

# Ondes de surface et tremblements de terre

L'objectif du problème est de mettre en évidence l'existence d'ondes de surface dans les milieux élastiques isotropes, ondes dont l'importance physique et humaine apparaîtra clairement grâce à l'application numérique consacrée aux tremblements de terre.

Dans l'ensemble du problème, on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. L'effet de la gravité n'est pas pris en compte.

Pour une analyse plus complète de ces phénomènes, on pourra consulter les références (Landau and Lifschitz, 1980) et (Rakotomanana Ravelonarivo, 2009).

## 1 Préliminaires

On sait que deux types d'ondes peuvent se propager dans un milieu homogène élastique linéaire et isotrope, à savoir les ondes longitudinales et les ondes transversales. On admet que le champ de déplacement au sein d'un tel milieu peut se décomposer<sup>1</sup> en deux contributions

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\mathbf{u}}_L(\underline{\mathbf{X}}) + \underline{\mathbf{u}}_T(\underline{\mathbf{X}}) \quad (2)$$

telles que

$$\text{rot } \underline{\mathbf{u}}_L = 0 \quad \text{et} \quad \text{div } \underline{\mathbf{u}}_T = 0 \quad (3)$$

où  $\text{div}$  et  $\text{rot}$  désignent respectivement les opérateurs divergence et rotationnel.

On rappelle que le champ de déplacement d'un tel milieu vérifie les équations de Navier

$$(\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div } \underline{\mathbf{u}}) + \mu\Delta\underline{\mathbf{u}} = \rho\underline{\mathbf{a}} \quad (4)$$

en l'absence d'efforts de volume et où  $\underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{X}})$  désigne le champ d'accélération du milieu. Les constantes de Lamé du milieu sont  $\lambda$  et  $\mu$ . L'opérateur  $\Delta$  représente le laplacien<sup>2</sup>.

### 1.1 Equations des ondes

Montrer (ou admettre) que si, dans un corps homogène élastique linéaire et isotrope, le champ  $\underline{\mathbf{u}}_L$ , dit onde longitudinale, et le champ  $\underline{\mathbf{u}}_T$ , dit onde transversale, vérifient, séparément, les équations de Navier, alors ils satisfont également aux équations d'ondes :

$$c_L^2 \Delta\underline{\mathbf{u}}_L = \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}_L}{\partial t^2}, \quad c_T^2 \Delta\underline{\mathbf{u}}_T = \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}_T}{\partial t^2} \quad (5)$$

où  $c_L$  et  $c_T$  désignent respectivement la célérité des ondes longitudinales et la célérité des ondes transversales que l'on exprimera en fonction des caractéristiques du milieu.

---

<sup>1</sup>De toute évidence une telle décomposition n'est pas unique. Elle est associée à la décomposition dite de Helmholtz qui fait intervenir un potentiel scalaire  $\phi(\underline{\mathbf{X}})$  et un potentiel vecteur  $\underline{\Phi}$  :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}) = \text{grad } \phi(\underline{\mathbf{X}}) + \text{rot } \underline{\Phi}(\underline{\mathbf{X}}). \quad (1)$$

<sup>2</sup> Le laplacien d'un champ de vecteur, dans un système de coordonnées cartésiennes, est le vecteur ayant pour composantes le laplacien de chaque composante correspondante.

Si le champ  $\underline{u}_T$ , à divergence nulle, vérifie les équations de Navier (4), alors il vérifie également l'équation des ondes (5). D'autre part, un champ  $\underline{u}_L$ , à rotationnel nul, est tel que

$$\text{grad div } \underline{u}_L = \Delta \underline{u}_L - \text{rot rot } \underline{u}_L = \Delta \underline{u}_L$$

de sorte qu'il vérifie également une équation des ondes. Les célérités ont pour expressions :

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (6)$$

## 1.2 Rapport des célérités

Exprimer le rapport des célérités des ondes transversales et longitudinales en fonction du coefficient de Poisson. En déduire que, quel que soit le milieu homogène élastique linéaire et isotrope considéré, on a :

$$0 < c_T < c_L \quad (7)$$

Le rapport des célérités transversale et longitudinale vaut :

$$\frac{c_T}{c_L} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}} \quad (8)$$

La thermodynamique impose  $-1 < \nu < 0.5$ . Le rapport des célérités est une fonction monotone décroissante sur cet intervalle (cf. figure 1) de sorte qu'on obtient l'intervalle suivant

$$0 < \frac{c_T}{c_L} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \quad (9)$$

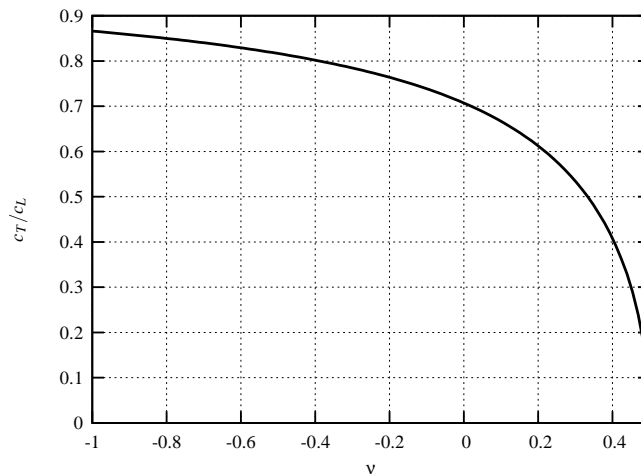


FIG. 1 – Variation du rapport des célérités relatives des ondes dans les milieux élastiques linéaires isotropes en fonction du coefficient de Poisson.

