

Comportement thermoélastique et endommagement d'un composite à fibres longues¹

L'objectif du problème est d'établir la loi de comportement macroscopique d'un composite à fibres longues parallèles distribuées dans une matrice. Plusieurs aspects caractéristiques du comportement des composites seront pris en compte : la différence de comportement thermoélastique entre la fibre et la matrice, quelques conséquences du procédé d'élaboration de ces matériaux et, finalement, les mécanismes d'endommagement que sont la fissuration de la matrice et la décohésion entre les fibres et la matrice.

Les matériaux constitutifs de la fibre et de la matrice présentent un comportement thermoélastique linéaire et isotrope caractérisé, respectivement, par les modules de Young E_f et E_m , les coefficients de Poisson, ν_f et ν_m , et les coefficients de dilatation thermique α_f et α_m . Dans la pratique industrielle, la rigidité élastique des fibres est supérieure à celle de la matrice.

Les géométries considérées seront axisymétriques et on utilisera une base cylindrique $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ d'origine O et d'axe (Oz).

L'ensemble du problème est traité dans des conditions d'équilibre statique en l'absence d'efforts de volume, et dans le contexte infinitésimal.

Dans les parties 1 et 2, l'état initial des fibres et de la matrice est supposé naturel.

Les parties du problème ne sont pas indépendantes. Les résultats non acquis peuvent être admis dans la suite.

1 Préliminaires

Le problème commence par l'établissement des solutions de deux problèmes auxiliaires élémentaires en élasticité linéarisée isotrope et isotherme. Ces problèmes ayant été étudiés en exercice, on ne demande pas de retranscrire toutes les étapes de leur résolution.

1.1 Fibre isolée soumise à une force de traction et à une contrainte radiale externe

Une fibre cylindrique de longueur L_f et de section circulaire de rayon R_f est soumise à un effort axial surfacique uniformément réparti de résultante $\underline{F} = F_f \underline{e}_z$ en $z = L_f$ et à l'effort opposé en $z = 0$. On note $S_f = \pi R_f^2$ la section de la fibre.

La surface latérale $r = R_f$ est soumise à la densité surfacique uniforme d'efforts donnés $\underline{t}^d = \sigma_{rr}^f(R_f) \underline{e}_r$. La géométrie de la fibre et les conditions aux limites sont illustrées sur la figure 1. La fibre est constituée d'un matériau homogène élastique linéaire isotrope caractérisé par E_f et ν_f .

Donner les champs des déformations et des contraintes au sein de la fibre dans ces conditions.

On note $(\frac{\Delta L}{L})_f$ l'allongement relatif de la fibre, et $(\frac{\Delta R}{R})_f$ la variation relative du rayon de la fibre, consécutifs à ce chargement. Etablir les relations entre ces grandeurs et les efforts

1. Il s'agit d'un sujet posé par Gilles Damamme.

appliqués et montrer qu'elles se mettent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_f \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_f \end{bmatrix} = [M_f] \begin{bmatrix} F_f \\ P_f \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad [M_f] = \frac{1}{E_f S_f} \begin{bmatrix} 1 & -\nu_f \\ -\nu_f & \frac{1-\nu_f}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

où l'effort $P_f = 2\sigma_{rr}^f(R_f)S_f$ est introduit de façon à obtenir une matrice $[M_f]$ symétrique.

Montrer enfin que l'énergie élastique stockée dans la fibre par unité de longueur de fibre s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$E_f^{elas} = \frac{1}{2} [F_f \quad P_f] [M_f] [F_f \quad P_f]^T \quad (2)$$

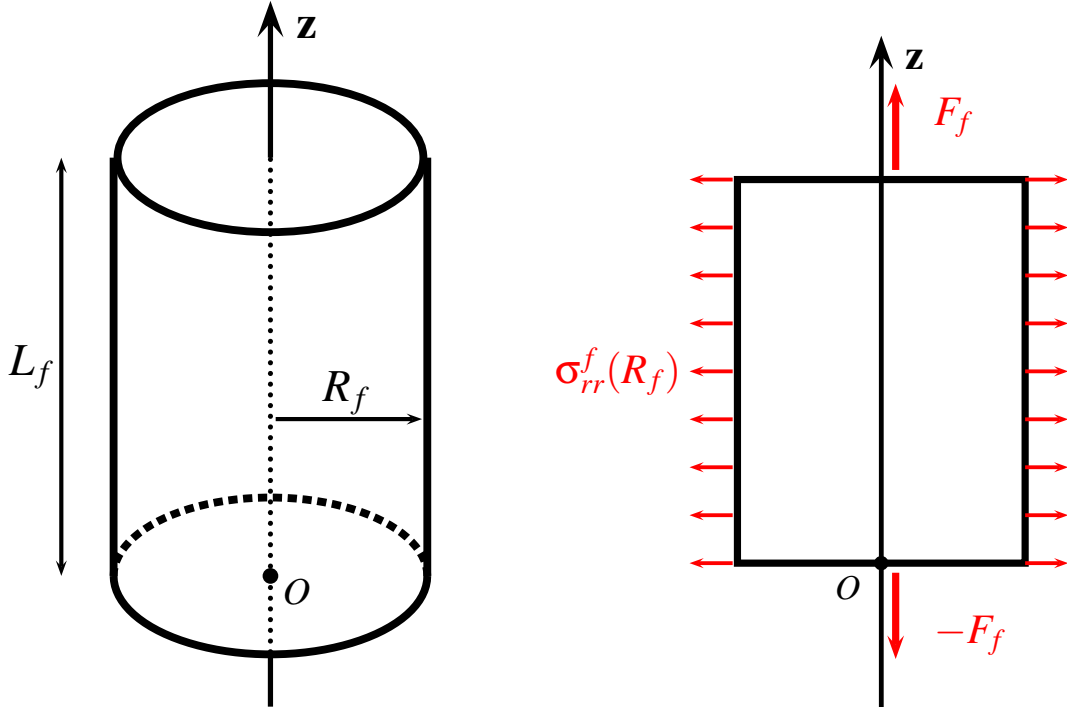


FIGURE 1 – Géométrie de fibre à section circulaire (vue en perspective à gauche) ; la fibre est soumise à la force résultante F_f sur sa face supérieure, à la force opposée sur la face inférieure et à une densité surfacique de forces sur sa surface latérale (section longitudinale de la fibre, à droite).

Pour des raisons de symétrie, le déplacement est de la forme

$$\underline{u} = f(r)\underline{e}_r + g(z)\underline{e}_z \quad (3)$$

Le calcul des déformations puis des contraintes correspondantes grâce à la loi de Hooke n'est pas rappelé ici. L'application des équations d'équilibre statique en l'absence d'efforts de volume permet de montrer que les fonctions f et g sont solutions des équations différentielles

$$f' + \frac{f}{r} = Cste, \quad g'' = 0 \implies f(r) = ar + \frac{b}{r}, \quad g(z) = cz + d \quad (4)$$

On sait dans ces conditions que les déformations et les contraintes sont de la forme

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = a - \frac{b}{r^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = a + \frac{b}{r^2} \\ \varepsilon_{zz} = c \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = C \end{cases} \quad (5)$$

où les constantes a, b, c et A, B, C sont liées par les expressions faisant appel à la loi de Hooke,

$$\begin{cases} A = (\lambda_f + \mu_f)2a + \lambda_f c \\ B = 2\mu_f b \\ C = (\lambda_f + 2\mu_f)c + 2\lambda_f a \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1 - \nu_f}{E_f} A - \frac{\nu_f}{E_f} C \\ b = \frac{B}{2\mu_f} \\ c = \frac{1}{E_f} (C - 2\nu_f A) \end{cases} \quad (6)$$

Le terme singulier ne peut exister au sein de la fibre, $b = 0$. Les conditions aux limites impliquent que

$$\sigma_{zz}^f = C = \frac{F_f}{S_f}, \quad \sigma_{rr}^f = \sigma_{\theta\theta}^f = A = \sigma_{rr}^f(R_f) \quad (7)$$

les autres composantes de contrainte étant nulles.

