

Dislocations de Volterra

Des contraintes internes peuvent exister dans un corps homogène élastique sans chargement extérieur imposé. Il s'agit d'un champ d'*auto-contraintes*, dont la divergence est nulle en l'absence de forces volumiques, et qui est tel que le vecteur contrainte soit nul sur les surfaces du corps. Les champs d'auto-contraintes étudiés dans ce problème sont dus à la présence d'une *dislocation*, défaut linéique dont on va préciser la formation.

Un cylindre creux de rayon intérieur r_i , de rayon extérieur r_e , d'axe \underline{e}_z et de longueur L , subit les opérations suivantes de formation d'une dislocation, qui sont des cas particuliers de la procédure générale établie par Volterra¹ :

1. Le cylindre est coupé le long du plan $\theta = 0$, comme sur la figure 1(a).
2. Une lèvre de la coupure est déplacée d'un mouvement de translation de vecteur \underline{b} , constant et pris parallèle au plan de la coupure, par rapport à l'autre face de la coupure.
3. Les surfaces de coupure sont ensuite définitivement soudées, point par point, par un moyen ou par un autre.
4. Les efforts qui ont été nécessaires au déplacement relatif des lèvres sont finalement relâchés. Ils sont en fait repris, au moins partiellement, par des contraintes internes. Le corps est alors dans un état d'auto-contraintes et de déformations à déterminer.

L'axe du cylindre défectueux est appelé *ligne de dislocation*.

L'étude est menée dans le contexte des petites perturbations pour un milieu isotrope, dans son état initial naturel, au comportement élastique linéarisé. On utilise en général un système de coordonnées cylindriques comme sur la figure 1(a). La coordonnée X_3 est aussi notée z dans la suite. Les fonctions de la variable angulaire θ considérées dans ce problème seront définies, sauf mention contraire, sur le domaine suivant :

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

1 Dislocation–vis

Le défaut introduit est appelé dislocation–vis lorsque le vecteur de translation \underline{b} est parallèle à la ligne de dislocation :

$$\underline{b} = b \underline{e}_z \quad (1)$$

On recherche les composantes de déplacements u_r, u_θ et u_z associés à ce défaut, par rapport à la configuration initiale du cylindre intact, sans coupure. Manifestement, la composante u_z présente une discontinuité en $\theta = 0$. Les composantes u_r et u_θ , par contre, sont continues à la traversée de la coupure.

Dans un premier temps, jusqu'à la question 1.8, on ne se préoccupe pas de la dépendance en z de ces fonctions, ni des conditions aux extrémités du cylindre $z = 0, z = L$. On recherche alors une solution en déplacements de la forme :

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_z(r, \theta) \quad (2)$$

¹ L'article original de V. Volterra date de 1907.