## 2 Ondes dans un massif semi-infini

On considère un massif semi-infini limité par le plan  $X_3 = 0$ , selon le système de coordonnées cartésiennes orthonormées défini sur la figure 2. L'origine du repère et l'orientation de l'axe 3 sont choisies de telle sorte que les points matériels du massif soient caractérisés par  $X_3 \leq 0$ . Dans cette partie, aucune condition aux limites n'est encore spécifiée sur la surface  $X_3 = 0$ . Le milieu semi-infini est supposé constitué d'un matériau homogène, au comportement élastique linéarisé et isotrope.

On s'intéresse aux ondes planes se propageant dans la direction 1 et invariantes selon la direction 2. Elles s'expriment comme la superposition d'une onde longitudinale et d'une onde transversale que l'on représente sous la forme exponentielle complexe suivante :

$$\underline{\mathbf{u}}_L(\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\mathbf{f}}^L(X_3)e^{ik(X_1-ct)}, \quad \underline{\mathbf{u}}_T(\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\mathbf{f}}^T(X_3)e^{ik(X_1-ct)} \quad (10)$$

Le vecteur d'onde admet  $k > 0$ , le nombre d'onde, comme unique composante réelle non nulle, dans la direction 1. La célérité de l'onde est réelle et vaut  $c$ . En outre,  $i^2 = -1$ . Dans cette représentation, les champs recherchés correspondent aux parties réelles des champs précédents. Les champs  $\underline{\mathbf{u}}_L$  et  $\underline{\mathbf{u}}_T$  recherchés vérifient les équations de Navier et les conditions (3).

Les grandeurs  $\underline{\mathbf{f}}^L(X_3)$  et  $\underline{\mathbf{f}}^T(X_3)$  sont deux champs de vecteurs à déterminer, ne dépendant que de la variable  $X_3$  et caractérisant l'amplitude des ondes étudiées.

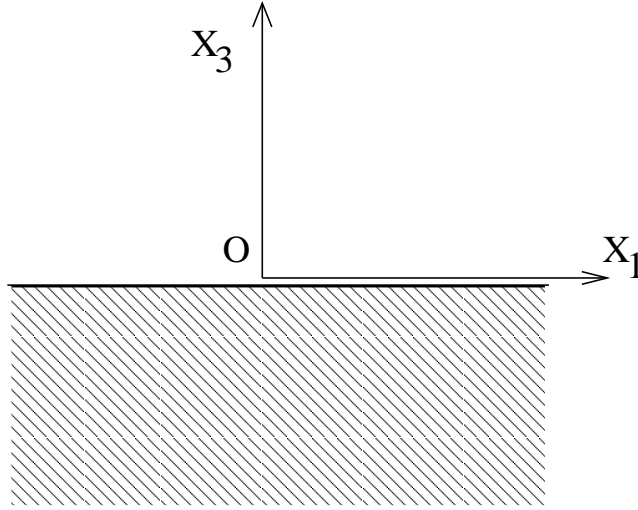


FIG. 2 – Coupe par le plan  $(X_1, X_3)$  d'un massif semi-infini et repérage correspondant.

### 2.1

Donner les deux équations différentielles vectorielles régissant les fonctions  $\underline{\mathbf{f}}^L(X_3)$  et  $\underline{\mathbf{f}}^T(X_3)$ .

Les champs  $\underline{\mathbf{u}}_L$  et  $\underline{\mathbf{u}}_T$  vérifient les équations d'ondes (5). Les deux équations différentielles recherchées s'en déduisent :

$$\frac{d^2 \underline{\mathbf{f}}^L}{dX_3^2} = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_L^2}\right) \underline{\mathbf{f}}^L, \quad \frac{d^2 \underline{\mathbf{f}}^T}{dX_3^2} = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2}\right) \underline{\mathbf{f}}^T \quad (11)$$

## 2.2 Ondes de surface

On s'intéresse dans la suite du problème aux ondes de surface dont l'amplitude décroît exponentiellement lorsque  $X_3 \rightarrow -\infty$ .

Justifier que de telles ondes de surface ne peuvent exister que si leur célérité est plus faible que la célérité des ondes transversales dans le volume :

$$c < c_T \quad (12)$$

Montrer que les amplitudes de telles ondes de surface se mettent sous la forme :

$$\underline{\mathbf{f}}^L = \underline{\mathbf{A}} e^{b_L X_3}, \quad \underline{\mathbf{f}}^T = \underline{\mathbf{B}} e^{b_T X_3} \quad (13)$$

avec

$$b_L = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_L^2}}, \quad b_T = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}} \quad (14)$$

Les solutions des équations différentielles (11) sont les fonctions exponentielles (13). Les nombres  $b_L$  et  $b_T$  solutions sont ou bien imaginaires purs ou bien réels. Les solutions imaginaires pures correspondent à des solutions harmoniques. Les solutions évanescentes sont obtenues lorsque, simultanément,  $b_L$  et  $b_T$  sont des nombres réels, c'est-à-dire lorsque  $c < c_T$  et  $c < c_L$ . Comme  $c_T < c_L$ , la première condition suffit.