La déformation de la fibre étant homogène, son allongement relatif est donné par la composante de déformation axiale :

$$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_f = \varepsilon_{zz}^f = \frac{1 + \nu_f}{E_f} \sigma_{zz}^f - \frac{\nu_f}{E_f} (2\sigma_{rr}^f + \sigma_{zz}^f) = \frac{\sigma_{zz}^f}{E_f} - 2\frac{\nu_f}{E_f} \sigma_{rr}^f$$

La variation relative du rayon de la fibre est donnée par la composante de déformation radiale homogène :

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_f = \varepsilon_{rr}^f = \frac{1 + \nu_f}{E_f} \sigma_{rr}^f - \frac{\nu_f}{E_f} (2\sigma_{rr}^f + \sigma_{zz}^f) = \frac{1 - \nu_f}{E_f} \sigma_{rr}^f - \frac{\nu_f}{E_f} \sigma_{zz}^f$$

ce qui conduit à l'expression matricielle (1).

La densité volumique d'énergie élastique stockée dans la fibre vaut :

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^f : \underline{\underline{\varepsilon}}^f = \frac{1}{2} (\sigma_{zz}^f \varepsilon_{zz}^f + 2\sigma_{rr}^f \varepsilon_{rr}^f) = \frac{1}{2} \left(\sigma_{zz}^f \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_f + 2\sigma_{rr}^f \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_f \right)$$

L'énergie élastique par unité de longueur de fibre est donc égale à

$$E_f^{elas} = \frac{V_f}{2L_f} \underline{\underline{\sigma}}^f : \underline{\underline{\varepsilon}}^f = \frac{1}{2} S_f \underline{\underline{\sigma}}^f : \underline{\underline{\varepsilon}}^f = \frac{1}{2} \left(F_f \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_f + P_f \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_f \right)$$

$$E_f^{elas} = \frac{1}{2} [F_f \quad P_f] \left[\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_f \quad \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_f \right]^T$$

ce qui conduit à l'expression (2) en tenant compte de (1).

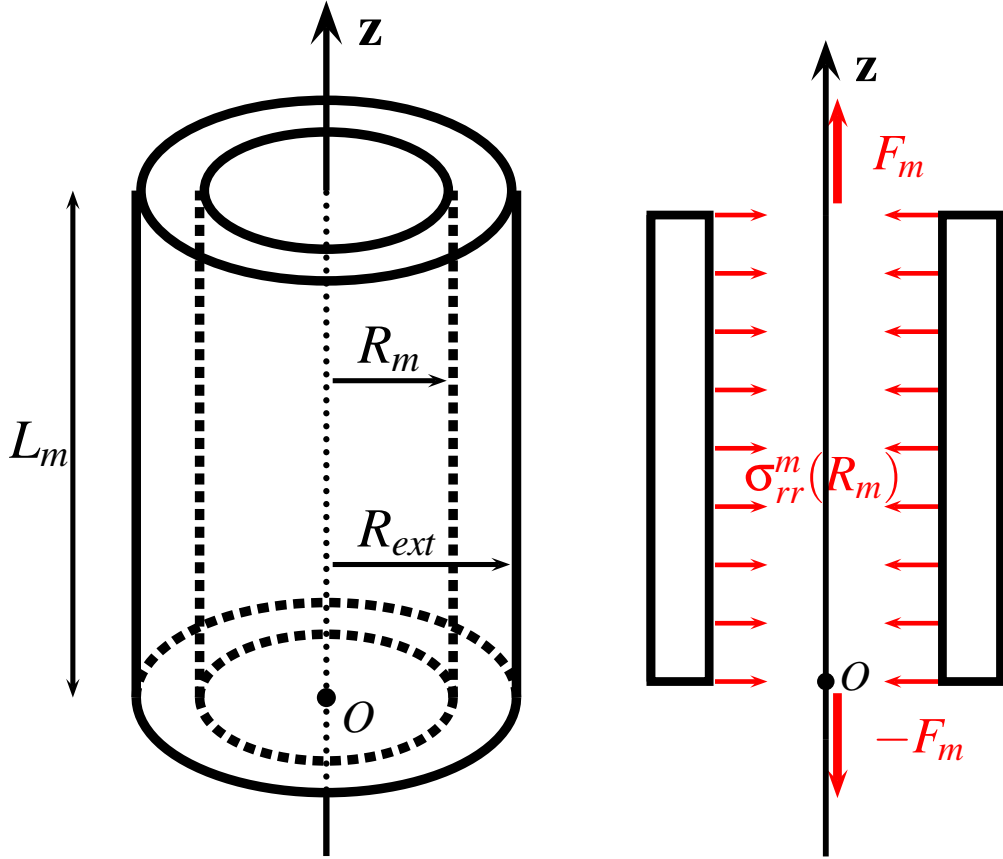


FIGURE 2 – Géométrie de tube (vue en perspective à gauche) ; le tube est soumis à la force résultante F_m sur sa face supérieure et à une densité surfacique de forces sur sa surface latérale intérieure uniquement (section longitudinale du tube, à droite).

1.2 Tube soumis à un effort axial et à une contrainte radiale interne

Un tube de longueur L_m , de rayon interne R_m et de rayon externe R_{ext} est soumis à une force surfacique axiale uniforme, de résultante F_m , à son extrémité $z = L_m$ et à l'effort opposé à l'autre extrémité. La surface latérale interne $r = R_m$ est soumise à la densité surfacique uniforme d'efforts donnés $\underline{t}^d = -\sigma_{rr}^f(R_m) \underline{e}_r$. La géométrie du tube et les conditions aux limites sont illustrées sur la figure 2. La surface latérale extérieure $r = R_{ext}$ est libre de tout effort. Le tube est constitué d'un matériau homogène élastique linéaire isotrope caractérisé par E_m et ν_m .

Donner le champ des contraintes au sein du tube dans ces conditions.

On note $(\frac{\Delta L}{L})_m$ l'allongement relatif du tube, et $(\frac{\Delta R}{R})_m$ la variation relative du rayon interne du tube, consécutifs à ce chargement. Etablir les relations entre ces grandeurs et les efforts appliqués et montrer qu'elles se mettent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} (\frac{\Delta L}{L})_m \\ (\frac{\Delta R}{R})_m \end{bmatrix} = [M_m] \begin{bmatrix} F_m \\ -P_m \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad [M_m] = \frac{1}{E_m S_m} \begin{bmatrix} 1 & -\nu_m \\ -\nu_m & \frac{1-\nu_m}{2} + \frac{1+\nu_m}{2f} \end{bmatrix} \quad (8)$$

où l'effort $P_m = 2\sigma_{rr}^m(R_m)S_f$ est introduit de façon à obtenir une matrice $[M_m]$ symétrique. On

désigne par $S_m = \pi(R_{ext}^2 - R_m^2)$ la surface annulaire de la section du tube, et $S_f = \pi R_m^2$. On a également introduit le rapport

$$f = \frac{S_f}{S_f + S_m} \quad (9)$$

Montrer enfin que l'énergie élastique stockée dans la fibre par unité de longueur de fibre s'écrit sous forme matricielle de la manière suivante

$$E_m^{elas} = \frac{1}{2} [F_m \quad -P_m] [M_m] [F_m \quad -P_m]^T \quad (10)$$

Pour établir de manière simple ce résultat, on utilisera la propriété suivante que l'on prouvera et commentera :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS \quad (11)$$

en l'absence d'efforts de volume, et où Ω désigne le corps étudié, $\partial\Omega$ son bord, et \mathbf{t} , le vecteur-contrainte.

