

# Dislocations de Volterra

Des contraintes internes peuvent exister dans un corps homogène élastique sans chargement extérieur imposé. Il s'agit d'un champ d'*auto-contraintes*, dont la divergence est nulle en l'absence de forces volumiques, et qui est tel que le vecteur contrainte est nul sur les surfaces du corps. Les champs d'auto-contraintes étudiés dans ce problème sont dus à la présence d'une *dislocation*, défaut linéique dont on va préciser la formation.

Un cylindre creux de rayon intérieur  $r_i$ , de rayon extérieur  $r_e$ , d'axe  $\underline{e}_z$ , et de longueur  $L$ , subit les opérations suivantes de formation d'une dislocation, qui sont des cas particuliers de la procédure générale établie par Volterra<sup>1</sup> :

1. Le cylindre est coupé le long du plan  $\theta = 0$ , comme sur la figure 1(a).
2. Une lèvre de la coupure est déplacée d'un mouvement de translation de vecteur  $\underline{b}$ , constant et pris parallèle au plan de la coupure, par rapport à l'autre face de la coupure.
3. Les surfaces de coupure sont ensuite définitivement soudées, point par point, par un moyen ou par un autre.
4. Les efforts qui ont été nécessaires au déplacement relatif des lèvres sont finalement relâchés. Ils sont en fait repris, au moins partiellement, par des contraintes internes. Le corps est alors dans un état d'auto-contraintes et de déformations à déterminer.

L'axe du cylindre défectueux est appelé *ligne de dislocation*.

L'étude est menée dans le contexte des petites perturbations pour un milieu isotrope, dans son état initial naturel, au comportement élastique linéarisé. On utilise en général un système de coordonnées cylindriques comme sur la figure 1(a). La coordonnée  $X_3$  est aussi notée  $z$  dans la suite. Les fonctions de la variable angulaire  $\theta$  considérées dans ce problème, seront définies, sauf mention contraire, sur le domaine suivant :

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

## 1 Dislocation–vis

Le défaut introduit est appelé dislocation–vis lorsque le vecteur de translation  $\underline{b}$  est parallèle à l'axe du cylindre :

$$\underline{b} = b \underline{e}_z \quad (1)$$

On recherche les composantes de déplacements  $u_r$ ,  $u_\theta$  et  $u_z$  associés à ce défaut, par rapport à la configuration initiale du cylindre intact, sans coupure. Manifestement, la composante  $u_z$  présente une discontinuité en  $\theta = 0$ . Les composantes  $u_r$  et  $u_\theta$ , par contre, sont continues à la traversée de la coupure.

Dans un premier temps, jusqu'à la question 1.8, on ne se préoccupe pas de la dépendance en  $z$  de ces fonctions, ni des conditions aux extrémités du cylindre  $z = 0$ ,  $z = L$ . On recherche alors une solution en déplacements de la forme :

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_z(r, \theta) \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>L'article original de V. Volterra date de 1907 (Volterra, 1907).

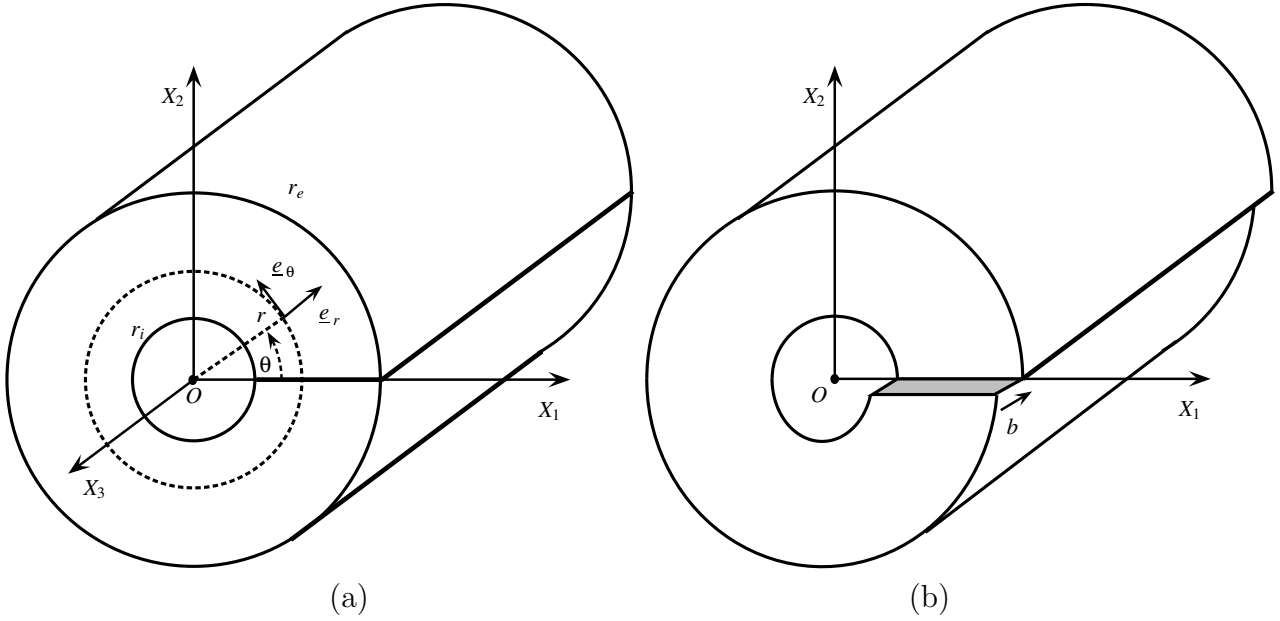


FIG. 1 – Procédure de fabrication d’une dislocation dans un cylindre creux : (a) coupure dans le cylindre initial, repérages utilisés dans le problème, (b) dislocation–vis.