## 2.3

Montrer que l'onde longitudinale  $\underline{\mathbf{u}}_L$  n'a pas de composante dans la direction 2 :  $A_2 = 0$ .

Etablir deux autres relations, l'une portant sur les composantes de  $\underline{\mathbf{A}}$  et l'autre sur les composantes de  $\underline{\mathbf{B}}$ .

Le rotationnel de  $\underline{\mathbf{u}}_L$  est nul, ce qui implique :

$$\frac{\partial u_{L2}}{\partial x_3} - \frac{\partial u_{L3}}{\partial x_2} = \frac{\partial u_{L3}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_{L1}}{\partial x_3} = \frac{\partial u_{L1}}{\partial x_2} - \frac{\partial u_{L2}}{\partial x_1} = 0$$

La première et la troisième équation fournissent  $A_2 = 0$ .

La deuxième équation exige que

$$ikA_3 - b_L A_1 = 0 \quad (15)$$

La divergence du champ  $\underline{\mathbf{u}}_T$  est nulle de sorte que :

$$ikB_1 + b_T B_3 = 0 \quad (16)$$

## 3 Ondes de Rayleigh

On considère maintenant que la surface  $X_3$  du massif semi-infini précédent est libre de tout effort. Dans ce cas, les ondes de surfaces sont appelées ondes de Rayleigh qui les mit en évidence de manière théorique en 1887. La forme obtenue précédemment est rappelée ci-dessous :

$$[\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t)] = \begin{bmatrix} A_1 e^{b_L X_3} + B_1 e^{b_T X_3} \\ B_2 e^{b_T X_3} \\ A_3 e^{b_L X_3} + B_3 e^{b_T X_3} \end{bmatrix} e^{ik(X_1 - ct)} \quad (17)$$

### 3.1 Déformations

Calculer le gradient du champ de déplacements (17) et le champ des déformations infinitésimales correspondantes.

Indiquer les conditions assurant le respect du contexte infinitésimal.

### 3.2 Contraintes

Calculer le champ des contraintes associées, toujours dans le cadre de l'élasticité homogène isotrope linéarisée.

Le gradient du déplacement et le tenseur des déformations infinitésimales sont :

$$[\text{grad } \underline{\mathbf{u}}] = \begin{bmatrix} ik(A_1 e^{b_L X_3} + B_1 e^{b_T X_3}) & 0 & A_1 b_L e^{b_L X_3} + B_1 b_T e^{b_T X_3} \\ ik B_2 e^{b_T X_3} & 0 & b_T B_2 e^{b_T X_3} \\ ik(A_3 e^{b_L X_3} + B_3 e^{b_T X_3}) & 0 & A_3 b_L e^{b_L X_3} + B_3 b_T e^{b_T X_3} \end{bmatrix} e^{ik(X_1 - ct)}$$

$$[\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{X}}, t)] = \frac{1}{2} \left( [\text{grad } \underline{\mathbf{u}}] + [\text{grad } \underline{\mathbf{u}}]^T \right)$$

Les contraintes s'obtiennent en appliquant la loi de Hooke :  $\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\text{trace } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}})\underline{\mathbf{1}} + 2\mu\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ .

### 3.3 Polarisation des ondes de Rayleigh

En utilisant la condition aux limites de surface libre en  $X_3 = 0$ , montrer d'abord que  $B_2 = 0$ . Cela signifie que  $u_2 = 0$  et que les ondes de Rayleigh sont polarisées dans le plan (1,3). C'est une caractéristique importante de ce type d'ondes de surface.

### 3.4 Equation de Rayleigh

En achevant l'exploitation de la condition aux limites en  $X_3 = 0$ , établir que le carré du rapport  $c/c_T$  de la célérité des ondes de Rayleigh sur la célérité des ondes transversales en volume est racine du polynôme suivant :

$$P(\xi) = \xi^3 - 8\xi^2 + 8\xi\left(3 - 2\frac{c_T^2}{c_L^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_T^2}{c_L^2}\right) \quad (18)$$

La célérité des ondes de Rayleigh ne dépend donc que des célérités des ondes élastiques volumiques. En particulier, elle ne dépend pas du vecteur d'onde  $k$ .

### 3.5

Montrer qu'il existe au moins une racine du polynôme  $P(\xi)$  satisfaisant aux exigences requises pour  $c$ . On peut montrer que cette racine est unique mais on l'admettra ici.

On établira enfin que le rapport des amplitudes des ondes de Rayleigh transversale et longitudinale vaut :

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{2c_T^2}{2c_T^2 - c^2} \quad (19)$$

Le vecteur–contrainte est nul à la surface  $X_3$  en l'absence d'effort appliqué :

$$\underline{t}(X_3 = 0) = \underline{\sigma}(X_3 = 0) \cdot \underline{e}_3 = [\sigma_{13}(0) \quad \sigma_{23}(0) \quad \sigma_{33}(0)]^T = 0 \quad (20)$$

En particulier,

$$\sigma_{23}(X_3 = 0) = \mu b_T B_2 = 0 \quad \implies \quad B_2 = 0$$

ce qui montre que la composante de déplacement transversal  $u_2$  est nulle en tout point pour une onde de Rayleigh.