Les contraintes dans le tube sont données par les expressions (5) avec

$$\sigma_{zz}^m = F_m/S_m, \quad \sigma_{rr}^m = A_m - \frac{B_m}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = A_m + \frac{B_m}{r^2}$$

La valeur de la contrainte radiale, $\sigma_{rr}^m(R_m)$ est imposée. Par ailleurs, $\sigma_{rr}^m(R_{ext}) = 0$. Ces conditions donnent les valeurs

$$A_m = -\sigma_{rr}^m(R_m) \frac{S_f}{S_m} = -\frac{P_m}{2S_m}, \quad B_m = -\sigma_{rr}^m(R_m) R_{ext}^2 \frac{S_f}{S_m} = -\frac{P_m}{2S_m} R_{ext}^2$$

L'allongement relatif du tube vaut

$$\left(\frac{\Delta L}{L} \right)_m = \varepsilon_{zz}^m = \frac{1}{E_m} \left(\frac{F_m}{S_m} - 2\nu_m A_m \right) = \frac{1}{E_m} \left(\frac{F_m}{S_m} + \nu_m \frac{P_m}{S_m} \right)$$

La variation relative du rayon intérieur du tube vaut

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)_m &= \frac{u_r^m(R_m)}{R_m} = a_m + \frac{b_m}{R_m^2} \\ &= \frac{1 - \nu_m}{E_m} A_m - \frac{\nu_m}{E_m} \frac{F_m}{S_m} + \frac{1 + \nu_m}{E_m} \frac{B_m}{R_m^2} \\ &= -\frac{P_m}{2E_m S_m} \left(1 - \nu_m + (1 + \nu_m) \frac{R_{ext}^2}{R_m^2} \right) - \frac{\nu_m}{E_m} \frac{F_m}{S_m} \\ &= -\frac{P_m}{2E_m S_m} \left(1 - \nu_m + \frac{1 + \nu_m}{2} \right) - \frac{\nu_m}{E_m} \frac{F_m}{S_m} \end{aligned}$$

Les deux résultats précédents conduisent à l'expression matricielle (8).

L'identité (11) indique que le travail des efforts intérieurs dans Ω est égal au travail des efforts extérieurs sur le bord de Ω :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j} dV = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} u_i n_j dS = \int_{\partial\Omega} t_i u_i dS$$

en coordonnées cartésiennes, en utilisant le fait que la divergence du tenseur des contraintes est nulle. Elle permet de calculer l'énergie élastique stockée dans le cylindre déformé par le biais du travail des efforts extérieurs :

$$2W^{ext} = \int_{\partial V} \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{u}} \, dS = F_m \Delta L_m + \int_{r=R_m} (-\sigma_{rr}(R_m)^m \underline{\mathbf{e}}_r) \cdot \underline{\mathbf{u}} \, dS = F_m \Delta L_m - \sigma_{rr}^m(R_m) \Delta R_m 2\pi R_m L_m$$

En divisant cette quantité par L_m , on obtient

$$2 \frac{W^{ext}}{L_m} = F_m \left(\frac{\Delta L}{L} \right)_m - P_m \left(\frac{\Delta R}{R} \right)_m$$

2 Comportement global d'un assemblage fibre–matrice sain

Les composites à fibres longues sont largement utilisés dans l'industrie par exemple pour renforcer les réservoirs sous pression ainsi que dans l'industrie aéronautique. Ces pièces sont souvent constituées de plis, un pli étant formé d'un grand nombre de fibres parallèles baignées dans une matrice, comme sur la figure 3. Les plis de fibres d'orientations différentes peuvent être empilés de façon à obtenir une rigidité importante dans plusieurs directions. Une estimation du comportement d'un composite à fibres longues parallèles est fournie par l'analyse d'un assemblage fibre–matrice constitué d'une fibre de rayon R_f entourée d'une matrice cylindrique de rayon interne $R_m = R_f$ et de rayon externe R_{ext} , de longueur $L_m = L_f$, comme l'illustre la figure 3 à droite. Le rayon R_f de la fibre correspond au rayon moyen des fibres dans le composite réel tandis que le rayon externe se déduit de la connaissance de la fraction volumique f de fibres dans le composite donnée par la définition (9).

On suppose dans cette partie que l'interface entre la matrice et la fibre est parfaite, c'est-à-dire qu'il y a une cohésion parfaite sans fissure ni glissement entre la fibre et la matrice.

2.1 Efforts dans la fibre et la matrice

L'assemblage élémentaire de la figure 3 est soumis à un effort axial global $F = F_m + F_f$ qui se décompose en une force F_m agissant sur la matrice et une force F_f s'exerçant sur la fibre. Seule la charge totale F est connue a priori. La surface latérale $r = R_{ext}$ est libre de tout effort.

Utiliser les solutions des problèmes auxiliaires traités en préliminaire pour exprimer la force à l'interface fibre–matrice $P = P_f$ en fonction de l'effort appliqué F et des caractéristiques géométriques et élastiques des matériaux de l'assemblage.

Discuter le signe de P et donc la façon dont la matrice agit sur la fibre.

Pour cela, on commencera par indiquer les relations qui doivent exister entre $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_f$, $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_m$, $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_f$, $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_m$, P_f et P_m dans l'assemblage sain considéré.

On remarquera en particulier que les contraintes et les déformations sont homogènes au sein de la fibre mais pas dans la matrice.

On introduira dans les calculs les notations suivantes :

$$\frac{1}{ES} = \frac{1}{E_f S_f} + \frac{1}{E_m S_m}, \quad \frac{\nu}{ES} = \frac{\nu_f}{E_f S_f} + \frac{\nu_m}{E_m S_m} \quad (12)$$

propriété	fibre de carbone	résine d'époxyde	SiC	titane
E (GPa)	300	3.5	450	110
ν	0.4	0.3	0.17	0.34
α (K^{-1})	1×10^{-6}	5×10^{-5}	2.8×10^{-6}	8.6×10^{-6}

TABLE 1 – Propriétés élastiques de différents matériaux utilisés dans les composites industriels.

Ces relations définissent les coefficients d'élasticité fictifs, E et ν , correspondants à des moyennes des propriétés des constituants.

On introduira également la notation : $\beta = \frac{1 + \nu_m}{2f} \frac{ES}{E_m S_m}$.

Faire l'application numérique dans les cas d'une fibre de carbone dans une résine d'époxyde, puis d'une fibre de carbure de silicium (SiC) dans une matrice en titane, les paramètres correspondants étant donnés dans la table 1, pour une fraction volumique de fibre de 0.3 dans les deux cas. Commenter.

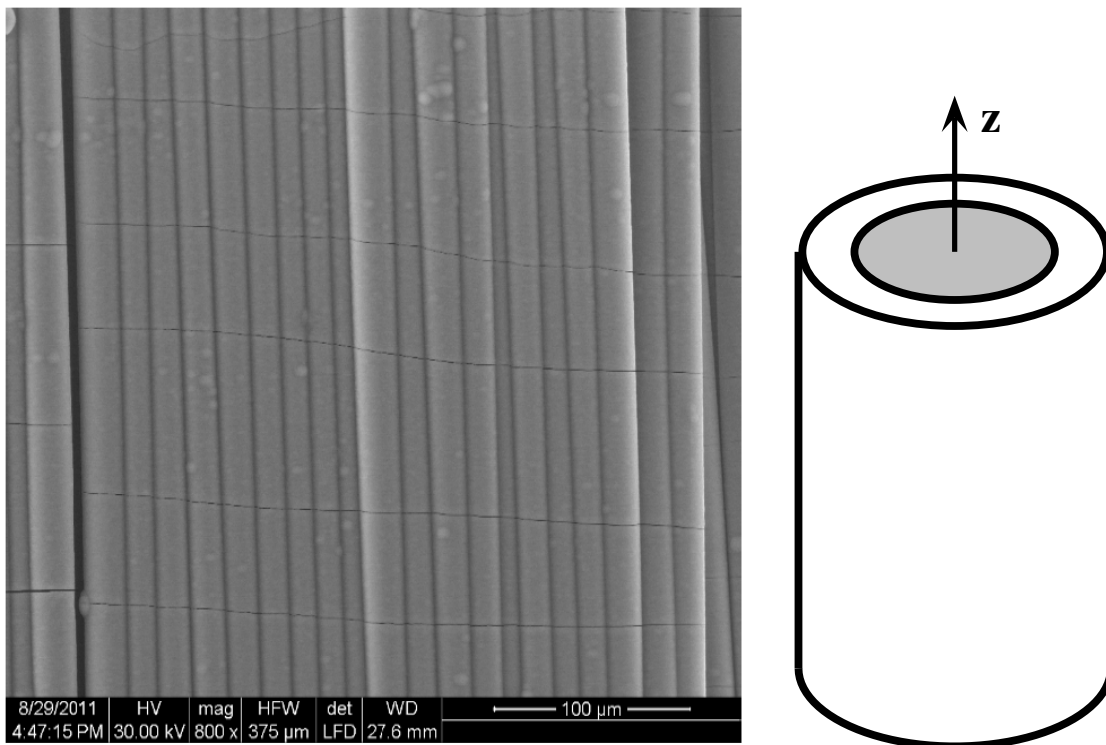


FIGURE 3 – Vue au microscope électronique à balayage d'un groupe de fibres verticales dans un composite à matrice céramique pour l'aéronautique (à gauche, photo d'après (Coradi, 2014)). Des fissures dans la matrice sont visibles sur la figure. Les fibres, gainées de matrice, sont intactes mais ne sont pas visibles en raison de la faible ouverture des fissures. A droite, assemblage élémentaire fibre–matrice, la fibre étant en gris sur la figure.