La discontinuité du déplacement axial est due au déplacement relatif égal à  $\underline{b}$  imposé aux lèvres avant de les coller :

$$u_z(r, \theta = 0^+) - u_z(r, \theta = 2\pi^-) = b, \quad r_i \leq r \leq r_e \quad (3)$$

où les notations introduites désignent les limites suivantes :

$$u_z(r, 0^+) = \lim_{\theta \rightarrow 0, \theta > 0} u_z(r, \theta), \quad u_z(r, 2\pi^-) = \lim_{\theta \rightarrow 2\pi, \theta < 2\pi} u_z(r, \theta) \quad (4)$$

On se propose enfin de rechercher une solution  $u_z(\theta)$  qui ne dépendrait pas de  $r$ .

## 1.1 Champ de déplacements

Montrer que, dans ce cas, la dépendance de  $u_z$  par rapport à  $\theta$  est nécessairement affine et que l’expression suivante du déplacement peut être adoptée :

$$u_z(\theta) = -\frac{b\theta}{2\pi} \quad (5)$$

Noter que la fonction  $u_z(\theta)$  est à valeurs multiples puisqu’elle prend deux valeurs distinctes sur le plan de coupure. On obtient une fonction à valeurs simples en éliminant le plan de coupure du domaine de définition, désormais restreint à :

$$0 < \theta < 2\pi \quad (6)$$

Ce sera le domaine de définition des fonctions de  $\theta$  considérées dans la suite de ce problème, sauf mention contraire.

En coordonnées cylindriques, les seules composantes de déformation et de contraintes non nulles associées au déplacement proposé sont

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \quad \sigma_{\theta z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \quad (7)$$

La troisième équation d'équilibre des contraintes fournit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = 0 \implies \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0 \quad (8)$$

La fonction  $u_z(\theta)$  est donc affine :  $u_z(\theta) = A\theta + B$ . La constante  $A$  est déterminée grâce à la condition de discontinuité (3) :

$$u_z(\theta = 0^+) - u_z(\theta = 2\pi^-) = -2\pi A = b, \quad r_i \leq r \leq r_e$$

En prenant la translation  $B = 0$ , on aboutit à la proposition (5).

## 1.2 Vecteur de Burgers

On considère un cercle  $\Gamma_0$  d'équation  $r = r_0$  tracé sur la configuration initiale du cylindre (voir la partie gauche de la figure 2). On appelle *vecteur de Burgers* de la dislocation l'intégrale le long de  $\Gamma_0$  de l'élément de fibre matériel déformé  $d\mathbf{x}$  :

$$\oint_{\Gamma_0} d\mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad (9)$$

Calculer le vecteur de Burgers pour la dislocation-vis et montrer qu'il est indépendant du contour fermé choisi pour le calculer.

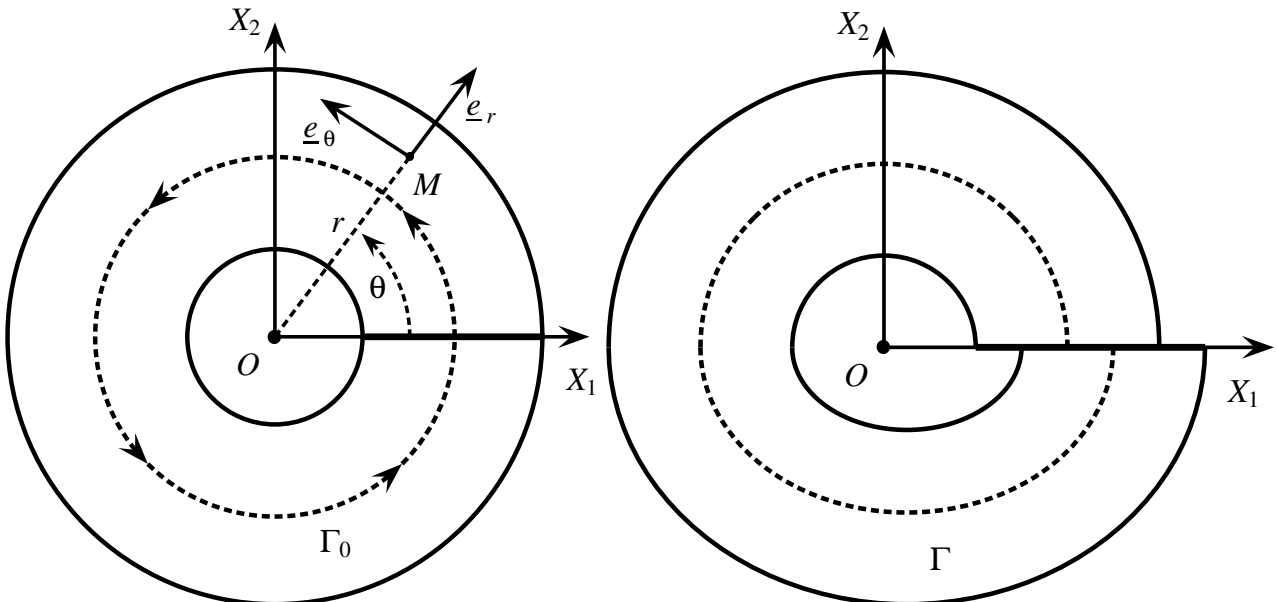


FIG. 2 – Section initiale et actuelle du cylindre déformé par une dislocation-coin.

