . On peut montrer que cette racine est unique mais on l'admettra ici.

On établira enfin que le rapport des amplitudes des ondes de Rayleigh transversale et longitudinale vaut :

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{2c_T^2}{2c_T^2 - c^2} \quad (12)$$

3.6 Trajectoires des points matériels

En utilisant les résultats de la question 2.3 et les équations (10) et (12), indiquer la forme de la trajectoire des points matériels situés à la surface libre du massif. Dans quel sens parcourent-ils leur trajectoire ?

Quelle serait la trajectoire de ces points si le milieu était constitué d'un fluide au comportement élastique linéarisé ?

3.7 Formation d'une faille due à un tremblement de terre

Le milieu est constitué d'une roche fragile supposée isotrope dont la contrainte à rupture vaut σ_0 . Déterminer la valeur critique du produit kA_1 pour laquelle une faille peut se former à la surface du massif. Indiquer également l'orientation de la première faille à se former.

4 Ondes de Love

Lord Rayleigh a montré que les ondes de surface dans un massif solide semi-infini homogène, élastique et isotrope, sont polarisées dans le plan (1,3) défini précédemment. Les sismogrammes révèlent toutefois l'existence d'une composante transversale u_2 lors de tremblements de terre dans les conditions étudiées. A.E.H. Love élucida ces observations en 1911 en considérant que le milieu géologique n'est pas homogène et que les ondes de surfaces peuvent être canalisées dans une couche d'épaisseur H déposée sur un massif semi-infini, comme sur la figure 2. Le milieu (b) constituant le massif semi-infini et le milieu (a) constituant la couche supérieure sont des solides ayant des comportements élastiques linéarisés isotropes distincts. Le module de cisaillement et la célérité des ondes transversales de volume sont appelés μ^a et c_T^a dans la couche et μ^b et c_T^b dans le massif semi-infini. L'interface, supposée parfaite, entre la couche et le massif est le plan $X_3 = 0$. Les coordonnées négatives $X_3 \leq 0$ désignent les points du massif,

tandis que les points matériels de la couche sont tels que $0 \leq X_3 \leq H$. La surface $X_3 = H$ est libre de tout effort.

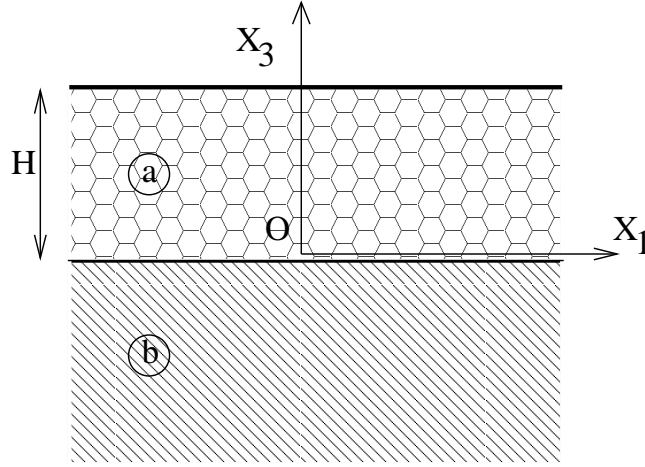


FIG. 2 – Massif semi-infini (b) supportant une couche (a) constituée d'un matériau différent ; repérage correspondant.

On explore la possibilité de la propagation dans la direction 1 d'une onde transversale dans les deux milieux, dont le déplacement associé est dans la direction 2 et de la forme :

$$u_1^a = 0, \quad u_2^a = f(X_3)e^{ik(X_1-ct)}, \quad u_3^a = 0 \quad (13)$$

$$u_1^b = 0, \quad u_2^b = Ae^{bX_3}e^{ik(X_1-ct)}, \quad u_3^b = 0 \quad (14)$$

dont on cherche les caractéristiques $f(X_3)$, A , b en fonction de k et c , ces deux grandeurs étant supposées identiques pour les deux milieux.

4.1

Trouver l'équation différentielle régissant la fonction $f(X_3)$. Trouver la relation liant b , k et c . Montrer qu'une onde évanescence dans le milieu (b), c'est-à-dire décroissant exponentiellement lorsque $X_3 \rightarrow -\infty$, ne peut exister qu'à la condition que

$$c_T^a < c < c_T^b \quad (15)$$

ce qui impose en outre une restriction sur les propriétés relatives des deux milieux considérés, à savoir $c_T^a < c_T^b$.

4.2 Conditions aux limites et d'interface

Formuler de manière exhaustive les conditions aux limites et d'interface du problème des ondes de Love.

4.3 Equation de dispersion

Par une démarche très similaire à celle adoptée pour les ondes de Rayleigh, en déduire la relation liant k et c , dite relation de dispersion.

Contrairement au cas des ondes de Rayleigh dont la célérité ne dépend que de c_T et c_L , on constate que la célérité des ondes de Love dépend de k , ce qui traduit le caractère dispersif de ce type d'ondes. L'inhomogénéité du milieu est donc source de dispersion pour les ondes élastiques.