La forme des champs de déplacement, de déformations et de contraintes établis individuellement pour la fibre et la matrice est valable dans l'assemblage fibre–matrice considéré puisqu'elle a été établie à partir des équations d'équilibre local dans chaque constituant en utilisant les lois de comportement correspondantes. La surface intérieure de la matrice doit

coïncider avec la surface extérieure de la fibre dans l'état initial comme dans l'état déformé, ce qui exige que

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_f = \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_m$$

Comme aucun glissement n'est possible entre la fibre et la matrice lorsque l'interface est saine, on doit avoir :

$$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_f = \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_m$$

Interface parfaite signifie également que les efforts sont transmis de la matrice à la fibre de sorte que

$$\sigma_{rr}^f(R_f) = \sigma_{rr}^m(R_f) \implies P_m = P_f = P$$

Dans ces conditions, les relations préliminaires (1) et (8) conduisent aux deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_f S_f} (F_f - \nu_f P) &= \frac{1}{E_m S_m} (F_m + \nu_m P) \\ \frac{1}{E_f S_f} (-\nu_f F_f + (1 - \nu_f) \frac{P}{2}) &= \frac{1}{E_m S_m} (-\nu_m F_m - (\frac{1 - \nu_m}{2} + \frac{1 + \nu_m}{2f}) P) \end{aligned}$$

En éliminant $F_m = F - F_f$ et en introduisant les notations proposées, ces deux équations deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{ES} F_f &= \frac{1}{E_m S_m} F + \frac{\nu}{ES} P \\ -\frac{\nu}{ES} F_f &= -\frac{\nu_m}{E_m S_m} F - \left(\frac{1 - \nu}{2ES} + \frac{1 + \nu_m}{2f E_m S_m} \right) P \end{aligned} \quad (13)$$

L'expression de la charge P en découle :

$$P = \frac{\nu - \nu_m}{E_m S_m} \left(\frac{1 - \nu - 2\nu^2}{2ES} + \frac{1 + \nu_m}{2f E_m S_m} \right)^{-1} F \quad (14)$$

ou

$$P = \frac{\nu - \nu_m}{E_m S_m} ES \left(\frac{1 - \nu - 2\nu^2}{2} + \beta \right)^{-1} F \quad (15)$$

On peut vérifier que le coefficient ν précédemment défini jouit des mêmes propriétés que les coefficients de Poisson ν_f et ν_m , i.e. $-1 < \nu < 1/2$. Il s'ensuit que le deuxième facteur du membre de droite est toujours positif. Noter en effet que $1 - \nu - 2\nu^2 = (1 + \nu)(1 - 2\nu) > 0$. Par conséquent P est du signe du premier facteur qui est proportionnel à $\nu_f - \nu_m$.

A noter que l'on peut extraire la relation suivante :

$$\frac{F_f^1}{E_f S_f} \left(\frac{1 - \nu}{2} + \beta - \nu \nu_f \right) = \frac{F_m^1}{E_m S_m} \left(\frac{1 - \nu}{2} + \beta - \nu \nu_m \right) \quad (16)$$

Elle nous sera utile dans la dernière partie. Application numérique : dans les cas fibres de carbone / époxyde et fibres SiC/titane, on trouve respectivement :

$$P/F = 0.001 \quad \text{et} \quad P/F = -0.023$$

en utilisant $S_m/S_f = (1 - f)/f$. Le coefficient de Poisson de la fibre de carbone étant plus grand que celui de la matrice, $P > 0$, c'est-à-dire que la matrice tire radialement sur la fibre. L'inverse se produit dans le cas des fibre de carbure de silicium dont le coefficient de Poisson est faible. Cette force représente une très petite partie de l'effort appliqué total, 0.1% et 2.3% respectivement.

2.2 Module de Young effectif du composite

Les calculs précédents permettent de déterminer le module de Young effectif du composite, \bar{E} , qui relie la contrainte de traction/compression globale appliquée à l'assemblage fibre-matrice à l'allongement relatif global du composite :

$$\frac{F}{S_f + S_m} = \bar{E} \frac{\Delta L}{L} \quad (17)$$

Exprimer \bar{E} en fonction des propriétés élastiques de la fibre et de la matrice, ainsi que de la fraction volumique de fibre, f .

Indiquer comment le résultat se simplifie dans le cas particulier où $\nu_f = \nu_m$. Commenter.

On part de la relation établie pour la fibre et on utilise successivement les relations (13) et (15)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L}{L} &= \frac{1}{E_f S_f} (F_f - \nu_f P) \\ &= \frac{1}{E_f S_f} \left(\frac{ES}{E_m S_m} F + \nu P - \nu_f P \right) \\ &= \frac{S_f + S_m}{E_f S_f E_m S_m} \left(ES + (\nu - \nu_f)(\nu - \nu_m) \left(\frac{1 - \nu - 2\nu^2}{2ES} + \frac{1 + \nu_m}{2f E_m S_m} \right)^{-1} \right) \frac{F}{S_f + S_m} \\ &= \frac{S_f + S_m}{E_f S_f + E_m S_m} \left(1 + (\nu - \nu_f)(\nu - \nu_m) \left(\frac{1 - \nu - 2\nu^2}{2} + \beta \right)^{-1} \right) \frac{F}{S_f + S_m} \end{aligned} \quad (18)$$

ce qui définit le module effectif \bar{E} .

L'expression se simplifie considérablement lorsque $\nu_f = \nu_m$ puisque

$$\bar{E} = f E_f + (1 - f) E_m \quad (19)$$

est la moyenne volumique arithmétique des modules des constitutants. C'est la loi des mélanges. Remarquer que la loi des mélanges n'est donc pas valable pour le module de Young dans le cas général $\nu_m \neq \nu_f$ de fibres longues parallèles baignant dans une matrice.

3 Prise en compte des contraintes résiduelles

Les calculs précédents ont été réalisés en considérant l'état naturel de la fibre et de la matrice comme état de référence. En réalité, à l'issue du procédé d'élaboration de ces composites, il existe des contraintes résiduelles au sein des constituants qui doivent être prises en compte pour l'utilisation ultérieure. Les fibres sont imprégnées de matrice à chaud. Le refroidissement jusqu'à température ambiante, consécutif à la solidification ou à la polymérisation de la matrice,

s'accompagne alors du développement de contraintes internes en raison du différentiel de dilatation thermique entre les deux matériaux. L'objectif de cette section est de déterminer ces contraintes résiduelles et de leur superposer la charge d'utilisation du composite.

Les coefficients de dilatation thermique, supposée isotrope, de la fibre et de la matrice sont respectivement notés α_f et α_m . On considère que les propriétés thermoélastiques des matériaux varient très peu en fonction de la température sur la plage considérée².

Dans toute cette partie, la cohésion de l'interface fibre–matrice est supposée parfaite.

3.1 Calcul des contraintes résiduelles

L'assemblage fibre–matrice de la figure 3 (à droite) est refroidi depuis sa température d'élaboration jusqu'à la température ambiante, ce qui correspond à la variation de température $\Delta T < 0$. On suppose que l'interface reste parfaite tout au long du refroidissement. A la température initiale d'élaboration, la matrice et la fibre sont dans leur état naturel. Aucun effort extérieur n'est appliqué pendant le refroidissement.