On rappelle que  $\underline{x} = \underline{X} + \underline{u}$ . Le contour  $\Gamma_0$  est fermé de sorte que

$$\int_{\Gamma_0} \underline{dX} = 0 \quad (10)$$

Le vecteur de Burgers vaut donc

$$\int_{\Gamma_0} \underline{dx} = \int_{\Gamma_0} d\underline{u}(\underline{X}) = \underline{u}_z(2\pi^+) - \underline{u}_z(O^-) = -\underline{b} \quad (11)$$

Il ne dépend que de la discontinuité du champ de déplacements et peut se calculer avec n'importe quel contour fermé ne s'intersectant pas lui-même et irréductible à un point, tracé sur le cylindre initial. On entend par là tout contour ne pouvant être réduit à un point par déformation du circuit tout en restant contenue dans le cylindre creux, autrement dit tout contour entourant, une seule fois, le creux du cylindre étudié.

### 1.3 Champs de contraintes et de déformations

Calculer les déformations et les contraintes associées au champ de déplacements précédents. Remarquer qu'elles sont continues pour toutes les valeurs de  $\theta$ .

Préciser les conditions imposées par le contexte infinitésimal.

Les composantes non nulles de déformations et de contraintes pour la dislocation-vis sont :

$$\varepsilon_{\theta z} = -\frac{b}{4\pi r}, \quad \sigma_{\theta z} = -\frac{\mu b}{2\pi r} \quad (12)$$

Elles sont indépendantes de  $\theta$  et continues sur tout le cylindre.

Le contexte infinitésimal est respecté tant que

$$\frac{|b|}{r_i} \ll 1 \quad (13)$$

### 1.4 Equilibre et conditions aux limites en contraintes

Confirmer que les équations d'équilibre local sont vérifiées par les contraintes précédentes. Les conditions aux limites sur les bords intérieur  $r = r_i$  et extérieur  $r = r_e$  du cylindre le sont-elles également ?

### 1.5 Energie élastique d'une dislocation-vis

Calculer l'énergie élastique stockée dans le cylindre, par unité de longueur de ligne de dislocation.

La densité d'énergie libre de déformation vaut :

$$\begin{aligned} \rho\psi(\underline{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{\theta z} \varepsilon_{\theta z} + \sigma_{z\theta} \varepsilon_{z\theta}) = \sigma_{\theta z} \varepsilon_{\theta z} \\ &= \frac{\mu b^2}{8\pi^2 r^2} \end{aligned} \quad (14)$$

L'énergie par unité de longueur du cylindre s'obtient en intégrant sur une section du cylindre :

$$W = \int_{r=r_i}^{r=r_e} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho\psi r dr d\theta = \frac{\mu b^2}{4\pi} \log \frac{r_e}{r_i} \quad (15)$$

## 1.6 Cas où $r_i \rightarrow 0$

Que deviennent les contraintes et l'énergie stockée lorsque  $r_i \rightarrow 0$ ? Comment interprétez-vous ce résultat?

Nommer une situation physique pour laquelle un phénomène similaire se produit pour les contraintes, mais où le résultat pour l'énergie est fondamentalement différent?

Pour  $r_i = 0$ , la contrainte  $\sigma_{\theta z}$  présente un singularité en  $1/r$  en  $r = 0$ . L'énergie stockée quant à elle devient infinie, ce qui n'est pas acceptable du point de vue physique. Cela vient du fait qu'il n'est pas possible d'effectuer le mouvement relatif de  $b$  constant en  $r = 0$ . Pour créer une dislocation dans un cylindre massif, il faut accepter de faire varier rapidement la translation relative de  $b$  à 0 lorsqu'on s'approche du centre, comme sur la figure 3.

Une singularité de contrainte se rencontre également à la pointe d'une fissure, comme on la vu au paragraphe 15.8.1, mais elle est en  $1/\sqrt{r}$  de sorte que l'énergie contenue dans un volume incluant la fissure reste finie.

## 1.7 Influence du choix du plan de coupure

Montrer que les champs de déformations et de contraintes dues à la dislocation-vis ne dépendent pas du choix du plan de coupure  $\theta = \theta_0$ . Justifier cette remarque.

Il est remarquable de trouver un état d'énergie de déformation non nulle dans un corps homogène en l'absence de tout chargement extérieur. Si la coupure et les opérations 2 à 4 de la procédure de Volterra sont réalisées sur tout le plan  $X_2 = 0$ , i.e.  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , quels champs de déplacements, de déformations et de contraintes obtient-on?

Comment se distinguent fondamentalement ces deux situations?

Si la coupure est réalisée en  $\theta = \theta_0 \neq 0$ , la solution (5) est encore acceptable à condition d'être définie sur le domaine  $]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ . Les déformations et contraintes sont alors inchangées. La nouvelle situation s'obtient en fait à partir du cas précédent en tournant le cylindre de  $\theta_0$  par rapport à l'axe  $z$ .

Les champs de déformations et de contraintes nulles sont également solutions du problème d'efforts imposés nuls sur les bords intérieur et extérieur du cylindre. C'est la solution que l'on obtient lorsque la coupure est réalisée sur les deux faces  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  et que la partie supérieure du cylindre est déplacée d'un mouvement d'ensemble de  $\underline{b}$  par rapport à la partie inférieure. Les deux situations considérées se distinguent par le fait que la coupure le long de  $\theta = 0$  change la connexité du cylindre. Le cylindre creux n'est pas simplement connexe. Il le devient si la coupure est opérée. Effectuer deux coupures laisse la connexité du cylindre creux inchangée.