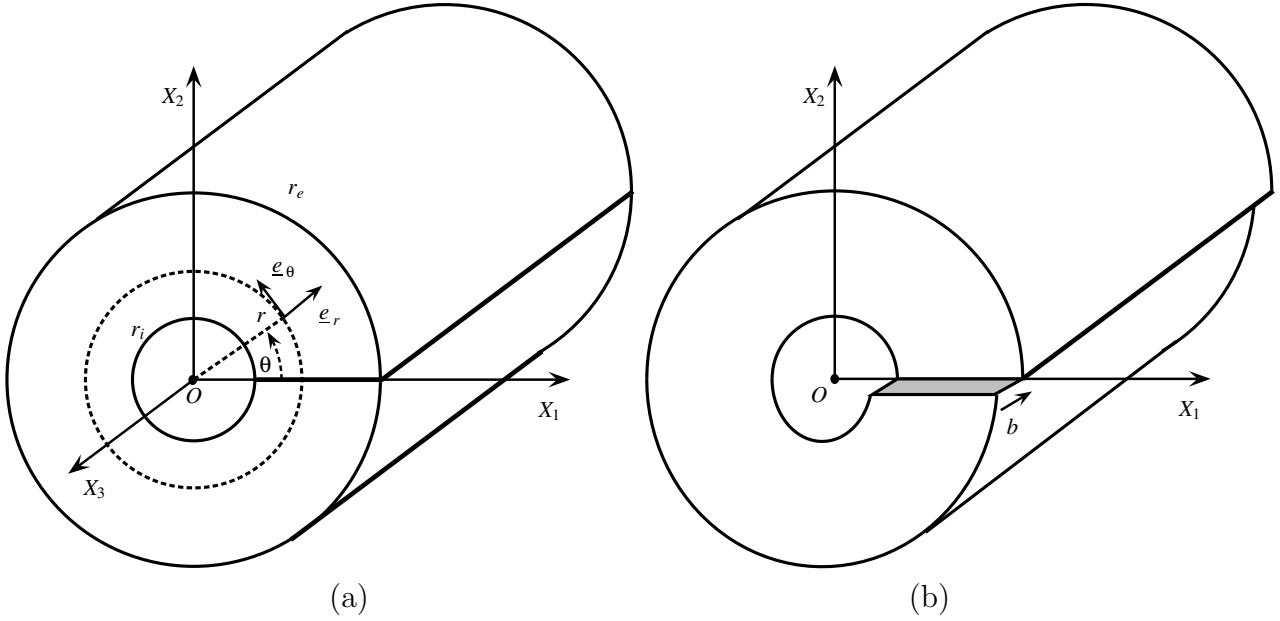


FIG. 1 – Procédure de fabrication d’une dislocation dans un cylindre creux : (a) coupure dans le cylindre initial, repérages utilisés dans le problème, (b) dislocation–vis.

La discontinuité du déplacement u_z est due au déplacement relatif égal à \underline{b} imposé aux lèvres avant de les coller :

$$u_z(r, \theta = 0^+) - u_z(r, \theta = 2\pi^-) = b, \quad \forall r \in [r_i, r_e] \quad (3)$$

où les notations introduites désignent les limites suivantes :

$$u_z(r, 0^+) = \lim_{\theta \rightarrow 0, \theta > 0} u_z(r, \theta), \quad u_z(r, 2\pi^-) = \lim_{\theta \rightarrow 2\pi, \theta < 2\pi} u_z(r, \theta) \quad (4)$$

On se propose enfin de rechercher une fonction $u_z(\theta)$ qui ne dépendrait pas de r .

1.1 Champ de déplacements

Montrer que, dans ce cas, la dépendance de u_z par rapport à θ est nécessairement affine et que l’expression suivante du déplacement peut être adoptée :

$$u_z(\theta) = -\frac{b\theta}{2\pi} \quad (5)$$

Noter que la fonction $u_z(\theta)$ est à valeurs multiples puisqu’elle prend deux valeurs distinctes sur le plan de coupure. On obtient une fonction à valeurs simples en éliminant le plan de coupure du domaine de définition, désormais restreint à :

$$0 < \theta < 2\pi \quad (6)$$

Ce sera le domaine de définition des fonctions de θ considérées dans la suite de ce problème, sauf mention contraire.

1.2 Vecteur de Burgers

On considère un cercle Γ_0 d'équation $r = r_0$ tracé sur une section de la configuration initiale du cylindre (voir la partie gauche de la figure 2). On appelle *vecteur de Burgers* de la dislocation l'intégrale le long de Γ_0 de l'élément de fibre matérielle déformé \underline{dx} :

$$\oint_{\Gamma_0} \underline{dx}(\underline{X}) \quad (7)$$

Calculer le vecteur de Burgers pour la dislocation-vis et montrer qu'il est indépendant du contour fermé choisi pour le calculer.

