

Concentration de contrainte dans une plaque trouée en traction

Ce problème a pour objectif de montrer que la présence de trous, et plus généralement d'entailles et autres congés de raccordement, conduit à un affaiblissement de la structure en raison de surcontraintes locales, appelées concentrations de contrainte. Il est donc bon d'éviter, autant que possible, le perçage ou l'usinage de défauts ou de parties fonctionnelles de ce type. Lorsque la présence de concentrateurs de contraintes est inévitable, il est nécessaire de connaître le **facteur de concentration de contrainte** associé à chaque géométrie, notion introduite dans ce problème, afin de dimensionner les structures.

Le cas de la traction d'une plaque percée d'un trou circulaire est analysé dans le détail avant d'évoquer d'autres concentrateurs tels que les trous elliptiques. L'étude est menée dans le contexte des petites perturbations pour un milieu isotrope, dans son état naturel, au comportement élastique linéarisé.

On commence par la description de l'outil de résolution privilégié pour les problèmes traités, à savoir les fonctions de contraintes ou fonctions d'Airy, qui sera appliqué dans les sections suivantes.

1 Préliminaire : fonction de contraintes et coordonnées cylindriques

La résolution d'un problème bidimensionnel d'élasticité isotrope linéarisée peut se ramener à la recherche d'une fonction, appelée fonction de contraintes introduite au paragraphe 8.3.3 du cours dont le contenu est brièvement rappelé ici. En coordonnées cartésiennes dans une base orthonormée et dans le cas où les contraintes sont recherchées sous la forme :

$$\sigma_{11}(x_1, x_2), \sigma_{22}(x_1, x_2), \sigma_{12}(x_1, x_2), \sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad (1)$$

et, en l'absence d'efforts volumiques, il existe une fonction $\chi(x_1, x_2)$ telle que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Les équations de compatibilité exigent alors que cette fonction soit biharmonique :

$$\Delta^2 \chi = \chi_{,1111} + \chi_{,2222} + 2\chi_{,1122} = 0$$

Les relations précédentes peuvent être traduites dans un système de coordonnées cylindriques, pour un champ de contraintes recherché de la forme

$$\sigma_{rr}(r, \theta), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta), \sigma_{r\theta}(r, \theta), \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad (2)$$

Il existe une fonction de contraintes $\chi(r, \theta)$ telle que

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \quad (4)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \quad (5)$$

L'opérateur bilaplacien s'écrit :

$$\Delta^2 \chi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (6)$$

Une famille assez vaste de fonctions biharmoniques est la suivante (la vérification n'est pas demandée) :

$$\begin{aligned} \chi(r, \theta) &= A_0 \log r + B_0 r^2 \log r + C_0 r^2 + D_0 \\ &+ (A_1 r \log r + B_1 r^3 + C_1 r + \frac{D_1}{r}) \cos \theta + (A_1^* r \log r + B_1^* r^3 + C_1^* r + \frac{D_1^*}{r}) \sin \theta \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k} + C_k r^{k+2} + D_k r^{-k+2}) \cos k\theta \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} (A_k^* r^k + B_k^* r^{-k} + C_k^* r^{k+2} + D_k^* r^{-k+2}) \sin k\theta \end{aligned} \quad (7)$$

Elle permet de résoudre de nombreux problèmes aux limites d'élasticité linéaire plane avec des conditions de chargement périodiques en θ . Les constantes $A_k, A_k^*, B_k, B_k^*, C_k, C_k^*, D_k, D_k^*$ doivent être déterminées grâce aux conditions à la frontière, lorsque cela est possible.

2 Champ de contraintes dans une plaque trouée en traction simple

Une plaque d'épaisseur $2h$ percée d'un trou cylindrique à section circulaire de rayon a est soumise à ses extrémités à un état de traction simple. La géométrie et les données de ce problème sont illustrées par le schéma de la figure 1. L'axe du trou est \underline{e}_3 et la direction de traction est \underline{e}_1 . La longueur et la largeur L de la plaque sont supposées suffisamment grandes par rapport à a pour que l'état de contraintes loin du trou ne soit pas affecté par la présence du trou et puisse donc être assimilé à l'état homogène suivant :

$$\underline{\sigma}^\infty = \sigma^\infty \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \quad (8)$$

où $\sigma^\infty > 0$ représente le paramètre de chargement de la structure ; le bord du trou ainsi que les surfaces $z = \pm h$ sont définitivement libres d'effort.