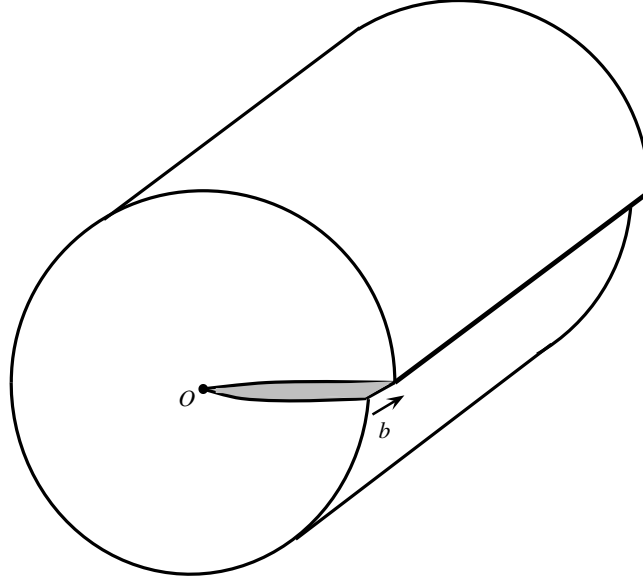


FIG. 3 – Dislocation–vis créée dans un cylindre massif.

## 1.8 Torseur résultant

En considérant cette fois-ci le torseur des efforts résultant sur l’une des extrémités du cylindre ( $z = 0$  ou  $z = L$ ), montrer que la solution proposée précédemment n’est finalement pas acceptable, même au sens de Saint–Venant.

Le vecteur contrainte en chaque point de l’extrémité de normale  $\underline{e}_z$  vaut

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_z = -\frac{\mu b}{2\pi r} \underline{e}_\theta \quad (16)$$

Il s’agit d’un effort tangentiel qu’il faut appliquer en chaque point de l’extrémité pour la maintenir en équilibre. Toutefois, cette densité surfacique d’efforts ne produit pas de résultante :

$$\underline{R} = -\int_{Z=L} \frac{\mu b}{2\pi r} \underline{e}_\theta dS = 0$$

Le moment résultant, quant à lui, vaut :

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \int_{Z=L} \underline{OM} \wedge \underline{t} dS = -\int_{Z=L} r \underline{e}_r \wedge \frac{\mu b}{2\pi r} \underline{e}_\theta r dr d\theta \\ &= -\mu b \frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \underline{e}_z \end{aligned} \quad (17)$$

L’existence d’un moment résultant non nul sur l’extrémité considérée n’est pas compatible avec la condition de surface libre recherchée pour cette extrémité. Le champ de contraintes trouvé n’est donc pas acceptable, même au sens de Saint–Venant. L’objet du paragraphe suivant est de remédier à cette insuffisance.

## 1.9 Solution exacte au sens de Saint–Venant

Remédier à la difficulté rencontrée précédemment et obtenir une solution exacte, au sens de Saint–Venant, du problème de la dislocation–vis dans le cylindre de longueur  $L$ . Donner les

champs de contraintes, de déformations et de déplacements correspondants.

Commenter alors l'image de la figure 4, tirée de l'ouvrage (Friedel, 1964).

Il suffit de superposer à la solution partielle trouvée pour le cylindre le champ de contrainte induit par l'application du moment d'axe  $\underline{e}_z$  opposé au moment résultant  $\underline{M}$  calculé précédemment :

$$-\underline{M} = \mu b \frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \underline{e}_z \quad (18)$$

Un tel moment induit le champ de contraintes suivant dans le cylindre fini :

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\mu b}{\pi(r_e^2 + r_i^2)} r \quad (19)$$

d'après la théorie de la torsion des barres à section circulaire (cf. paragraphe 13.2.4). Cette contribution vient s'ajouter à la contrainte (12) déjà trouvée. On est en droit d'appliquer ici le théorème de superposition, établi au paragraphe 8.1.4, puisque le problème auxiliaire de torsion considéré s'applique sur la même géométrie et avec des conditions en effort sur les bases du cylindre. Les contraintes dues à la torsion s'appliquant aux extrémités ne suffisent pas à annuler point par point le vecteur contrainte (16) issu de la contribution initiale, de sorte que la solution complète résultant de la superposition n'est satisfaisante qu'au sens de Saint-Venant.

La figure 4 montre le cisaillement du plan de coupure induit par cette torsion supplémentaire.

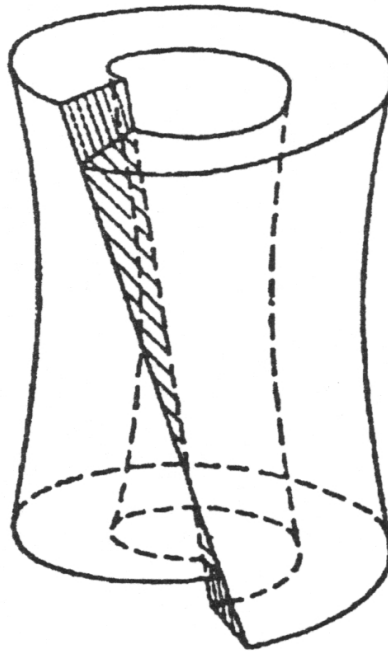


FIG. 4 – Dislocation–vis dans un cylindre de longueur finie, d'après (Friedel, 1964).

## 2 Dislocation–coin

Le défaut introduit dans le cylindre selon la procédure de Volterra est appelé *dislocation–coin* lorsque le vecteur de translation est orthogonal à la ligne de dislocation :

$$\underline{b} = b \underline{e}_1 \quad (20)$$

selon le repérage de la figure 1(a). La dislocation–coin est représentée sur la figure 5. Une section du cylindre défectueux correspondant est également donnée sur la figure 2. Le cylindre est considéré comme infini.