On exploite ensuite la condition

$$\sigma_{13}(X_3 = 0) = \mu (A_1 b_L + B_1 b_T + ikA_3 + ikB_3) = 0$$

En utilisant les relations (15) et (16), on obtient une première équation portant sur  $A_1$  et  $B_1$  :

$$2A_1 b_L + B_1 b_T \left(1 + \frac{k^2}{b_T^2}\right) = 0 \quad (21)$$

La condition aux limites sur  $\sigma_{33}(X_3)$  fournit une seconde relation :

$$\lambda ik(A_1 + B_1) + (\lambda + 2\mu)(A_3 b_L + B_3 b_T) = 0$$

Profitant du fait que  $\lambda/\rho = c_L^2 - 2c_T^2$  et que  $\mu/\rho = c_T^2$ , l'équation précédente se met sous la forme

$$A_1(c^2 - 2c_T^2) - 2c_T^2 B_1 = 0 \quad (22)$$

Au passage, cette équation fournit la valeur du rapport des amplitudes de  $u_{L1}$  et  $u_{L2}$ , annoncée par l'équation (19). Remarquer en outre que

$$-2 \leq \frac{A_1}{B_1} \leq -1$$

de sorte que la partie longitudinale peut être jusqu'à 2 fois plus intense que la partie transversale. Le système homogène à deux inconnues formé des équations (21) et (22) admet une solution non triviale à condition que son déterminant soit nul :

$$4b_L c_T^2 + b_T \left(1 + \frac{k^2}{b_T^2}\right) (c^2 - 2c_T^2) = 0$$

dont voici des transformations successives en utilisant les expressions des  $b_{L,T}$  en fonction de  $k$  et  $c_{L,T}$  :

$$\begin{aligned} 4b_L b_T &= k^2 \left(2 - \frac{c^2}{c_T^2}\right)^2 \\ 16 \left(1 - \frac{c^2}{c_L^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2}\right) &= \left(2 - \frac{c^2}{c_T^2}\right)^4 \\ \frac{c^2}{c_T^2} \left( \frac{c^6}{c_T^6} - 8 \frac{c^4}{c_T^4} + 8 \frac{c^2}{c_T^2} \left(3 - 2 \frac{c_T^6}{c_L^6}\right) - 16 \left(1 - \frac{c_T^2}{c_L^2}\right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

La solution  $c = 0$  conduit à  $A_1 = B_1$ , d'après (19) et à la nullité de  $\underline{u}$  au complet. On cherche plutôt la solution non triviale correspondant à un rapport  $c^2/c_T^2$  racine du polynôme (18).

La solution recherchée  $c/c_T$  doit être positive et inférieure à 1. Remarquons alors que

$P(0) = -16(1 - c_T^2/c_L^2) < 0$  et que  $P(1) = 1$  de sorte qu'il existe au moins une racine de  $P(\xi)$  satisfaisant les conditions physiques requises. La dérivée de  $P(\xi)$  vaut

$$P'(\xi) = 3\xi^2 - 16\xi + 8\left(3 - 2\frac{c_T^2}{c_L^2}\right)$$

Son discriminant est négatif si  $c_T^2/c_L^2 \leq 1/6$  de sorte que, dans ces conditions, la fonction  $P(\xi)$  est monotone croissante et admet une seule racine, la racine recherchée. Pour  $c_T^2/c_L^2 > 1/6$ , une étude plus détaillée permet également d'établir qu'il y a une seule racine entre 0 et 1.

### 3.6 Trajectoires des points matériels

Forts des résultats précédents, indiquez la forme de la trajectoire des points matériels situés à la surface libre du massif. Dans quel sens parcourent-ils leur trajectoire ?

Quelle serait la trajectoire de ces points si le milieu était constitué d'un fluide au comportement élastique linéarisé ?

En tenant compte des résultats acquis sur les constantes  $A_i$  et  $B_i$ , à savoir les relations (15), (16) et (19), le champ de déplacement (17) prend la forme suivante :

$$u_1 = A_1 \left( e^{b_L X_3} - \left(1 - \frac{c^2}{2c_T^2}\right) e^{b_T X_3} \right) e^{ik(X_1 - ct)} \quad (24)$$

$$u_2 = 0 \quad (25)$$

$$u_3 = iA_1 \left( -\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_L^2}} e^{b_L X_3} + \frac{1 - \frac{c^2}{2c_T^2}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}}} e^{b_T X_3} \right) e^{ik(X_1 - ct)} \quad (26)$$

En prenant la partie réelle de ces champs, pour  $A_1$  réel, la trajectoire d'un point matériel de la surface  $X_3 = 0$  est décrite par

$$u_1 = C \cos(k(X_1 - ct)), \quad u_3 = -D \sin(k(X_1 - ct)) \quad (27)$$

avec

$$C = A_1 \frac{c^2}{2c_T^2}, \quad D = A_1 \left( \frac{1 - \frac{c^2}{2c_T^2}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}}} - \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_L^2}} \right)$$

Les points matériels évoluent donc sur une ellipse centrée sur leur position initiale :

$$\left(\frac{u_1}{C}\right)^2 + \left(\frac{u_3}{D}\right)^2 = \frac{(x_1 - X_1)^2}{C^2} + \frac{x_3^2}{D^2} = 1 \quad (28)$$

L'équation de Rayleigh sous la forme (23) permet ensuite de montrer que

$$D = \frac{A_1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}}} \left( -\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_L^2}} + 1 - \frac{c^2}{2c_T^2} \right) = \frac{A_1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}}} \left(1 - \frac{c^2}{2c_T^2}\right) \frac{c^2}{2c_T^2}$$

Le coefficient  $D$  est donc du signe de  $C$ . L'ellipse est donc parcourue dans le sens indirect par rapport à l'axe 2.