Un système de coordonnées cylindriques (O, r, θ) est adopté, O étant le centre du trou, l'angle θ étant mesuré par rapport à \underline{e}_1 .

Compte tenu des caractéristiques du chargement, le traitement du problème est justiciable d'une résolution en contraintes planes, fût-elle approchée. Le champ de contraintes est donc recherché sous la forme (2).

2.1 Champ de contraintes loin du trou

Donner les composantes du tenseur des contraintes loin du trou dans le système de coordonnées cylindriques.

Donner une fonction de contraintes $\chi(r, \theta)$ correspondant à un champ de traction simple en intégrant les relations (3) à (5).

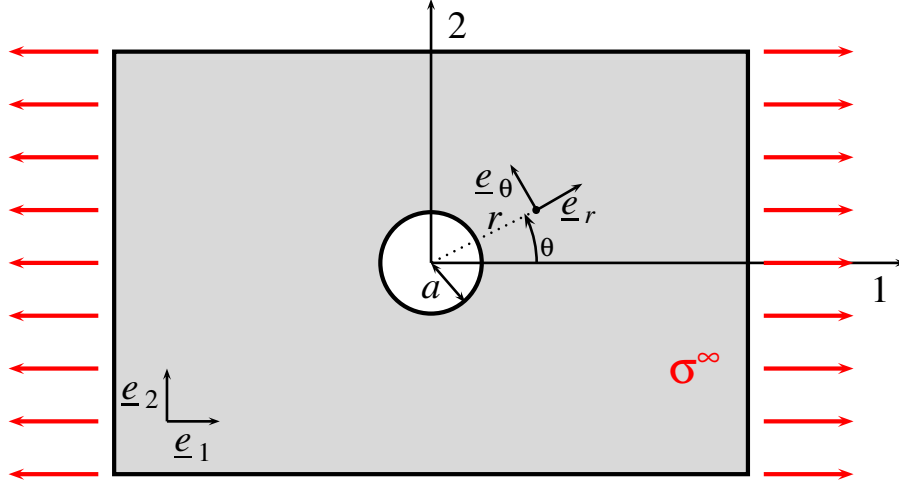


FIG. 1 – Plaque percée d’un trou circulaire de rayon a et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d’intensité σ^∞ .

2.2 Forme générale des contraintes

Le résultat précédent nous incite à rechercher, au sein de la collection repertoriée en (7), la fonction de contraintes, en tout point de la plaque trouée, sous la forme :

$$\chi(r, \theta) = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + (A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2) \cos 2\theta \quad (9)$$

où $A, B, C, A_2, B_2, C_2, D_2$ sont des constantes à déterminer. D’après les relations (3) à (5), on trouve aussitôt l’expression générale du champ de contraintes :

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + 2B \log r + B + 2C + (-2A_2 - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2}) \cos 2\theta \quad (10)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + 2B \log r + 3B + 2C + (2A_2 + 12B_2 r^2 + \frac{6C_2}{r^4}) \cos 2\theta \quad (11)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2 \sin 2\theta (A_2 + 3B_2 r^2 - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2}) \quad (12)$$

Identifier certaines des constantes grâce à l’expression du champ de contraintes à l’infini mise en évidence en 2.1.