Le champ de contraintes internes induit par une dislocation–coin est techniquement plus délicat à obtenir que celui de la dislocation–vis. La méthode des fonctions de contraintes permet d’aboutir et le lecteur peut se reporter aux références (Timoshenko and Goodier, 1970; Hirth and Lothe, 1982; Teodosiu, 1982). On se contente ici de donner le résultat sans expliciter les étapes qui président à sa construction :

$$\sigma_{rr} = \alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{r_i^2 + r_e^2} - \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 + r_e^2} \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \quad (21)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{3r}{r_i^2 + r_e^2} + \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 + r_e^2} \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \quad (22)$$

$$\sigma_{r\theta} = \alpha \left( -\frac{1}{r} + \frac{r}{r_i^2 + r_e^2} + \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 + r_e^2} \frac{1}{r^3} \right) \cos \theta \quad (23)$$

$$(24)$$

où  $\alpha$  est une constante à déterminer dans la suite.

Faire un commentaire sur ce champ de contraintes.

Le champ de contrainte présente une singularité lorsque  $r_i \rightarrow 0$ . Cette singularité est en  $1/r$  comme dans le cas de la dislocation–vis.

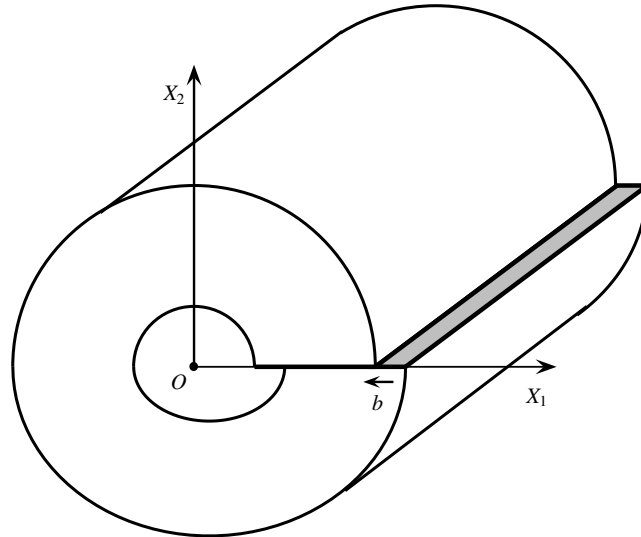


FIG. 5 – Dislocation–coin.



## 2.1 Equilibre local et conditions aux limites

On admet que le champ de contraintes précédent satisfait les équations d'équilibre local. Vérifier, par contre, que les conditions aux limites sont effectivement remplies.

Les termes en  $\sin \theta/r$ ,  $r \sin \theta$  et  $\sin \theta/r^3$  permettent de vérifier séparément que  $\operatorname{div} \underline{\sigma} = 0$  en coordonnées cylindriques. On vérifie en outre que  $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r = 0$  en  $r = r_i$  et  $r = r_e$ .

## 2.2 Contraintes réduites

Donner une expression réduite des contraintes précédentes lorsque, simultanément,  $r_e \rightarrow +\infty$  et  $r \gg r_i$ .

Dans ces conditions, les contraintes (21) à (23) se réduisent à

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha \sin \theta}{r}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\alpha \cos \theta}{r} \quad (25)$$

## 2.3 Contexte des déformations planes

Calculer la composante de contrainte  $\sigma_{zz}$  associée au champ réduit précédent, dans le contexte des déformations planes selon l'axe  $\underline{e}_z$ . Ce contexte suppose que

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0$$

Dans ces conditions, la déformation axiale vaut

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) = 0 \quad (26)$$

d'où le résultat connu en déformations planes :

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$$

i.e.

$$\sigma_{zz} = 2\nu \sigma_{rr}$$

dans le cas présent.

## 2.4 Moment résultant

On considère un contour carré, de côté  $2X_0$ , autour de la ligne de dislocation, comme sur la figure 6, avec  $X_0 \gg r_i$  et  $r_e \rightarrow +\infty$ . Montrer que les contraintes internes dues à la dislocation engendrent un moment résultant, par unité d'épaisseur de cylindre, sur la face d'équation  $X_1 = X_0, |X_2| \leq X_0$ .

La normale à la face considérée a pour composantes :

$$\underline{n} = \cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta$$

Le vecteur contrainte en chaque point de cette face vaut

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \frac{\alpha \sin 2\theta}{r} \underline{e}_r - \frac{\alpha}{r} \underline{e}_\theta \quad (27)$$

Le moment résultant sur la face d'équation  $X_1 = X_0$ ,  $|X_2| \leq X_0$  vaut :

$$\underline{M} = \int_{X_0} \underline{OM} \wedge \underline{t} dX_2 = \left( \int_{X_0} r t_\theta dX_2 \right) \underline{e}_z = - \left( \int_{X_0} \alpha dX_2 \right) \underline{e}_z = -2\alpha X_0 \underline{e}_z \quad (28)$$

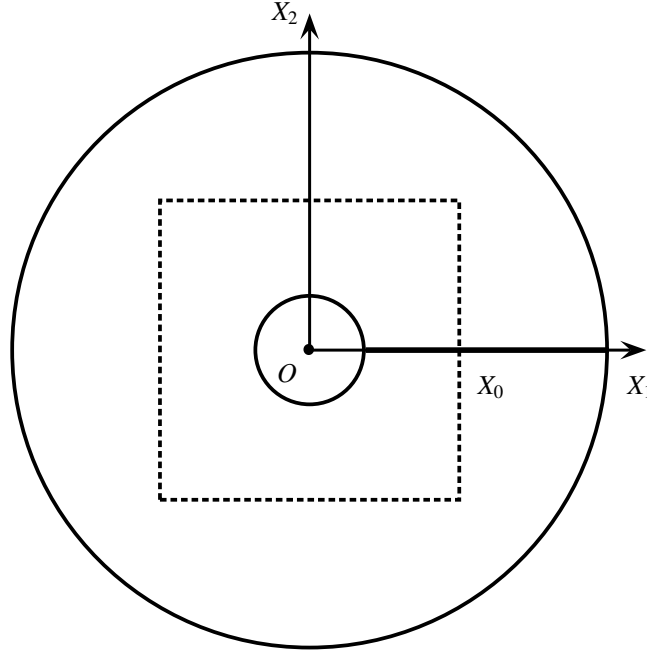


FIG. 6 – Contour carré autour de l'axe du cylindre.