On peut vérifier que le rapport  $D/C$  est toujours supérieur à 1 lorsque  $c/c_T$  reste entre 0 et  $\sqrt{3}/2$ . Par conséquent, la trajectoire elliptique est plus allongée verticalement.

Lorsque le milieu est un fluide élastique, le milieu ne résiste pas au cisaillement (“ $\mu = 0$ ,  $c_T = 0$ ”) et seules les ondes longitudinales peuvent exister dans le volume. Dans un fluide pesant incompressible, on sait qu’il existe des ondes progressives évanescentes dans la profondeur, correspondant au phénomène de la houle. La trajectoire des points sont également des ellipses, proches de cercles en milieu profond, et parcourues dans le sens direct (Germain, 1986).

### 3.7 Formation d’une faille due à un tremblement de terre

Le milieu est constitué d’une roche fragile supposée isotrope dont la contrainte à rupture vaut  $\sigma_0$ . Déterminer la valeur critique du produit  $kA_1$  pour laquelle une faille peut se former à la surface du massif. Indiquer également l’orientation de la première faille à se former.

Plusieurs composantes du tenseur des contraintes sont nulles à la surface du massif :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \quad (29)$$

Les seules composantes non nulles sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \lambda \text{trace } \boldsymbol{\xi} = \lambda(ki(A_1 + B_1) + (A_3b_L + B_3b_T))e^{ik(X_1-ct)} \\ \sigma_{11} &= \lambda \text{trace } \boldsymbol{\xi} + 2\mu\varepsilon_{11} = (\lambda(ki(A_1 + B_1) + (A_3b_L + B_3b_T)) + 2\mu ik(A_1 + B_1))e^{ik(X_1-ct)} \end{aligned} \quad (30)$$

Les parties réelles correspondantes sont

$$\sigma_{22}(X_1, t) = -kA_1\lambda\frac{c^2}{c_L^2} \sin(k(X_1 - ct)), \quad \sigma_{11}(X_1, t) = -kA_1(\lambda\frac{c^2}{c_L^2} + \mu\frac{c^2}{c_T^2}) \sin(k(X_1 - ct)) \quad (31)$$

Ce sont les deux contraintes principales. Elles croissent et décroissent en phase. La plus grande contrainte principale est

$$\sigma_{11}^{\max} = kA_1(\lambda\frac{c^2}{c_L^2} + \mu\frac{c^2}{c_T^2})$$

Elle atteint la valeur à rupture lorsque

$$kA_1 = \frac{\sigma_0}{\lambda\frac{c^2}{c_L^2} + \mu\frac{c^2}{c_T^2}}$$

La fissure se forme perpendiculairement à la direction principale correspondante, à savoir la direction 1. Les premières failles se forment donc perpendiculairement à la direction de propagation.

## 4 Ondes de Love

Lord Rayleigh a montré que les ondes de surfaces dans un massif solide semi-infini homogène, élastique et isotrope, sont polarisées dans le plan (1,3) défini précédemment. Les sismogrammes révèlent toutefois l’existence d’une composante transversale  $u_2$  lors de tremblements de terre



dans les conditions étudiées. A.E.H. Love élucida ces observations en 1911 en considérant que le milieu géologique n'est pas homogène et que les ondes de surfaces peuvent être canalisées dans une couche d'épaisseur  $H$  déposée sur un massif semi-infini, comme sur la figure 3 (Love, 1944). Le milieu (b) constituant le massif semi-infini et le milieu (a) constituant la couche supérieure sont des solides ayant des comportements élastiques linéarisés isotropes distincts. Le module de cisaillement et la célérité des ondes transversales de volume sont appelés  $\mu^a$  et  $c_T^a$  dans la couche et  $\mu^b$  et  $c_T^b$  dans le massif semi-infini. L'interface, supposée parfaite, entre la couche et le massif est le plan  $X_3 = 0$ . Les coordonnées négatives  $X_3 \leq 0$  désignent les points du massif, tandis que les points matériels de la couche sont tels que  $0 \leq X_3 \leq H$ . La surface  $X_3 = H$  est libre de tout effort.

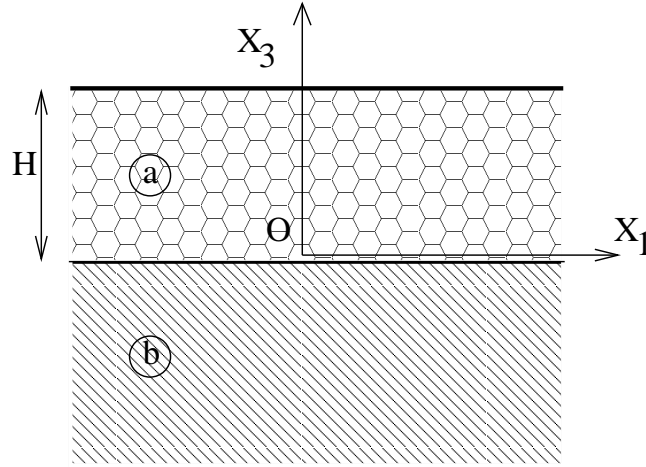


FIG. 3 – Massif semi-infini (b) supportant une couche (a) constituée d'un matériau différent ; repérage correspondant.