2.3 Prise en compte des conditions à la frontière

À l’aide des conditions aux limites non prises en compte à ce stade, établir, sans le résoudre, le système linéaire portant sur les constantes encore inconnues. Le champ de contraintes complet ainsi obtenu est donné ci-dessous :

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \frac{a^2}{r^2}) + \frac{\sigma^\infty}{2} (1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}) \cos 2\theta \quad (13)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 + \frac{a^2}{r^2}) - \frac{\sigma^\infty}{2} (1 + \frac{3a^4}{r^4}) \cos 2\theta \quad (14)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}) \sin 2\theta \quad (15)$$

3 Concentration de contrainte au bord du trou

Le champ de contraintes trouvé précédemment indique que les contraintes ne sont pas homogènes dans une plaque trouée sollicitée en traction à ses extrémités. La décroissance rapide en $1/r^2$ du champ de contraintes assure que ces hétérogénéités se développent seulement au voisinage du trou et que le champ suffisamment loin du trou peut être considéré comme homogène. Il existe donc des surcontraintes en bord de trou, appelées concentrations de contraintes. Elles jouent un rôle essentiel dans l'amorçage de la rupture dont l'étude fait l'objet de cette partie. On admettra que les contraintes, et en particulier les contraintes principales, sont effectivement maximales au bord du trou.

3.1 Facteur de concentration de contrainte

Donner la valeur de la contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$ au bord du trou en fonction de l'angle θ . Indiquer à quel endroit cette contrainte est maximale et quelle valeur elle y prend. Calculer le facteur de concentration de contrainte défini par

$$K_t := \frac{\sigma_{\theta\theta}^{max}}{|\sigma^\infty|} \quad (16)$$

3.2 Rupture fragile en traction ($\sigma^\infty > 0$)

Donner les contraintes principales au bord du trou en fonction de l'angle θ . En déduire à quel endroit et pour quelle valeur de la contrainte imposée σ^∞ la rupture risque de se produire. Pour prévoir la rupture d'une plaque trouée constituée d'un matériau fragile, le critère de contrainte principale maximale critique est adopté. La contrainte à rupture du matériau constitutif de la plaque est notée σ_0 .

3.3 Cas de la compression simple ($\sigma^\infty < 0$)

Reprendre les questions des paragraphes 3.1 et 3.2 dans le cas d'un chargement de la plaque en compression simple, c'est-à-dire pour $\sigma^\infty < 0$.

3.4 Fissuration

Faire un dessin représentant schématiquement la forme et l'orientation des fissures qui peuvent apparaître au bord du trou lorsque la charge appliquée est trop forte, en traction simple puis en compression simple. On supposera pour cela que la fissure est orthogonale à la direction principale associée à la contrainte principale maximale.

4 Déformations et déplacements

D'après (13) et (14), on a

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma^\infty \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta\right)$$

Cette expression n'étant pas affine vis-à-vis des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) , la résolution en contraintes planes n'est qu'approchée. Il est impossible d'associer au champ de contraintes calculé précédemment un champ de déplacements défini dans toute l'épaisseur de la plaque. La seule connaissance à laquelle il est possible d'accéder est *la restriction dans le plan $z = 0$* du champ de déplacements de la solution exacte du problème, grâce au fait que la satisfaction de la relation de compatibilité strictement "bidimensionnelle"

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0$$

est rigoureusement assurée.

Le travail d'intégration à venir sera donc mené dans un univers purement bidimensionnel (le plan $z = 0$) à l'aide d'un tenseur des déformations réduit à ses composantes $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r}$, sans utiliser en aucune façon la variable z .

4.1 Détermination partielle des déformations et des déplacements

A partir du champ de contraintes identifié en 2.3, donner le champ de déformations bidimensionnel correspondant.

Trouver alors les composantes de déplacements u_r et u_θ qui lui sont associées.

4.2 Précision du contexte infinitésimal

Préciser les conditions de validité du contexte infinitésimal adopté dans ce problème, en fonction du chargement appliqué et des caractéristiques du matériau.

4.3 Déformée du trou

On constate que le champ de déplacements précédemment déterminé peut s'écrire, *sur le bord du trou* :

$$u_r(r = a) = \frac{\sigma^\infty}{E} a(1 + 2 \cos 2\theta) \quad (17)$$

$$u_\theta(r = a) = -\frac{\sigma^\infty}{E} 2a \sin 2\theta \quad (18)$$

Donner, dans le contexte infinitésimal, l'équation de la déformée du trou initialement circulaire, en fonction de la charge appliquée. Ce travail peut être réalisé en coordonnées cartésiennes dans le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

Dessiner le trou initial et sa déformée. Calculer la variation relative de l'aire du trou après déformation.