## 2.5 Déformations et déplacements

Calculer les déformations associées au champ de contraintes dans sa forme réduite trouvée en 2.2.

Intégrer pas à pas ce champ pour en déduire un champ de déplacement correspondant.

Identifier au passage la constante  $\alpha$  en fonction de la donnée du problème, à savoir  $b$ .

Déterminer alors les zones de dilatation et de contraction de la matière autour de la dislocation.

Quelques commentaires sur le champ de déplacements obtenu s'imposent. Indiquer une différence fondamentale entre les déplacements associés à la dislocation–coin et ceux trouvés pour la dislocation–vis.

Remarquer enfin que la soudure ne reste pas plane.

L'élasticité isotrope linéarisée fournit :

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \frac{\alpha \sin \theta}{r} \quad (29)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{1 + \nu}{E} \frac{\alpha \cos \theta}{r} \quad (30)$$

La composante  $\varepsilon_{rr} = \partial u_r / \partial r$  peut être intégrée pour donner

$$u_r = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \alpha \sin \theta \log r + f(\theta) \quad (31)$$

où  $f(\theta)$  est une fonction d'intégration à déterminer. La relation de compatibilité

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = r\varepsilon_{\theta\theta} - u_r = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} (1 - \log r) \alpha \sin \theta - f(\theta) \quad (32)$$

permet d'obtenir la composante de déplacement tangentiel :

$$u_\theta = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} (1 - \log r) \alpha \cos \theta - \int f(\theta) d\theta + g(r) \quad (33)$$

où apparaît une nouvelle fonction d'intégration  $g(r)$ . La composante de cisaillement se calcule alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\ &= 2 \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \frac{\alpha \cos \theta}{r} + \frac{f_{,\theta}(\theta)}{r} + g_{,r}(r) + \frac{1}{r} \left( \int f(\theta) d\theta - g(r) \right) \end{aligned} \quad (34)$$

Les notations  $f_{,\theta}$  et  $g_{,r}$  désignent les dérivées premières des fonctions  $f$  et  $g$ . Cette dernière expression doit être identifiée avec le résultat (30) ce qui fournit l'équation

$$-\frac{4(1 - \nu^2)}{E} \frac{\alpha \cos \theta}{r} = \frac{f_{,\theta}(\theta) + \int f(\theta) d\theta}{r} + g_{,r}(r) - \frac{g(r)}{r} \quad (35)$$

La dérivation de l'équation précédente par rapport à  $r$ , d'une part, et par rapport à  $\theta$  d'autre part conduit aux deux équations différentielles indépendantes :

$$g_{,rr}(r) = 0 \quad (36)$$

$$f_{,\theta\theta} + f = \frac{4(1 - \nu^2)}{E} \alpha \sin \theta \quad (37)$$

L'équation (36) fournit :

$$g(r) = Ar + D_1 \quad (38)$$

où  $A$  et  $D_1$  sont des constantes d'intégration.

L'équation (37), quant à elle, possède une solution particulière de la forme  $\theta \cos \theta$ . Elle s'intègre finalement en

$$f(\theta) = -\frac{2(1 - \nu^2)}{E} \alpha \theta \cos \theta + B \cos \theta + C \sin \theta \quad (39)$$

où  $B$  et  $C$  sont des constantes d'intégration. Il est utile de calculer aussi une primitive de  $f$ , car elle intervient dans l'expression du déplacement tangentiel :

$$\int f(\theta) d\theta = -\frac{2(1 - \nu^2)}{E} \alpha (\theta \sin \theta + \cos \theta) + B \sin \theta - C \cos \theta + D_2 \quad (40)$$

L'équation (34) est vérifiée à condition que  $D_1 = D_2 = 0$ .

Remarquer que les termes en  $B \cos \theta$  et  $C \sin \theta$  dans l'expression du déplacement radial à travers

la fonction  $f$  sont des mouvements de translation exprimés en coordonnées cylindriques, comme on s'en convaincra aisément. La fonction  $g(r) = Ar$ , quant à elle, correspond à une rotation d'ensemble d'axe  $\underline{e}_z$  et d'angle  $A$ .

C'est la condition de discontinuité sur le plan  $\theta = 0$ , visible sur la figure 5, qui donne finalement accès à la constante  $\alpha$  recherchée :

$$u_r(0^+) - u_r(2\pi^-) = b = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \alpha 2\pi \quad (41)$$

d'où

$$\alpha = \frac{Eb}{4\pi(1+\nu)(1-\nu)} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \quad (42)$$

La dilatation ou la contraction de la matière sont données par le signe de la trace de la déformation qui, en vertu des lois de l'élasticité isotrope linéarisée est proportionnelle à, et du même signe que, la trace du tenseur des contraintes. La trace du tenseur des contraintes est égale à  $2(1+\nu)\sigma_{rr}$ . Lorsque  $b > 0$ , la matière se dilate donc au-dessus du plan de coupure ( $\theta > 0$ ) et se contracte en-dessous ( $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ).