On explore la possibilité de la propagation dans la direction 1 d'une onde transversale dans les deux milieux, dont le déplacement associé est dans la direction 2 et de la forme :

$$u_1^a = 0, \quad u_2^a = f(X_3)e^{ik(X_1-ct)}, \quad u_3^a = 0 \quad (32)$$

$$u_1^b = 0, \quad u_2^b = Ae^{bX_3}e^{ik(X_1-ct)}, \quad u_3^b = 0 \quad (33)$$

dont on cherche les caractéristiques  $f(X_3)$ ,  $A$ ,  $b$  en fonction de  $k$  et  $c$ , ces deux grandeurs étant supposées identiques pour les deux milieux.

#### 4.1

Trouver l'équation différentielle régissant la fonction  $f(X_3)$ .

Trouver la relation liant  $b$ ,  $k$  et  $c$ .

Montrer qu'une onde évanescence dans le milieu (b), c'est-à-dire s'évanouissant lorsque  $X_3 \rightarrow -\infty$ , ne peut exister qu'à la condition que

$$c_T^a < c < c_T^b \quad (34)$$

ce qui impose en outre une restriction sur les propriétés relatives des deux milieux considérés, à savoir  $c_T^a < c_T^b$ .

Le champ proposé est à divergence nulle et doit donc satisfaire l'équation des ondes (5), ce qui conduit à l'équation différentielle suivante :

$$f'' = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2}\right) f \quad (35)$$

En ce qui concerne l'onde dans le milieu (b) on obtient

$$b^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2}\right)$$

L'onde dans le milieu (b) est évanescence si  $c \leq c_T^b$ .

L'onde dans le milieu (a) serait également évanescence si  $c \leq c_T^a$ . Or l'analyse des ondes de Rayleigh a montré que l'existence d'une composante de déplacement dans la direction 2 n'est pas compatible avec la condition de surface libre. Il faut donc s'intéresser à des ondes de célérité  $c_T^a \leq c$ . L'onde recherchée est donc harmonique dans le milieu (a) et évanescence dans le massif.

## 4.2 Conditions aux limites et d'interface

Formuler de manière exhaustive les conditions aux limites et d'interface du problème des ondes de Love.

## 4.3 Equation de dispersion

En déduire la relation liant  $k$  et  $c$ , dite relation de dispersion.

Contrairement au cas des ondes de Rayleigh dont la célérité ne dépend que de  $c_T$  et  $c_L$ , on constate que la célérité des ondes de Love dépend de  $k$ , ce qui traduit le caractère dispersif de ce type d'ondes. L'inhomogénéité du milieu est donc source de dispersion pour les ondes élastiques.

Voici la liste des conditions aux limites du problème :

- Condition de surface libre en  $X_3 = H$ . Le vecteur contrainte s'y annule :

$$\underline{t}^a(X_3 = H) = \underline{\sigma}^a(X_3 = H) \cdot \underline{e}_3 = 0$$

- La condition de continuité des déplacements à l'interface

$$\underline{u}^a(X_3 = 0) = \underline{u}^b(X_3 = 0)$$

traduit l'absence de fissure et de glissement relatif à l'interface.

- La transmission des efforts au travers de l'interface se traduit par la condition suivante portant sur le vecteur-contrainte :

$$\underline{t}^a(X_3 = 0) + \underline{t}^b(X_3 = 0) = (\underline{\sigma}^a(X_3 = 0) - \underline{\sigma}^b(X_3 = 0)) \cdot \underline{e}_3 = 0$$

- L'onde s'évanouit dans les profondeurs du massif :

$$\lim_{X_3 \rightarrow -\infty} \underline{u}^b(\underline{X}) = 0$$

Partant du champ

$$[\underline{\mathbf{u}}^a] = [0 \quad (E \cos(b_a X_3) + F \sin(b_a X_3))e^{ik(X_1-ct)} \quad 0]^T$$

on calcule le champ de déformation  $[\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^a] =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{ik}{2}(E \cos(b_a X_3) + F \sin(b_a X_3)) & 0 \\ \frac{ik}{2}(E \cos(b_a X_3) + F \sin(b_a X_3)) & 0 & \frac{k_a}{2}(-E \sin(b_a X_3) + F \cos(b_a X_3)) \\ 0 & \frac{k_a}{2}(-E \sin(b_a X_3) + F \cos(b_a X_3)) & 0 \end{bmatrix}$$

Les contraintes s'obtiennent en multipliant le tenseur des déformations par  $2\mu^a$ . La condition de surface libre en  $X_3 = 0$  exige que

$$\sigma_{31}(X_3 = H) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -E \sin(b_a H) + F \cos(b_a H) = 0 \quad (36)$$

La condition de continuité du déplacement à l'interface exige que

$$u_2^a(X_3 = 0) = u_2^b(X_3 = 0) \quad \Longrightarrow \quad E = A$$

Dans le massif (b), la déformation vaut

$$[\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^b] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ikA}{2} & 0 \\ \frac{ikA}{2} & 0 & \frac{bA}{2} \\ 0 & \frac{bA}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

La continuité de la composante de cisaillement  $\sigma_{31}$  à l'interface se traduit par

$$\sigma_{31}^a(X_3 = 0) = \sigma_{31}^b(X_3 = 0) \quad \Longrightarrow \quad k_a \mu_a F = \mu_b b A$$

En revenant à la condition (36), on voit que l'existence d'un résultat non trivial exige que

$$-\sin(k_a H) + \frac{\mu_b b}{\mu_a k_a} \cos(k_a H) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tan(b_a H) = \frac{\mu_b b}{\mu_a k_a}$$

où l'on rappelle que

$$b_a = k \sqrt{\frac{c^2}{c_T^2} - 1}, \quad b = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}}$$

C'est l'équation de dispersion recherchée donnant une valeur de la célérité  $c$  différente pour chaque valeur de  $k$ .