Montrer qu'à l'issue du refroidissement, la fibre est soumise à la force axiale F_0 et à l'effort radial $P_0 = 2S_f\sigma_{rr}^f(R_f)$, solutions du système

$$[\mathcal{M}] \begin{bmatrix} F_0 \\ P_0 \end{bmatrix} = -(\alpha_f - \alpha_m)\Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

où

$$[\mathcal{M}] = \frac{1}{ES} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & \frac{1-\nu}{2} + \beta \end{bmatrix} \quad (21)$$

Exprimer P_0 et F_0 et discuter de leur signe respectif.

Faire l'application numérique dans le cas des composites carbone–époxyde et SiC–titane ($f = 0.3$) en considérant $\Delta T = -100$ K pour le premier et $\Delta T = -1000$ K pour le second. Comparer en particulier les valeurs des contraintes résiduelles obtenues dans la matrice à la limite d'élasticité de la résine d'époxyde, $\sigma_Y = 50$ MPa, et du titane, typiquement $\sigma_Y = 500$ MPa.

Lors du refroidissement la matrice et la fibre se déforment en raison d'une part de la dilatation thermique et d'autre part de la déformation élastique permettant d'accommoder les incompatibilités de déformation d'origine thermique. L'allongement relatif et la variation relative du rayon de la fibre sont donc donnés par

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_f \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_f \end{bmatrix} = \alpha_f \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + [M_f] \begin{bmatrix} F_f \\ P_f \end{bmatrix}$$

en utilisant la relation (1).

De même, l'allongement relatif et la variation relative de rayon interne de la matrice sont donc donnés par

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_m \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_m \end{bmatrix} = \alpha_m \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + [M_m] \begin{bmatrix} F_m \\ -P_m \end{bmatrix}$$

2. Un calcul complet prenant en compte la dépendance des modules d'élasticité et des coefficients de dilatation avec la température ne pose pas de problème de principe mais est facilité par un traitement numérique.

en utilisant la relation (8).

Comme l'interface reste parfaite pendant le refroidissement, les allongements relatifs doivent coïncider. On obtient donc les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta L}{L} &= \alpha_f \Delta T + M_{11}^f F_f + M_{12}^f P_f \\ \frac{\Delta L}{L} &= \alpha_m \Delta T + M_{11}^m F_m - M_{12}^m P_m \\ \frac{\Delta R}{R} &= \alpha_f \Delta T + M_{21}^f F_f + M_{22}^f P_f \\ \frac{\Delta R}{R} &= -\alpha_m \Delta T + M_{21}^m F_m - M_{22}^m P_m\end{aligned}$$

La cohésion de l'interface implique également que $P_m = P_f = P_0$. En outre, il n'y a pas d'effort extérieur total appliqué de sorte que $F_m + F_f = 0$, i.e. $F_f = -F_m = F_0$. La soustraction des deux premières équations précédentes et l'addition des deux dernières conduisent alors aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}- (\alpha_f - \alpha_m) \Delta T &= (M_{11}^f + M_{11}^m) F_0 + (M_{12}^f + M_{12}^m) P_0 \\ - (\alpha_f - \alpha_m) \Delta T &= (M_{12}^f + M_{12}^m) F_0 + (M_{22}^f + M_{22}^m) P_0\end{aligned}$$

relations qui se mettent effectivement sous la forme matricielle (21).

L'inversion du système (21) fait intervenir le déterminant de la matrice :

$$\det \mathcal{M} = \frac{1}{(ES)^2} \left(\frac{1 - \nu - 2\nu^2}{2} + \beta \right)$$

quantité positive déjà rencontrée dans la section précédente. Finalement,

$$\begin{aligned}P_0 &= -(\alpha_f - \alpha_m) \Delta T (1 + \nu) (ES \det \mathcal{M})^{-1} \\ F_0 &= -(\alpha_f - \alpha_m) \Delta T \left(\frac{1 + \nu}{2} + \beta \right) (ES \det \mathcal{M})^{-1}\end{aligned}$$

Pour un refroidissement $\Delta T < 0$, on trouve que P_0 et F_0 sont du signe de la différence $\alpha_f - \alpha_m$. Si cette différence est négative, la fibre est en compression selon z et, par conséquent, la matrice est en traction. Quant à lui, P_0 est négatif.

Dans le cas du composite carbone-époxy, l'application numérique donne la contrainte σ_{rr} à l'interface et la contrainte moyenne σ_{zz}^m dans la matrice :

$$P_0/2S_f = -11 \text{ MPa}, \quad -F_0/S_m = 19 \text{ MPa}$$

Dans le cas du composite SiC-titane, l'application numérique donne :

$$P_0/2S_f = -355 \text{ MPa}, \quad -F_0/S_m = 491 \text{ MPa}$$

La matrice est en traction selon z en raison du coefficient de dilatation plus grand dans la matrice que dans la fibre. Les contraintes sont bien plus élevées dans le cas du composite à matrice métallique en raison des forts modules de Young. Le critère de Tresca appliqué à ces contraintes revient à évaluer $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ ou $\sigma_{zz} - \sigma_{rr}$ qui représentent probablement les cisaillements maximaux. Même si un calcul détaillé en $r = R_f$ soit nécessaire pour conclure, on peut penser au vu des valeurs de contraintes précédentes et des limites d'élasticité respectives que la résine époxyde ne plastifiera pas tandis que la matrice de titane va plastifier à coup sûr lors du refroidissement. Noter qu'un différentiel de température de 200 K conduirait à l'entrée de la résine époxyde dans le domaine plastique.

3.2 Superposition d'un chargement extérieur

L'assemblage composite ainsi produit, siège des contraintes résiduelles F_0 et P_0 précédentes, est maintenant soumis à une force de traction axiale extérieure F . Les efforts F_0, P_0 et F sont supposés suffisamment faibles pour que la limite d'élasticité ne soit pas atteinte dans les constituants.

Justifier que l'allongement relatif et la variation relative de rayon de la fibre au total se calculent de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_f \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_0 \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_0 \end{bmatrix} + [M_f] \begin{bmatrix} F_f^1 \\ P_1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

où $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_0$ et $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_0$ sont l'allongement relatif et la variation relative de rayon résiduels issus de l'élaboration.

Justifier également que les efforts dans la matrice et la fibre sont de la forme

$$F_f = F_0 + F_f^1, \quad P_f = P_0 + P_1, \quad F_m = -F_0 + F_m^1, \quad P_m = P_0 + P_1, \quad F = F_f^1 + F_m^1 \quad (23)$$

L'application du théorème de superposition en élasticité linéarisée conduit aux résultats mentionnés. L'effort extérieur appliqué F se décompose en $F_f^1 + F_m^1$ calculables par la méthode établie au paragraphe 2 en l'absence de contraintes résiduelles et en supposant l'interface parfaite. Les contraintes résiduelles trouvées dans la section précédente se superposent simplement à ces contributions induites par le chargement extérieur. Il en va de même des allongements respectifs.

3.3 Energie élastique stockée totale

Le champ de contraintes qui règne dans l'assemblage fibre–matrice soumis à la force extérieure F précédente se décompose en un champ de contraintes résiduelles, $\underline{\sigma}_0(\underline{\mathbf{X}})$ qui se déduit des résultats du paragraphe 3.1, et un champ de contraintes induites par le chargement extérieur, $\underline{\sigma}_1(\underline{\mathbf{X}})$ qui se déduit des résultats de la question précédente :

$$\underline{\sigma}(\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\sigma}_0(\underline{\mathbf{X}}) + \underline{\sigma}_1(\underline{\mathbf{X}}), \quad \forall \underline{\mathbf{X}} \in \Omega \quad (24)$$

où Ω désigne l'assemblage fibre–matrice de la figure 3 (à droite). On ne demande pas d'exprimer ces champs dans la matrice et dans la fibre.

Montrer de façon générale que l'énergie élastique stockée dans le composite déformé est la somme de l'énergie due aux contraintes résiduelles et de celle engendrée par l'effort appliqué, autrement dit :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\sigma}_0 + \underline{\sigma}_1) : \underline{\mathbf{S}} : (\underline{\sigma}_0 + \underline{\sigma}_1) dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}_0 : \underline{\mathbf{S}} : \underline{\sigma}_0 dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}_1 : \underline{\mathbf{S}} : \underline{\sigma}_1 dV \quad (25)$$

où $\underline{\mathbf{S}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1}$ est le tenseur des souplesses, inverse du tenseur des modules d'élasticité. Noter que les valeurs de $\underline{\mathbf{S}}$ sont différentes dans la matrice et dans la fibre mais il n'est pas nécessaire d'explicitier ce fait pour établir le résultat précédent.