En bref, on obtient les déplacements suivants

$$u_r = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} ((1-2\nu) \sin \theta \log r - 2(1-\nu)\theta \cos \theta) \quad (43)$$

$$u_\theta = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} (-(1-2\nu)(1-\log r) \cos \theta + 2(1-\nu)(\theta \sin \theta + \cos \theta)) \quad (44)$$

auxquels s'ajoute un éventuel mouvement de corps rigide.

Le champ de déplacement présente une divergence en  $\log r$  lorsque  $r_i \rightarrow 0$ , ce qui n'était pas le cas pour la dislocation-vis.

Le plan de coupure  $\theta = 0$  subit un déplacement  $u_\theta$  non constant et non linéaire en  $r$ . Par conséquent, il ne reste pas plan.

Parce que ces expressions sont parfois invoquées dans la pratique, on donne aussi les composantes cartésiennes des déplacements qui se déduisent des résultats obtenus en coordonnées cylindriques :

$$u_1 = -\frac{b}{2\pi} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{4(1-\nu)} \right) = \frac{b}{2\pi} \left( \text{atan} \frac{X_2}{X_1} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{X_1 X_2}{X_1^2 + X_2^2} \right) \quad (45)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{b}{8\pi(1-\nu)} (2(1-2\nu) \log r + \cos 2\theta) \\ &= -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \left( (1-2\nu) \log(X_1^2 + X_2^2) + \frac{X_1^2 - X_2^2}{X_1^2 + X_2^2} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

Pour information, les contraintes cartésiennes associées sont :

$$\sigma_{11} = -\frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{X_2(3X_1^2 + X_2^2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \quad (47)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{X_2(X_1^2 - X_2^2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \quad (48)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{X_1(X_1^2 - X_2^2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \quad (49)$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \frac{X_2}{X_1^2 + X_2^2} \quad (50)$$

## 2.6 Énergie d'une dislocation–coin

Calculer l'énergie élastique stockée dans le cylindre, par unité de longueur de ligne de dislocation.

La densité d'énergie élastique stockée, calculée avec les contraintes et déformations réduites, vaut

$$\rho\psi = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} = \frac{\alpha^2(1+\nu)}{Er^2} (1 - 2\nu \sin^2 \theta) \quad (51)$$

L'énergie élastique totale par unité d'épaisseur du cylindre, calculée sur la portion du cylindre  $r_i \ll r_0 < R \ll r_e$  est donc :

$$W = \int_{r=r_0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho\psi r dr d\theta = \frac{\mu b^2}{4\pi(1-\nu)} \log \frac{R}{r_0} \quad (52)$$

L'énergie croît de manière illimitée lorsque  $R$  augmente et lorsque  $r_0$  diminue. Cette expression est la même que pour la dislocation–vis au facteur  $(1-\nu)$  près.

## 2.7 Dislocation–coin équivalente

On soumet le cylindre parfait initial au champ de déplacements suivant :

$$u_r = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} ((1-2\nu) \sin \theta \log r - 2(1-\nu)\theta \cos \theta) \quad (53)$$

$$u_\theta = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} (-(1-2\nu)(1 - \log r) \cos \theta + 2(1-\nu)(\theta \sin \theta + \cos \theta)) \quad (54)$$

définis sur l'intervalle :

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad (55)$$

Montrer que ce champ est à valeurs multiples si on le prolonge par continuité en  $\theta = -\pi/2$  et  $\theta = 3\pi/2$ .

Montrer que le champ de déformations associé à ces déplacements est strictement le même que celui trouvé pour la dislocation–coin au paragraphe 2.5. En déduire que le champ de contraintes correspondant est auto-équilibré.

Proposer une procédure pour que s'établisse précisément le champ de déplacements décrit par les fonctions (53) à (55), dans le cylindre, au prix d'une coupure bien choisie. Faire le dessin correspondant.

Justifier alors que ce champ mérite tout autant le nom de dislocation–coin que celui étudié au paragraphe 2.5.

Calculer le vecteur de Burgers correspondant (voir figure 2).

On a donc mis en évidence deux champs de déplacements, à savoir celui trouvé en 2.5 et celui donné par les équations (53) à (55), conduisant aux mêmes champs de déformations. Montrer que la différence entre ces deux champs ne se limite pas à un mouvement de corps rigide. Ce résultat vous étonne-t-il ?

A quelle caractéristique topologique fondamentale du cylindre creux pourrait-on l'attribuer ?

On calcule les limites suivantes :

$$u_r(-\frac{\pi^-}{2}) - u_r(\frac{3\pi^+}{2}) = 0, \quad u_\theta(-\frac{\pi^-}{2}) - u_\theta(\frac{3\pi^+}{2}) = b \quad (56)$$

La fonction  $u_\theta$  est discontinue au travers du plan  $\theta = -\pi/2$ . Elle se prolonge donc en une fonction à valeurs multiples de part et d'autre du domaine de définition (55). La seule différence entre le champ proposé et celui trouvé pour la dislocation-coin, à savoir les équations (43) et (44), réside dans le domaine de définition des fonctions par rapport à l'angle  $\theta$ . On vérifie que ces déplacements conduisent aux mêmes déformations qui sont, quant à elles, continues, on l'a vu.

Pour obtenir un tel champ de déplacement, il suffit d'effectuer la coupure le long du plan  $\theta = -\pi/2$  et de translater l'une des faces de la coupure du vecteur  $\underline{b} = b\underline{e}_\theta$ , orthogonal au plan de coupure, comme indiqué sur la figure 2. Ce déplacement relatif crée un vide que l'on comble en rajoutant la plaque de matière d'épaisseur  $b$ , que l'on colle aux faces de la coupure afin de restaurer la cohésion du cylindre. Si  $b < 0$ , il faut enlever de la matière, puis coller, afin de réaliser la dislocation. La procédure est illustrée sur la figure 7.