5 Trou elliptique dans une plaque en traction

Une plaque infinie est percée d'un trou cylindrique de section elliptique caractérisée par les paramètres a (demi grand axe) et b (demi petit axe), $0 < b < a$, comme sur la figure 2. Le grand axe de l'ellipse est parallèle à l'axe 1.

La plaque est soumise, loin du trou, à un effort de traction simple $\sigma^\infty > 0$ selon une direction faisant un angle α avec l'axe 1. On s'interroge sur l'état de contrainte autour du trou et sur le

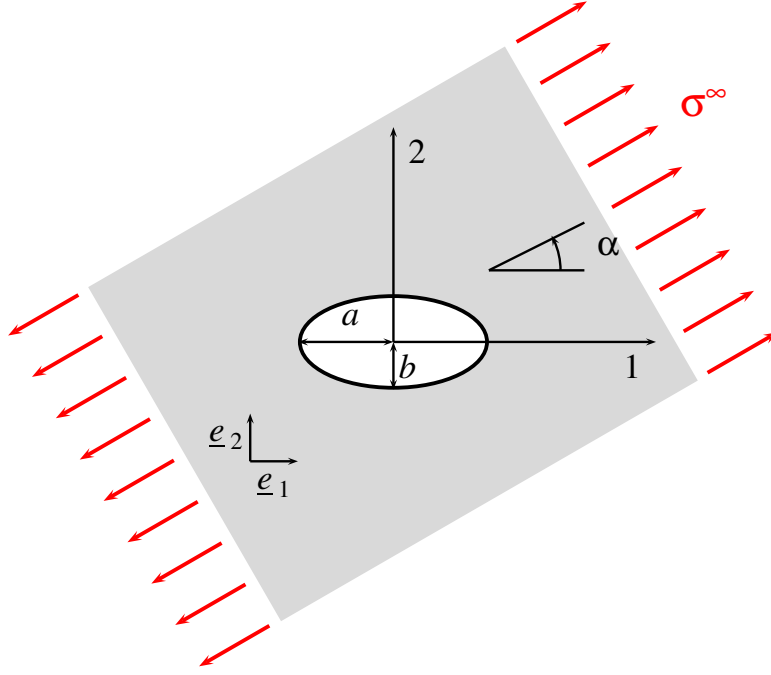


FIG. 2 – Plaque percée d’un trou elliptique et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d’intensité σ^∞ , inclinée d’un angle α par rapport au grand axe de l’ellipse.

facteur de concentration de contrainte introduit par la présence du trou. La résolution complète de ce problème est plus délicate que dans le cas du trou circulaire ; seuls quelques aspects de la solution sont étudiés ici.

5.1 Contrainte au bord du trou elliptique

On adopte la représentation paramétrique suivante des points du bord du trou elliptique :

$$X_1 = a \cos \theta, \quad X_2 = b \sin \theta \quad (19)$$

Dans l’approximation des contraintes planes, justifier qu’il n’existe, au bord du trou elliptique, qu’une seule contrainte principale non nulle que l’on exprimera à l’aide de $\bar{\sigma}$ et d’un vecteur unitaire adapté (sans explicitation détaillée).

Dans la suite on note $\bar{\sigma}$ cette contrainte principale, en vue de l’application d’un critère de rupture fragile.

Lorsque la plaque trouée est soumise à une traction simple selon une direction faisant un angle α avec l’axe 1, on admettra que $\bar{\sigma}$ vaut, en un point (X_1, X_2) de l’ellipse, caractérisé par le paramètre θ de (19) :

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\alpha - 2 \cos 2(\theta - \alpha)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} \quad (20)$$

L’expression fait intervenir la quantité suivante, fonction des paramètres de l’ellipse :

$$m = \frac{a - b}{a + b}, \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (21)$$

Compte tenu de la périodicité de $\bar{\sigma}$, l'étude doit être menée *a priori* pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Toutefois, l'invariance du problème vis-à-vis de la transformation $(\alpha, \theta) \rightarrow (-\alpha, -\theta)$ permet de se limiter à $\alpha \in [0, \pi/2]$.