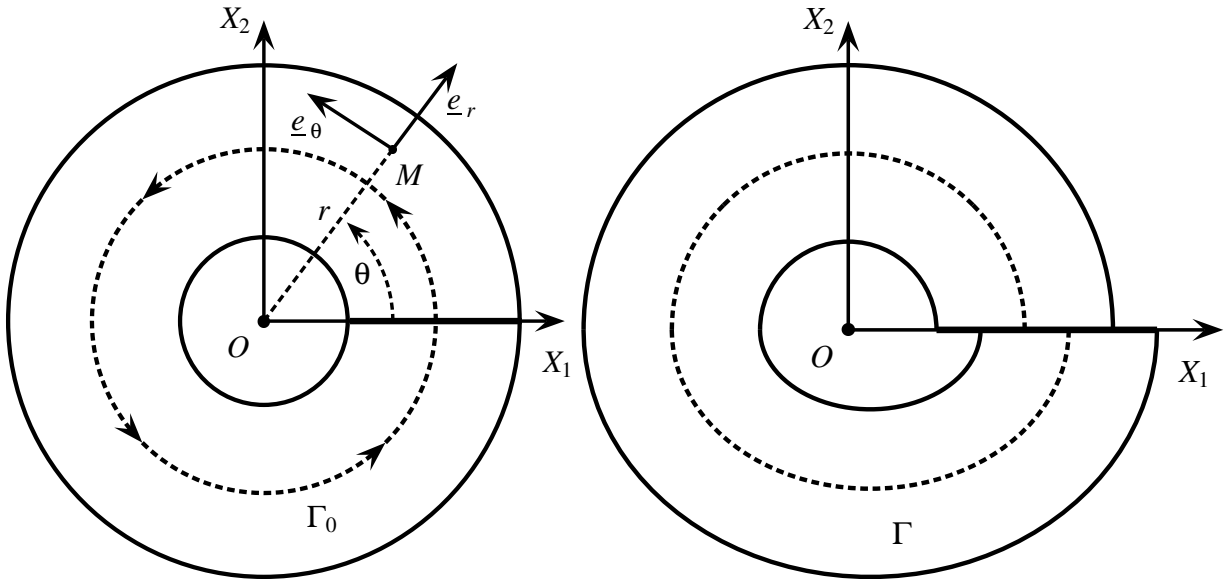


FIG. 2 – Section initiale (à gauche) et actuelle (à droite) du cylindre déformé par une dislocation-coin.

1.3 Champs de contraintes et de déformations

Calculer les déformations et les contraintes associées au champ de déplacements précédent. Remarque qu'elles sont continues pour toutes les valeurs de θ .

Préciser les conditions imposées par le contexte infinitésimal.

1.4 Equilibre et conditions aux limites en contraintes

Confirmer que les équations d'équilibre volumique sont vérifiées par les contraintes précédentes. Les conditions aux limites sur les bords intérieur $r = r_i$ et extérieur $r = r_e$ du cylindre le sont-elles également ?

1.5 Energie élastique d'une dislocation-vis

Calculer l'énergie élastique stockée dans le cylindre, par unité de longueur de ligne de dislocation.

1.6 Cas où $r_i \rightarrow 0$

Que deviennent les contraintes et l'énergie stockée lorsque $r_i \rightarrow 0$? Comment interprétez-vous ce résultat ?

Nommer une situation physique pour laquelle un phénomène similaire se produit pour les contraintes, mais où le résultat pour l'énergie est fondamentalement différent ?

1.7 Influence du choix du plan de coupure

Montrer que les champs de déformations et de contraintes dues à la dislocation-vis ne dépendent pas du choix du plan de coupure $\theta = \theta_0$. Justifier cette remarque.

Il est remarquable de trouver un état d'énergie de déformation non nulle dans un corps homogène en l'absence de tout chargement extérieur. Si la coupure et les opérations 2 à 4 de la procédure de Volterra sont réalisées sur tout le plan $X_2 = 0$, i.e. $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, quels champs de déplacements, de déformations et de contraintes obtient-on ?

Comment se distinguent fondamentalement ces deux situations ?

1.8 Torseur résultant

En considérant cette fois-ci le torseur des efforts résultant sur l'une des extrémités du cylindre ($z = 0$ ou $z = L$), montrer que la solution proposée précédemment n'est finalement pas acceptable, même au sens de Saint-Venant.

1.9 Solution exacte au sens de Saint-Venant

Remédier à la difficulté rencontrée précédemment et obtenir une solution exacte, au sens de Saint-Venant, du problème de la dislocation-vis dans le cylindre de longueur L .

Donner les champs de contraintes, de déformations et de déplacements correspondants.

Commenter alors l'image de la figure 3, tirée de l'ouvrage (Friedel, 1964).