Remarquer que le vecteur de translation est le même que (20), ce qui incite à décrire qu'il s'agit là de la même dislocation-coin. La dislocation-coin est caractérisée par son vecteur de Burgers  $\underline{b}$ , perpendiculaire à la ligne de dislocation, elle est indépendante du plan de coupure.

Notons  $\underline{u}^{(1)}$  et  $\underline{u}^{(2)}$  les deux champs de déplacements fournissant le champ de déformations de la dislocation-coin. Ils coïncident pour  $0 < \theta < 3\pi/2$ . Ils diffèrent pour  $3\pi/2 < \theta < 2\pi$ , domaine sur lequel :

$$\begin{aligned} u_r^{(2)} &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} ((1-2\nu)\sin\theta \log r - 2(1-\nu)(\theta - 2\pi)\cos\theta) \\ u_\theta^{(2)} &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} (-(1-2\nu)(1 - \log r)\cos\theta + 2(1-\nu)((\theta - 2\pi)\sin\theta + \cos\theta)) \end{aligned}$$

de sorte que

$$u_r^{(2)} - u_r^{(1)} = b \cos \theta, \quad u_\theta^{(2)} - u_\theta^{(1)} = -b \sin \theta$$

sur ce quartier du cylindre.

Le même champ de déformation sur le cylindre peut donc s'intégrer en deux champs de déplacements qui diffèrent par plus qu'un simple mouvement de corps rigide infinitésimal. Autrement dit, le champ de déplacement  $\underline{u}^{(2)} - \underline{u}^{(1)}$  engendre un champ de déformation nulle et n'est pas un mouvement de corps rigide infinitésimal.

Ce résultat peut surprendre puisqu'on a établi, lors de l'étude du problème de la compatibilité des déformations (voir le théorème 4 de la page 50), que la déformation s'annule seulement pour les mouvements de corps rigide infinitésimaux. La démonstration de ce résultat fait toutefois appel à plusieurs reprises au théorème 23 de Poincaré, qui n'est valable que sur un corps simplement connexe. Un ensemble de points est dit simplement connexe si toute courbe fermée

continue dans l'ensemble peut être déformée en un point tout en restant dans l'ensemble. Ce n'est pas le cas des cercles concentriques d'un cylindre creux entourant le trou central. Le cylindre creux n'est donc pas simplement connexe. Un ensemble non simplement connexe peut être rendu simplement connexe en effectuant autant de coupures que nécessaire. Une seule suffit pour le cylindre creux. Le théorème de Poincaré peut être appliqué dans le cylindre coupé mais les champs ainsi déterminés peuvent présenter des discontinuités au passage de la coupure. C'est pourquoi on a pu trouver un champ de déplacement à valeur simple pour chaque coupure considérée dans ce problème.

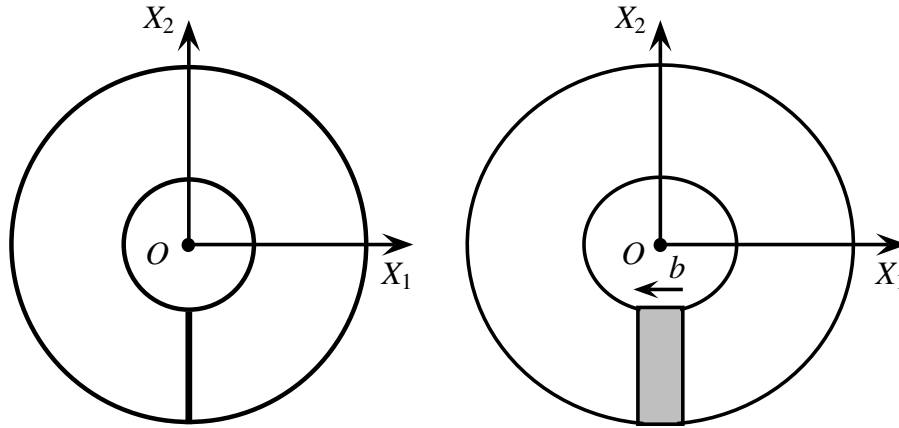


FIG. 7 – Construction alternative d'une dislocation-coin dans un cylindre creux. La partie grisée correspond à de la matière rajoutée (ou enlevée) pour combler l'espace libéré par le déplacement relatif des lèvres de la coupure.

### 3 Dislocations mixtes

Une dislocation dans un cylindre est de caractère mixte lorsque son vecteur de Burgers possède une composante vis, parallèle à la ligne de dislocation, et une composante coin, perpendiculaire à la ligne :

$$\underline{b} = b_{\perp} \underline{e}_1 + b_{\circ} \underline{e}_z \quad (57)$$

Donner, en le justifiant, le champ de contraintes et l'énergie d'une telle dislocation.

### 4 Compatibilité générale

Ce problème incite à reformuler de manière générale le problème de la compatibilité d'un champ de déformation dans les corps multiplement connexes. On distinguera en particulier la recherche de solutions continues ou non en déplacement. Ce sujet doit faire l'objet d'un paragraphe spécifique dans le document de cours.

### Références

Friedel, J. (1964). *Dislocations*. Pergamon.

- Hirth, J. and Lothe, J. (1982). *Theory of Dislocations*. Wiley Intersciences.
- Teodosiu, C. (1982). *Elastic models of crystal defects*. Springer Verlag, Berlin.
- Timoshenko, S. and Goodier, J. (1970). *Theory of elasticity*. McGraw–Hill International Editions.
- Volterra, V. (1907). Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Annal. Sci. de l'Ecole Norm. Supér.*, 24 :401–517.

\* \* \*