5.2 Cas d'une sollicitation perpendiculaire au grand axe de l'ellipse

On considère d'abord le cas $\alpha = \pi/2$, c'est-à-dire une traction dans la direction 2, perpendiculaire au grand axe de l'ellipse.

Préciser alors $\bar{\sigma}$ et calculer la contrainte maximale $\bar{\sigma}^{max}$ et la contrainte minimale $\bar{\sigma}^{min}$. Remarquer que $\bar{\sigma}^{min}$ est indépendante de m et donc des paramètres de l'ellipse.

A quel endroit ces valeurs extrémales sont-elles atteintes ?

Le facteur de concentration de contrainte K_t est toujours défini par (16). Le calculer pour le trou elliptique en fonction de m puis en fonction du rapport b/a .

On étudie ensuite les cas particuliers suivants :

Trou circulaire

Retrouver les résultats établis au paragraphe 3.1, à ceci près que la direction de traction est l'axe 2 au lieu de l'axe 1.

Ellipse infiniment aplatie

Que devient le facteur de concentration de contrainte K_t pour une ellipse de plus en plus aplatie, c'est-à-dire lorsque $b/a \rightarrow 0$ ou, de manière équivalente, $m \rightarrow 1$.

Quelle situation physique ce cas asymptotique évoque-t-il pour vous ?

Que suggère l'analyse précédente à propos du tenseur des contraintes dans cette circonstance ?

5.3 Cas d'une sollicitation parallèle au grand axe de l'ellipse

On considère cette fois-ci le cas $\alpha = 0$, c'est-à-dire une traction dans la direction parallèle au grand axe. Reprendre les questions de la section précédente dans ce cas.

En comparant les cas $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = 0$, quelle est la situation la plus pénalisante du point de vue des concentrations de contraintes ?

Quelle différence essentielle observe-t-on pour une ellipse infiniment aplatie ?

5.4 Cas d'une ellipse infiniment aplatie sollicitée en traction dans une direction quelconque $0 < \alpha < \pi/2$

On envisage les autres situations pour lesquelles $0 < \alpha < \pi/2$, mais seulement dans le cas d'une ellipse infiniment aplatie :

$$m = 1 - \eta, \quad \eta = \frac{2b}{a} \ll 1 \quad (22)$$

On montre alors (admis ici) que le maximum de $\bar{\sigma}$ est atteint en

$$\theta = -\frac{\eta}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + o(\eta) \quad (23)$$

Le maximum vaut (admis ici)

$$\sigma^\infty \left(\frac{2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)}{\eta} + \mathcal{O}(1) \right)$$

et est donc positif.

Identifier alors (pour $\eta \rightarrow 0$) le point du bord de l'ellipse et la facette correspondante où la contrainte est maximale. L'orientation de cette facette par rapport à l'axe 1 est notée β . Déterminer β et tracer la courbe de $-\beta$ en fonction de α pour $0 < \alpha < \pi/2$. Compléter cette courbe avec le résultat acquis au paragraphe 5.2 ($\alpha = \pi/2$). Tracer en outre la courbe de $-\beta$ en fonction de α pour $-\pi/2 \leq \alpha < 0$.

En supposant un mécanisme de rupture fragile, dessiner schématiquement une fissure amorcée à l'endroit critique trouvé pour un chargement de traction de la plaque dans la direction $\alpha = \pi/6$.

5.5 Expérience de mécanique de la rupture

Concevoir et réaliser une (petite) série d'expériences susceptibles d'illustrer les conclusions précédentes relatives à l'ellipse infiniment aplatie. Critiquer la fidélité du dispositif retenu vis-à-vis de la définition du problème que nous venons d'étudier.

Joindre les échantillons expérimentaux à la copie.

5.6 Question subsidiaire

Justifier l'information admise au paragraphe 5.4 par un développement soigneux et authentique (i.e. sans tirer profit de sa connaissance préalable).

* * *