En déduire l'expression de l'énergie stockée par unité de longueur en fonction de $F_0, P_0, F_f^1, P_1, F_m^1$ et des matrices M_f et M_m .

Etablir l'égalité (25) revient à étudier la contribution croisée :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_1 : \boldsymbol{\mathcal{S}} : \boldsymbol{\sigma}_0 dV &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\mathcal{S}} : \boldsymbol{\sigma}_1 dV \\
&= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^0 u_{i,j}^1 = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^0 u_i^1)_{,j} - \sigma_{ij,j}^0 u_i^1 dV \\
&= \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^0 u_i^1 n_j dS = \int_{\partial\Omega} \underline{\boldsymbol{t}}_0^d \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^1 dS = 0
\end{aligned} \tag{26}$$

Au passage, on a utilisé les symétries majeures du tenseur des souplesses, une intégration par parties, le fait que le champ $\boldsymbol{\sigma}_0$ est à divergence nulle puisqu'il correspond à un état d'équilibre, le théorème de la divergence et enfin le fait que $\underline{\boldsymbol{t}}_0^d = 0$ sur la surface extérieure $\partial\Omega$ de l'assemblage fibre–matrice pendant tout le refroidissement. Le terme croisé s'annule donc et l'énergie associée au problème complet est la somme des énergies des deux problèmes élémentaires³.

En utilisant les résultats de la partie 1, l'énergie stockée par unité de longueur dans l'assemblage fibre–matrice en raison des contraintes induites par l'élaboration et par l'application de la charge extérieure F s'exprime comme la somme des contributions individuelles :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2L} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_1) : \boldsymbol{\mathcal{S}} : (\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_1) dV \\
&= \frac{1}{2} [F_0 \ P_0] [M_f] [F_0 \ P_0]^T + \frac{1}{2} [F_0 \ P_0] [M_m] [F_0 \ P_0]^T \\
&+ \frac{1}{2} [F_f^1 \ P_1] [M_f] [F_f^1 \ P_f^0]^T + \frac{1}{2} [F_m^1 \ -P_1] [M_m] [F_m^1 \ -P_f^0]^T
\end{aligned}$$

Noter que l'énergie associée aux contraintes résiduelles s'écrit simplement $\frac{1}{2} [F_0 \ P_0] [\mathcal{M}] [F_0 \ P_0]^T$ où $\mathcal{M} = M_f + M_m$, comme vu précédemment.

4 Décohésion fibre–matrice

A la suite de l'apparition d'une fissure horizontale au sein de la matrice, une décohésion entre la fibre et la matrice s'est produite sur une longueur \bar{L} , comme l'indique la figure 4. Noter la nouvelle position de l'origine du repère sur cette figure.

L'ensemble est alors soumis à la force de traction F . On suppose que la fibre et la matrice restent en contact dans la zone de décohésion en raison de l'effort P de compression induit essentiellement par l'état de précontrainte $P_0 < 0$. Par contre un glissement est possible entre la fibre et la matrice : c'est le déplacement axial relatif $u_z^f - u_z^m \neq 0$ pour les points de la zone de décohésion.

On se demande ici quelle est la nouvelle répartition des efforts axiaux et radiaux entre la fibre et la matrice en présence de décohésion. En particulier, ces efforts dépendent désormais de la cote z dans la zone de décohésion puisque la contrainte axiale $\sigma_{zz}(R_m \leq r \leq R_{ext}, z)$ doit s'annuler

3. Bien noter que l'établissement de ce résultat est basé, d'une part, sur le fait que le champ de contraintes résiduelles $\boldsymbol{\sigma}_0$ est associé à une répartition d'efforts nuls à sa surface et, d'autre part, sur le fait que le champ de déformations $\boldsymbol{\mathcal{S}} : \boldsymbol{\sigma}_1$ est compatible car issu d'un problème sans déformation thermique. A contrario, le champ de déformations élastiques $\boldsymbol{\mathcal{S}} : \boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\xi}^{th}$ n'est pas compatible car le champ $\boldsymbol{\xi}^{th}$ prenant des valeurs constantes distinctes dans chaque phase n'est pas compatible.

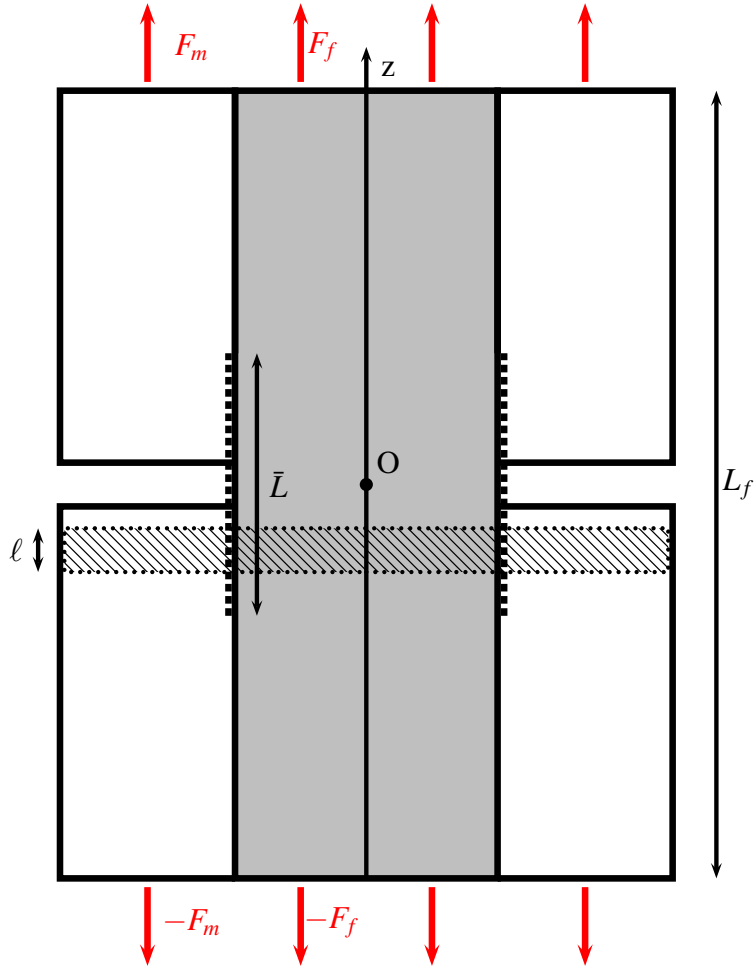


FIGURE 4 – Assemblage fibre–matrice présentant une fissure centrale au sein de la matrice et une décohésion de longueur \bar{L} entre la fibre et la matrice (lignes pointillées). L’ensemble est soumis à la force $F = F_m + F_f$ susceptible de conduire à une ouverture de la fissure centrale (ouverture très exagérée pour l’illustration). Une tranche plane d’épaisseur ℓ à la cote $-\bar{L}/2 \leq z \leq \bar{L}/2$ est également représentée. La figure représente une coupe longitudinale de l’assemblage qui présente une symétrie de révolution.

sur les lèvres de la fissure située en $z = 0$ sur la figure 4. Les lèvres de la fissure sont en effet libres de tout effort appliqué, au contraire des surfaces $z = -L_f/2$ et $z = L_f/2$.

Une solution analytique explicite de ce problème n’est pas disponible. On propose donc d’étudier une solution approchée basée sur l’hypothèse des tranches planes. L’hypothèse consiste à supposer que chaque tranche de matrice et chaque tranche de fibre constituant une tranche d’épaisseur infinitésimale ℓ de l’assemblage composite, initialement planes, représentées sur la figure 4, restent planes après déformation. Leurs épaisseurs respectives finales peuvent cependant différer.

Les efforts axiaux relaxés au niveau de la fissure dans la matrice sont repris sous forme d’une contrainte de cisaillement $\tau(z) = \sigma_{rz}(r = R_f, z)$ le long de la zone endommagée en contact. Les effets de ces contraintes de cisaillement à l’intérieur de la fibre et de la matrice sont toutefois négligés dans l’analyse de cette partie.