## 5 Application au manteau terrestre

### 5.1 Cas d'une roche du manteau terrestre

L'écorce terrestre est constituée d'une roche ayant peu ou prou les propriétés suivantes :

$$\rho = 3.3 \text{ g.cm}^{-3}, \quad \mu = 67 \text{ GPa}$$

Calculer numériquement les valeurs de  $c_T$  et  $c_L$ , en adoptant successivement les valeurs suivantes du coefficient de Poisson -1 ; 0 ; 0.25 ; 0.5.

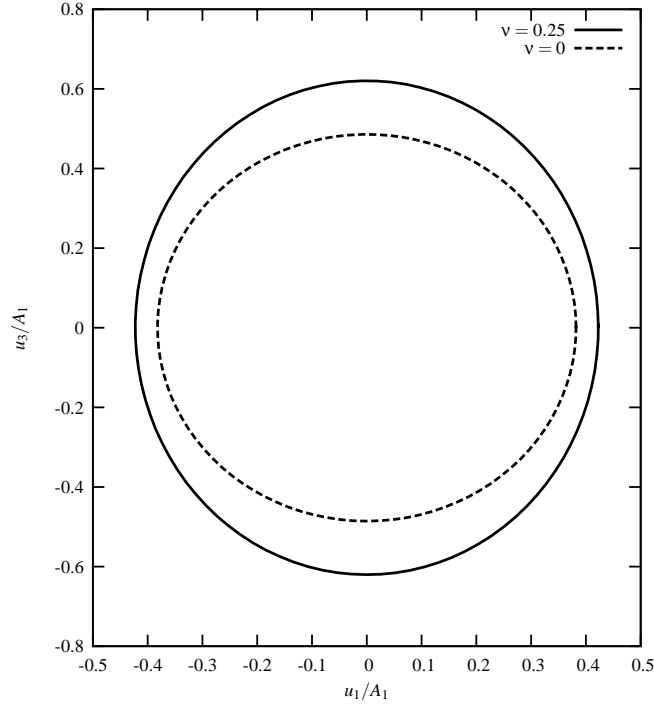


FIG. 4 – Trajectoire normalisée du point  $X_1 = X_3 = 0$  engendrée par une onde de Rayleigh, pour deux valeurs du coefficient de Poisson.

L'équation de Rayleigh a une solution évidente lorsque le coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$ . Donner la célérité correspondante.

Tracer les trajectoires normalisées des points à la surface de l'écorce terrestre pour cette valeur du coefficient de Poisson.

Le manteau supérieur, d'une épaisseur  $H = 35$  km, a en fait une densité et un module de cisaillement plus faibles que la roche précédente :

$$\rho^a = 2.7 \text{ g.cm}^{-3}, \quad \mu^a = 33 \text{ GPa}$$

Calculer la célérité des ondes de Love.

Pour l'écorce terrestre et la couche superficielle, on trouve :

$$c_T = 4.5 \text{ km.s}^{-1}, \quad c_L = 5.2 ; 6.4 ; 7.8 \text{ km.s}^{-1} ; +\infty$$

$$c_T^a = 3.5 \text{ km.s}^{-1}, \quad c_L^a = 4.0 ; 4.9 ; 6.0 \text{ km.s}^{-1} ; +\infty$$

Lorsque  $\nu = 1/4$ , on  $c_T/c_L = 1/\sqrt{3}$ . Une racine du polynôme (18) est  $\xi = 4$ . Les autres racines s'en déduisent :

$$\xi^3 - 8\xi^2 + \frac{56}{3}\xi - \frac{32}{3} = (\xi - 4)\left(\xi^2 - 4\xi + \frac{8}{3}\right) = (\xi - 4)\left(\xi - 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\xi - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

La seule de ces trois racines réelles distinctes qui soit plus petite que 1, fournit

$$c = \sqrt{2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}} c_T \simeq 0.92 c_T = 4.1 \text{ km.s}^{-1}$$