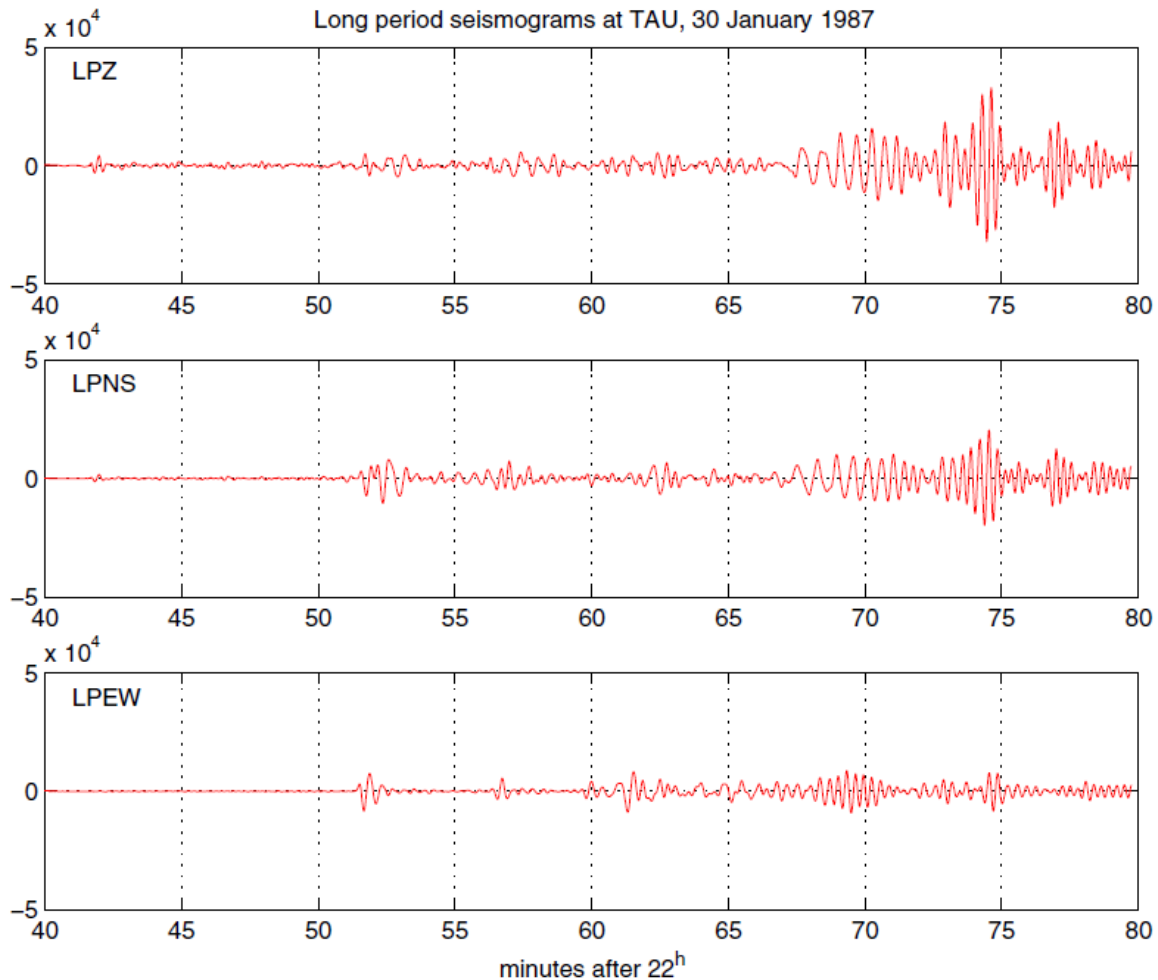


FIG. 3 – Trois sismogrammes enregistrés à la station de Tasmanie rendant compte d'un tremblement de terre ayant eu lieu en Antarctique, exactement au sud de la station.

5 Application au manteau terrestre

5.1 Cas d'une roche du manteau terrestre

L'écorce terrestre est constituée d'une roche ayant peu ou prou les propriétés suivantes :

$$\rho = 3.3 \text{ g.cm}^{-3}, \quad \mu = 67 \text{ GPa}$$

Calculer numériquement les valeurs de c_T et c_L , en adoptant successivement les valeurs suivantes du coefficient de Poisson ν : -1 ; 0 ; 0.25 ; 0.5.

L'équation de Rayleigh a une solution évidente lorsque le coefficient de Poisson $\nu = 0.25$. Donner la célérité correspondante.

Le manteau supérieur, d'une épaisseur $H = 35$ km, a en fait une densité et un module de cisaillement plus faibles que la roche précédente :

$$\rho^a = 2.7 \text{ g.cm}^{-3}, \quad \mu^a = 33 \text{ GPa}$$

Calculer la célérité des ondes de Love.

5.2 Interprétation d'un sismogramme

La figure 3 montre trois sismogrammes enregistrés par une station australienne. Les sismographes LPZ, LPNS et LPEW enregistrent respectivement les mouvements verticaux, Nord-Sud et Est-Ouest.

Proposer un scénario plausible de la succession des événements observés, le premier événement apparaissant à 22h42.

Justifier en particulier la raison pour laquelle les événements après 23h07 sont particulièrement intenses.

* * *