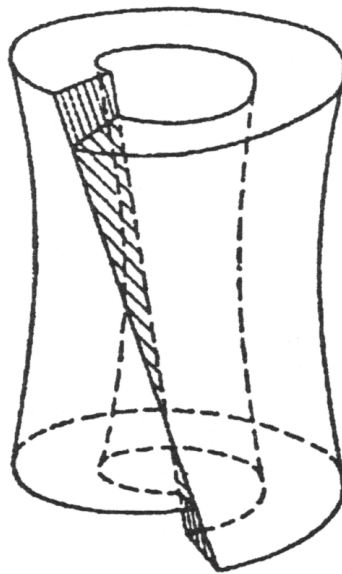


FIG. 3 – Dislocation-vis dans un cylindre de longueur finie, d'après (Friedel, 1964).

2 Dislocation–coin

Le défaut introduit dans le cylindre selon la procédure de Volterra est appelé *dislocation–coin* lorsque le vecteur de translation est orthogonal à la ligne de dislocation :

$$\underline{b} = b \underline{e}_1 \quad (8)$$

selon le repérage de la figure 1(a). La dislocation–coin est représentée sur la figure 4. Une section du cylindre défectueux correspondant est également donnée sur la figure 2 à droite.

Le champ de contraintes internes induit par une dislocation–coin est techniquement plus délicat à obtenir que celui de la dislocation–vis. On se contente ici de donner le résultat sans expliciter les étapes qui président à sa construction :

$$\sigma_{rr} = \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{r_i^2 + r_e^2} - \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 + r_e^2} \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \quad (9)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{3r}{r_i^2 + r_e^2} + \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 + r_e^2} \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \quad (10)$$

$$\sigma_{r\theta} = \alpha \left(-\frac{1}{r} + \frac{r}{r_i^2 + r_e^2} + \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 + r_e^2} \frac{1}{r^3} \right) \cos \theta \quad (11)$$

$$(12)$$

où α est une constante à déterminer dans la suite.

Faire un commentaire sur ce champ de contraintes.

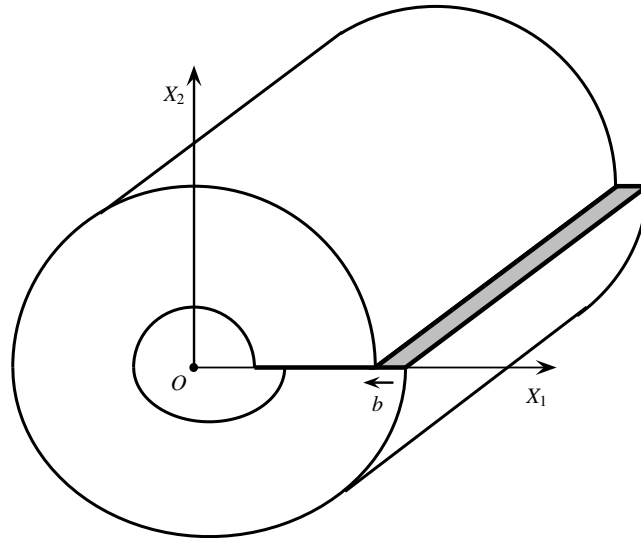


FIG. 4 – Dislocation–coin.

2.1 Equilibre volumique et conditions aux limites

On admet que le champ de contraintes précédent satisfait les équations d'équilibre volumique. Vérifier, par contre, que les conditions aux limites sur les bords $r = r_i$ et $r = r_e$ sont effectivement remplies.

2.2 Contraintes réduites

Donner une expression réduite des contraintes précédentes lorsque, simultanément, $r_e \rightarrow +\infty$ et $r \gg r_i$.

2.3 Contexte des déformations planes

Calculer la composante de contrainte σ_{zz} associée au champ réduit précédent, dans le contexte des déformations planes selon l'axe \underline{e}_z . Ce contexte suppose que

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0$$

2.4 Moment résultant

On considère un contour carré, de côté $2X_0$, autour de la ligne de dislocation, comme sur la figure 5, avec $X_0 \gg r_i$ et $r_e \rightarrow +\infty$. Montrer que les contraintes internes dues à la dislocation engendrent un moment résultant, par unité d'épaisseur de cylindre, sur la face d'équation $X_1 = X_0, |X_2| \leq X_0$.