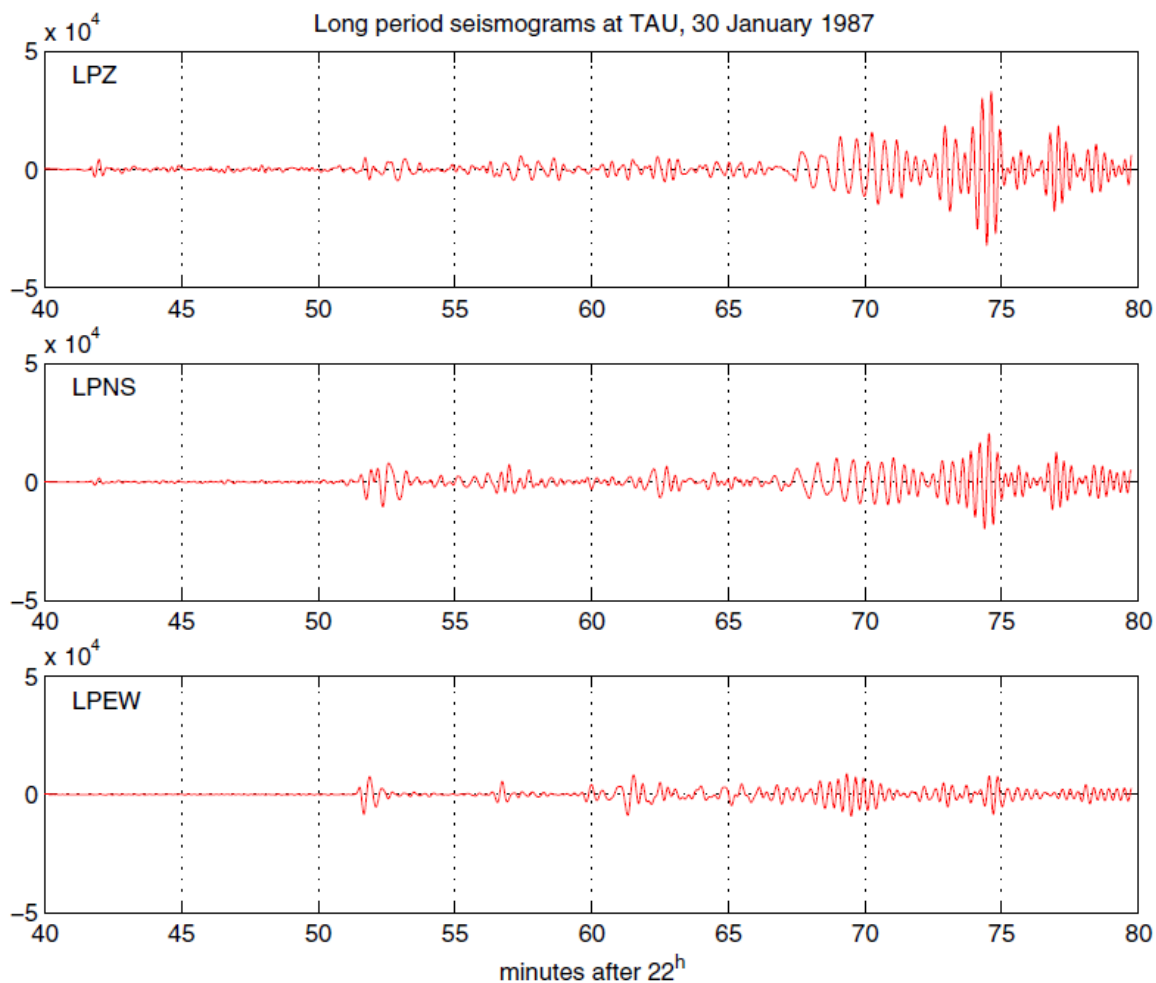


FIG. 5 – Trois sismogrammes enregistrés à la station de Tasmanie rendant compte d'un tremblement de terre ayant eu lieu en Antarctique, exactement au sud de la station.

Lorsque  $\nu = 0$ , il y a également une racine évidente :

$$\xi^3 - 8\xi^2 + 16\xi - 8 = (\xi - 2)(\xi - 3 - \sqrt{5})(\xi - 3 + \sqrt{5}), \quad c = \sqrt{3 - \sqrt{5}}c_T \simeq 0.87c_T$$

Les trajectoires du point  $X_1 = X_3 = 0$  sont tracées sur la figure 4 pour les deux valeurs précédentes du coefficient de Poisson.

## 5.2 Interprétation d'un sismogramme

La figure 5 montre trois sismogrammes enregistrés par une station australienne. Les sismographes LPZ, LPNS et LPEW enregistrent respectivement les mouvements verticaux, Nord-Sud et Est-Ouest.

Proposer un scénario plausible de la succession des événements observés, le premier événement apparaissant à 22h42.

Justifier en particulier la raison pour laquelle les événements après 23h07 sont particulièrement intenses.

Etant donné l'origine géographique du séisme, les sismogrammes LPZ et LPNS indiquent respectivement les déplacements  $u_3$  et  $u_1$ , tandis que LPEW renseigne sur  $u_2$ . Des ondes longitudinales  $u_3$  et transversales  $u_3$  sont observées dès 22h42. Le renforcement des trois déplacements vers 22h52 semble indiquer l'arrivée des ondes transversales  $c_T$ , le second type d'onde qui peut arriver après les ondes longitudinales se déplaçant à  $c_T$ . Les événements intenses de 23h07 sont probablement dues à l'arrivée des ondes de Rayleigh, les plus dévastatrices car l'énergie mécanique reste concentrée en surface et est bien moins dispersée ou dissipée que l'énergie des ondes volumiques. L'existence de la composante  $u_2$  de manière non négligeable suggère également l'existence d'ondes de Love.

## Références

- Germain P. (1986). *Mécanique, tomes I et II*. Ellipses, Paris.
- Landau L.D. and Lifschitz E.M. (1980). *Theory of Elasticity*. Pergamon, Oxford.
- Love A.E.H. (1927–1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover, New York.
- Rakotomanana Ravelonarivo L. (2009). *Eléments de dynamique des solides et des structures déformables*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.