La justification ultime des approximations consenties est fournie par la confrontation à des

résultats de calculs par éléments finis non présentés ici, cf. (Coradi, 2014).

4.1 Etude d'une tranche plane

On étudie le comportement de la tranche plane de cote z de la figure 4. La tranche de fibre et la tranche de matrice correspondantes sont supposées rester planes après déformation. Le changement relatif d'épaisseur de ces tranches est noté

$$\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)_f - \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)_m$$

Ce glissement relatif peut être non nul dans la zone de décohésion $-\bar{L}/2 < z < \bar{L}/2$. Il s'annule en dehors.

L'effort résultant appliqué à la tranche de fibre vaut

$$F_f(z) = F_0 + F_f^1 + \Delta F(z)$$

L'effort résultant appliqué à la tranche de matrice vaut

$$F_m(z) = -F_0 + F_m^1 - \Delta F(z)$$

L'interface continue de transmettre la charge entre la fibre et la matrice :

$$P(z) = P_0 + P_1 + \Delta P(z)$$

Les efforts de précontraintes F_0 et P_0 et les efforts F_f^1, P_1 induits par la charge appliquée F sont les mêmes que dans la partie 3. La décohésion induit les perturbations $\Delta F(z)$ et $\Delta P(z)$ qui, contrairement aux contributions précédentes, dépendent de la cote z . En conséquence de l'hypothèse de tranche plane, ces perturbations sont nulles pour $z < -\bar{L}/2$ et $z > \bar{L}/2$, c'est-à-dire en dehors de la zone de décohésion.

En appliquant les raisonnements utilisés dans la partie 3 à cette tranche élémentaire à la cote z , montrer que les perturbations des efforts sont liées par le système d'équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)_f - \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)_m \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathcal{M}] \begin{bmatrix} \Delta F \\ \Delta P \end{bmatrix} \quad (27)$$

où \mathcal{M} est la matrice donnée par l'expression (21).

Ce résultat permet de calculer le glissement relatif fibre-matrice lorsque l'on connaît $\Delta F(z)$ dont la détermination fait l'objet de la suite de cette partie.

Extraire également de (27) la relation entre $\Delta P(z)$ et $\Delta F(z)$.

Dans l'hypothèse des tranches planes, les champs de déplacements, contraintes et déformations sont toujours de la forme étudiée dans la partie 1. Les incréments ΔF et ΔP par rapport au champ initial imposé par les précontraintes et la charge appliquée entraîne les variations relatives de longueur et de rayon de la fibre données par

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)_f \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_f \end{bmatrix} = [M_f] \begin{bmatrix} \Delta F \\ \Delta P \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)_m \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_m \end{bmatrix} = [M_m] \begin{bmatrix} -\Delta F \\ -\Delta P \end{bmatrix}$$

où les matrices M_f et M_m sont toujours données par (1) et (8) respectivement. Le fait que la fibre et la matrice soient supposées rester en contact dans la zone de décohésion implique que $(\Delta R/R)_m = (\Delta R/R)_f$. Les allongements relatifs de la fibre et de la matrice sont identiques pour les tranches prélevées dans la zone saine. Ils peuvent différer dans la zone de décohésion en raison d'un possible glissement relatif. La soustraction des deux systèmes précédents conduit alors au résultat annoncé (27). On en déduit en particulier que

$$\Delta P(z) = k\Delta F(z), \quad \text{avec} \quad k = \nu \left(\frac{1-\nu}{2} + \beta \right)^{-1} \quad (28)$$

4.2 Profil de force axiale en fonction de z

On examine les efforts s'exerçant sur la tranche de fibre d'épaisseur $\ell = dz$. Elle est soumise à l'effort axial $F_0 + F_f^1 + \Delta F(z + dz)$ sur la face $z + dz$ et à $-F_0 - F_f^1 - \Delta F(z)$ sur la face z . La force de cohésion $P(z)$ et la contrainte de cisaillement $\tau(z)$ s'exercent sur la surface $r = R_f$ d'épaisseur dz de la tranche de fibre.

En faisant le bilan de ces efforts sur cette tranche de fibre, donner l'équation différentielle régissant $\Delta F(z)$.

Résoudre cette équation dans le cas où le contact fibre–matrice dans la zone de décohésion donne lieu à du frottement statique de Coulomb de la forme

$$\tau(z) = \eta\sigma_{rr}(R_f, z) \quad (29)$$

où η est le coefficient de frottement. En introduisant la notation $T = 2\pi R_f \tau$, la loi de frottement s'écrit également

$$T(z) = \frac{\eta}{R_f} P(z) \quad (30)$$

Résoudre alors l'équation différentielle pour trouver le profil $F_m(z)$.

Utiliser une condition à la limite adéquate pour déterminer complètement ce profil.

Les efforts selon z appliqués à la tranche de fibre s'équilibrent de la manière suivante :

$$\Delta F(z + dz) - \Delta F(z) + \tau(z)2\pi R_f dz = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\Delta F}{dz} = -2\pi R_f \tau(z)$$

L'application de la loi de Coulomb,

$$\tau = \eta\sigma_{rr}(R_f, z) \quad \Longrightarrow \quad \frac{T}{2\pi R_f} = \eta \frac{P_f(z)}{2\pi R_f^2}$$

conduit à la relation (30). L'équation différentielle à résoudre est donc

$$\frac{d\Delta F}{dz} = -T(z)$$

Cette équation se met également sous la forme

$$\frac{d\Delta P}{dz} = -\frac{k\eta}{R_f} P_f$$

où le coefficient k a été défini dans (28). Cette équation peut s'écrire aussi

$$\frac{d(P_0 + P_1 + \Delta P)}{dz} = -\frac{k\eta}{R_f}(P_0 + P_1 + \Delta P)$$

qui se résout en

$$P_0 + P_1 + \Delta P = C \exp\left(-\frac{\eta k}{R_f} z\right)$$

La condition permettant de fixer la constante C est obtenue en tenant compte du fait qu'en $z = 0$ les efforts sur la lèvres de la fissure sont nuls $F_m(0) = 0 = F_m^1 - F_0 - \Delta F(0)$.

4.3 Energie de surface et rupture

On étudie l'événement élémentaire que constitue un accroissement de longueur infinitésimale ℓ de la zone de décohésion. Pour cela on s'intéresse à la transformation que subit la tranche de cote $z = \bar{L}/2$ qui comporte initialement une interface saine et dont l'interface d'épaisseur ℓ est rompue à un instant ultérieur. L'événement se produit sous la charge imposée F et on suppose que le contact reste établi entre la fibre et la matrice.

Cette tranche passe donc de l'état caractérisé par les efforts $F_0 + F_f^1, P_0 + P_1$ dans la fibre et $-F_0 + F_m^1, P_0 + P_1$ dans la matrice à l'état final caractérisé par $F_0 + F_f^1 + \Delta F_\gamma, P_0 + P_1 + \Delta P_\gamma$ et $-F_0 + F_m^1 - \Delta F_\gamma, P_0 + P_1 + \Delta P_\gamma$. L'objectif de cette question est de déterminer l'incrément de force ΔF_γ , et l'incrément ΔP_γ associé. La décohésion de l'interface s'accompagne d'un incrément de glissement relatif entre fibre et matrice, caractérisé par le déplacement relatif $\delta u_z = u_z^f(z = 0, r = R_f) - u_z^m(z = 0, r = R_f) = -u_z^m(z = 0, r = R_f)$, le premier déplacement étant fixé à zéro.

Un bilan d'énergie global va permettre de déterminer la variation ΔF_γ qui correspond à un saut de $\Delta F(z)$ en $z = \ell$. Le travail extérieur fourni au système, δW , donne lieu à trois contributions au sein de l'assemblage fibre-matrice :

- la variation d'énergie élastique stockée au sein de la matrice et de la fibre, δW_{elas} ;
- une énergie fournie pour la décohésion de la fibre et de la matrice,

$$\delta W_\gamma = \gamma 2\pi R_f \ell$$

où γ est l'énergie de surface de l'interface fibre-matrice. Cette énergie fournie correspond à la rupture des liaisons atomiques dans l'interface ;

- le travail des forces de frottement dans la zone de décohésion,

$$\delta W_{frot} = (F_m^1 - F_0 - \Delta F_\gamma) \delta u_z$$

Justifier que $\delta W = F \delta u_z^f(z > \bar{L}/2)$ c'est-à-dire le déplacement en dehors de la zone de cohésion qui est uniforme puisque les déformations n'y ont pas varié.