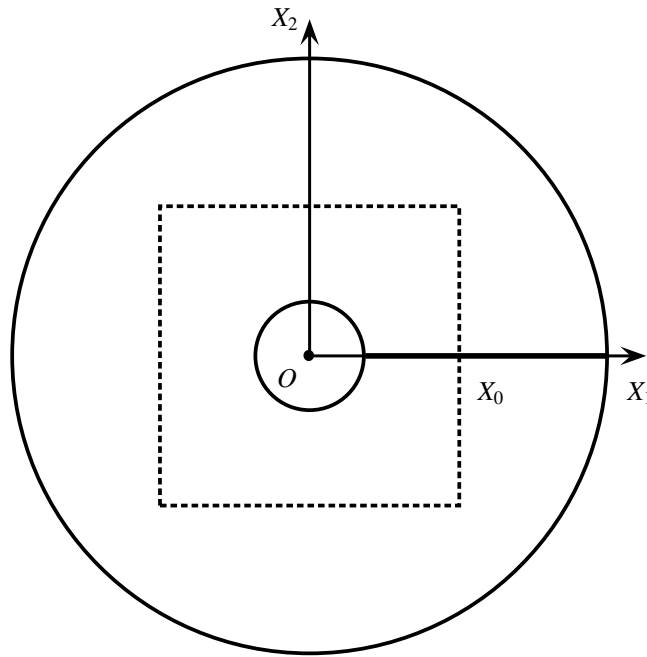


FIG. 5 – Contour carré autour de l'axe du cylindre.

2.5 Déformations et déplacements

Calculer les déformations associées au champ de contraintes dans sa forme réduite trouvée en 2.2.

Intégrer pas à pas ce champ pour en déduire un champ de déplacement correspondant.

Identifier au passage la constante α en fonction de la donnée du problème, à savoir b .

Déterminer alors les zones de dilatation et de contraction de la matière autour de la dislocation.

Quelques commentaires sur le champ de déplacements obtenu s'imposent. Indiquer une différence fondamentale entre les déplacements associés à la dislocation–coin et ceux trouvés pour la dislocation–vis.

Remarquer enfin que la soudure ne reste pas plane.

2.6 Energie d'une dislocation–coin

Calculer l'énergie élastique stockée dans le cylindre, par unité de longueur de ligne de dislocation.

2.7 Dislocation–coin équivalente

On soumet le cylindre parfait initial au champ de déplacements suivant :

$$u_r = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} ((1-2\nu)\sin\theta \log r - 2(1-\nu)\theta \cos\theta) \quad (13)$$

$$u_\theta = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} (-(1-2\nu)(1-\log r)\cos\theta + 2(1-\nu)(\theta \sin\theta + \cos\theta)) \quad (14)$$

définis sur l'intervalle :

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad (15)$$

Montrer que ce champ est à valeurs multiples si on le prolonge par continuité en $\theta = -\pi/2$ et $\theta = 3\pi/2$.

Montrer que le champ de déformations associé à ces déplacements est strictement le même que celui trouvé pour la dislocation–coin au paragraphe 2.5. En déduire que le champ de contraintes correspondant est auto–équilibré.

Proposer une procédure pour que s'établisse précisément le champ de déplacements décrit par les fonctions (13) à (15), dans le cylindre, au prix d'une coupure bien choisie. Faire le dessin correspondant.

Justifier alors que ce champ mérite tout autant le nom de dislocation–coin que celui étudié au paragraphe 2.5.

Calculer le vecteur de Burgers correspondant (voir figure 2).

On a donc mis en évidence deux champs de déplacements, à savoir celui trouvé en 2.5 et celui donné par les équations (13) à (15), conduisant aux mêmes champs de déformations. Montrer que la différence entre ces deux champs ne se limite pas à un mouvement de corps rigide. Ce résultat vous étonne-t-il ?

A quelle caractéristique topologique fondamentale du cylindre creux pourrait-on l'attribuer ?

3 Dislocation mixte

Une dislocation dans un cylindre est de caractère mixte lorsque son vecteur de Burgers possède une composante vis, parallèle à la ligne de dislocation, et une composante coin, perpendiculaire à la ligne :

$$\underline{\mathbf{b}} = b_{\perp}\underline{\mathbf{e}}_1 + b_{\odot}\underline{\mathbf{e}}_z \quad (16)$$

Donner, en le justifiant, le champ de contraintes et l'énergie d'une telle dislocation.

Références

Friedel, J. (1964). *Dislocations*. Pergamon.

* * *