A l'aide des résultats acquis dans l'ensemble du problème, exprimer δW_{elas} .

Justifier l'expression donnée de δW_{frot} .

Déduire du bilan d'énergie l'expression de ΔF_γ . Vérifier qu'elle ne dépend pas de F appliquée. Calculer numériquement la valeur de ΔF_γ pour les composites carbone-époxyde et SiC-titane en prenant la valeur suivante, typique, d'énergie de surface : $\gamma = 1 \text{ J.m}^{-2}$.

Le déplacement du composite dans son ensemble lors d'un incrément de décohésion est liée à l'incrément de déplacement δu_z résultant du glissement relatif fibre matrice. En effet

ce déplacement se répercute intégralement (translation d'ensemble) sur la partie saine du composite. Ce déplacement s'effectue sous la force F appliquée, d'où l'expression donnée pour δW .

La variation d'énergie élastique entre les deux états $F_0 + F_f^1, P_0 + P_1$ et l'état final $F_0 + F_f^1 + \Delta F_\gamma, P_0 + P_1 + \Delta P_\gamma$ se calcule successivement de la sorte :

$$\begin{aligned}
\delta W_{elas}/\delta \ell &= E^{elas}(F_0 + F_f^1 + \Delta F_\gamma, P_0 + P_1 + \Delta P_\gamma) \\
&- E^{elas}(F_0 + F_f^1, P_0 + P_1) \\
&= E^{elas}(F_f^1, P_1) + E^{elas}(F_0 + \Delta F_\gamma, P_0 + \Delta P_\gamma) \\
&- E^{elas}(F_0, P_0) - E^{elas}(F_f^1, P_1) \\
&= E^{elas}(F_0 + \Delta F_\gamma, P_0 + \Delta P_\gamma) - E^{elas}(F_0, P_0) \\
&= \frac{1}{2}[F_0 + \Delta F_\gamma \quad P_0 + \Delta P_\gamma] [\mathcal{M}] [F_0 + \Delta F_\gamma \quad P_0 + \Delta P_\gamma]^T - \frac{1}{2}[F_0 \quad P_0] [\mathcal{M}] [F_0 \quad P_0]^T \\
&= [F_0 \quad P_0] [\mathcal{M}] [\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma]^T + \frac{1}{2}[\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma] [\mathcal{M}] [\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma]^T \\
&= [F_0 \quad P_0] [(\Delta \ell/\ell)_f - (\Delta \ell/\ell)_m \quad 0] + \frac{1}{2}[\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma] [\mathcal{M}] [\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma]^T \\
&= F_0((\Delta \ell/\ell)_f - (\Delta \ell/\ell)_m) + \frac{1}{2}[\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma] [\mathcal{M}] [\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma]^T \tag{31}
\end{aligned}$$

Le passage de la première à la seconde équation est basé sur l'utilisation de la relation (25) pour la superposition d'un champ de contraintes résiduelles, ici associées à $F_0 + \Delta F_\gamma, P_0 + \Delta P_\gamma$, et le champ dû à l'application de F_f^1, P_1 à l'assemblage composite dans son état naturel. L'avant-dernière équation utilise l'expression (27) trouvée précédemment.

Le travail des efforts de frottement est $\int_{z=0}^{\bar{L}} \tau \delta u_z dz = \int_{z=0}^{\bar{L}} \tau dz \delta u_z$ car la décohésion élémentaire entraîne un mouvement de translation constant δu_z de l'ensemble de la zone de décohésion. L'effort résultant $\int_{z=0}^{\bar{L}} \tau dz = F_m - \Delta F_\gamma$ comme le montre un bilan des efforts agissant sur la tranche de fibre d'épaisseur \bar{L} .

On va ensuite tirer parti de la relation suivante :

$$F_f \delta u_z^f + F_m \delta u_z^m = 0$$

qui résulte du fait que

$$\begin{aligned}
F_f \delta u_z^f &= \frac{F_f^1}{E_f S_f} \left(1 - \nu \nu_f \left(\frac{1 - \nu}{2} + \beta \right)^{-1} \right) \Delta F \delta \ell \\
F_m \delta u_z^m &= -\frac{F_m^1}{E_m S_m} \left(1 - \nu \nu_m \left(\frac{1 - \nu}{2} + \beta \right)^{-1} \right) \Delta F \delta \ell
\end{aligned}$$

en utilisant le système défini précédemment sur la tranche en question. Le résultat s'obtient alors en se rappelant de la relation (16). Cette contribution nulle $F_f \delta u_z^f + F_m \delta u_z^m$ est ajoutée au travail calculé δW^{elas} . Finalement,

$$\delta W = \delta W^{elas} + \delta W_\gamma + \delta W_{frot}$$

$$(F_f + F_m) \delta u_z^f = (F_f + F_0) \delta u_z^f + (F_m - F_0) \delta u_z^m + \frac{1}{2}[\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma] [\mathcal{M}] [\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma]^T \delta \ell$$

$$+2\pi R_f \gamma \delta \ell + (F_m - F_0 - \Delta F_\gamma)(\delta u_z^f - \delta u_z^m)$$

de sorte que

$$0 = \frac{1}{2}[\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma][\mathcal{M}][\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma]^T \delta \ell - \Delta F_\gamma(\delta u_z^f - \delta u_z^m) + 2\pi R_f \gamma \delta \ell$$

Or, on a vu que

$$[\delta u_z^f - \delta u_z^m \quad 0] = [\mathcal{M}][\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma] \delta \ell$$

de sorte que

$$2\pi R_f \gamma \delta \ell = \frac{1}{2}[\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma][\mathcal{M}][\Delta F_\gamma \quad \Delta P_\gamma]^T \delta \ell = \frac{1}{2}\Delta F_\gamma(\delta u_z^f - \delta u_z^m)$$

L'explicitation des composantes de \mathcal{M} conduit alors à l'expression du saut d'effort induit par la décohésion :

$$\begin{aligned} 2\pi R_f \gamma &= \Delta F_\gamma(\Delta F_\gamma - \nu \Delta P_\gamma)/ES = \frac{1}{2}(1 - \nu^2/((1 - \nu)/2 + \beta))/ES \Delta F_\gamma^2 \\ &= \frac{1}{2}ES \det \mathcal{M}/((1 - \nu)/2 + \beta) \Delta F_\gamma^2 = \frac{1}{4} \Delta F_\gamma^2 / ES \end{aligned}$$

4.4 Calcul de la longueur de la zone de décohésion

Le résultat précédent permet de raccorder le profil $F_m(z)$ déterminé de manière unique dans la question 4.2 à la valeur constante de F_m dans la zone saine du composite.

Tracer le profil de $F_m(z)$ qui présente donc le saut ΔF_γ en $z = \bar{L}/2$. La condition de raccord fournit l'équation donnant la longueur de décohésion \bar{L} en fonction de la charge F appliquée.

Donner explicitement cette expression qui correspond à la loi d'endommagement de décohésion du composite.

Le profil de force $F_m(z)$ est entièrement déterminée par la fonction exponentielle (??) dans la zone de décohésion. Toutefois la taille de la zone de décohésion \bar{L} en fonction de la force appliquée F reste inconnue. Elle est maintenant déterminée en faisant le raccordement en $z = \bar{L}/2$ avec la valeur de la force F_m dans la zone saine, bien connues, en tenant compte du saut ΔF_γ associé à la décohésion :

$$F_0 - F_f^1 = F(1 - \exp(-\frac{\eta k \bar{L}}{2R_f})) + \Delta F_\gamma$$

ou de manière équivalente :

$$F_0 + \Delta F_\gamma + F_f^1 = F \exp(-\frac{\eta k \bar{L}}{2R_f}) \quad (32)$$

Références

Coradi (2014). *Approche multi-échelles en vue du composite numérique*. Thèse de doctorat.