

Théorèmes de l'énergie et encadrement de la solution d'un problème d'élasticité

Samuel Forest

Centre des Matériaux/UMR 7633
Mines ParisTech /CNRS
BP 87, 91003 Evry, France
Samuel.Forest@ensmp.fr



Outline

- ① Potentiel d'élasticité
- ② Théorème des travaux virtuels
- ③ Théorème de l'énergie potentielle
- ④ Théorème de l'énergie complémentaire
- ⑤ Encadrement de la solution
- ⑥ Cas de l'élasticité linéarisée
- ⑦ Consignes pour l'examen

Plan

- ① **Potentiel d'élasticité**
- ② Théorème des travaux virtuels
- ③ Théorème de l'énergie potentielle
- ④ Théorème de l'énergie complémentaire
- ⑤ Encadrement de la solution
- ⑥ Cas de l'élasticité linéarisée
- ⑦ Consignes pour l'examen

Potentiel d'élasticité

- Contexte infinitésimal
tenseur des déformations infinitésimales : $\underline{\underline{\varepsilon}}$
- Elasticité non linéaire

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = W'(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$W(\underline{\underline{\varepsilon}})$ potentiel d'élasticité

- Elasticité linéarisée (état naturel)

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ tenseur des modules d'élasticité

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

loi de Hooke

Potentiel dual

- Elasticité non linéaire

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{\partial W^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = W^{*'}(\underline{\underline{\sigma}})$$

$W^*(\underline{\underline{\sigma}})$ potentiel dual

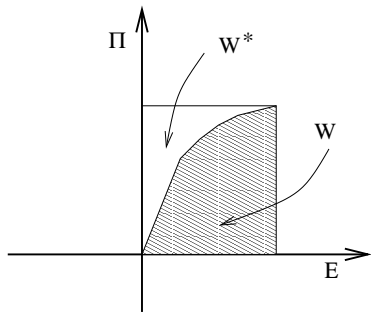
- Elasticité linéarisée (état naturel)

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\sigma}}$$

$\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ tenseur des souplesses

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\sigma}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1}$$

Potentiel d'élasticité et potentiel dual



$$\begin{aligned}W(\underline{\varepsilon}) &= \int_0^{\underline{\varepsilon}} W'(\underline{\varepsilon}) : d\underline{\varepsilon} \\ &= \int_0^{\underline{\varepsilon}} \underline{\sigma} : d\underline{\varepsilon}\end{aligned}$$

aire sous la courbe

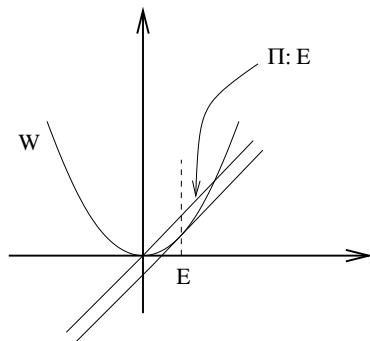
$$\begin{aligned}W^*(\underline{\varepsilon}) &= \int_0^{\underline{\sigma}} W^{*\prime}(\underline{\sigma}) : d\underline{\sigma} \\ &= \int_0^{\underline{\sigma}} \underline{\varepsilon} : d\underline{\sigma}\end{aligned}$$

aire complémentaire

$$W(\underline{\varepsilon}) + W^*(\underline{\sigma}) = \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}$$

$$W^*(\underline{\sigma}) = \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} - W(\underline{\varepsilon}), \quad \text{avec } \underline{\sigma} = W'(\underline{\varepsilon})$$

Convexité du potentiel d'élasticité



La fonction, pour $\tilde{\sigma}$ donné,

$$f(\hat{\varepsilon}) = \tilde{\sigma} : \hat{\varepsilon} - W(\hat{\varepsilon})$$

présente un maximum lorsque W est convexe.

Le maximum est obtenu pour $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$ tel que

$$W'(\varepsilon) = \tilde{\sigma}$$

Par conséquent,

$$W^*(\tilde{\sigma}) = \max_{\varepsilon} (\tilde{\sigma} : \varepsilon - W(\varepsilon))$$

Plan

- ① Potentiel d'élasticité
- ② Théorème des travaux virtuels**
- ③ Théorème de l'énergie potentielle
- ④ Théorème de l'énergie complémentaire
- ⑤ Encadrement de la solution
- ⑥ Cas de l'élasticité linéarisée
- ⑦ Consignes pour l'examen

Théorème des travaux virtuels

Soit $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ un champ de contraintes auto-équilibré

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{f}} = 0, \quad \sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$$

On calcule le produit scalaire du vecteur précédent par un champ test $\underline{\underline{u}}^*$ (à dérivées premières bornées) :

Théorème des travaux virtuels

Soit $\underline{\sigma}(\underline{x})$ un champ de contraintes auto-équilibré

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0, \quad \sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$$

On calcule le produit scalaire du vecteur précédent par un champ test \underline{u}^* (à dérivées premières bornées) :

$$\sigma_{ij,j} u_i^* + \rho f_i u_i^* = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \forall \underline{u}^*$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* + \rho f_i u_i^* dV = 0, \quad \forall \underline{u}^*$$

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} - \sigma_{ij} u_{i,j}^* + \rho f_i u_i^* dV = 0, \quad \forall \underline{u}^*$$

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} u_i^* n_j dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* dV + \int_{\Omega} \rho f_i u_i^* dV = 0, \quad \forall \underline{u}^*$$

Théorème des travaux virtuels

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* dV = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{u}}^* dV + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{u}}^* dS, \quad \forall \underline{\underline{u}}^*$$

avec $\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$

$$W^{int} + W^{ext} + W^{contact} = 0$$

$$\mathcal{P}^{int} + \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{P}^{contact} = 0$$

théorème des travaux/puissances virtuelles dans le cas statique

$\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ non nécessairement liés par la loi de comportement, et sans restriction sur les CL

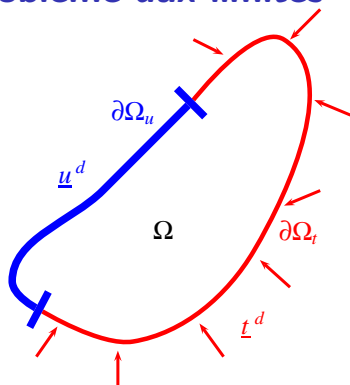
En particulier, pour $\underline{\underline{u}}^* = \underline{\underline{u}}$, le champ solution, en l'absence de discontinuités :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{u}} dV + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{u}} dS$$

Plan

- ① Potentiel d'élasticité
- ② Théorème des travaux virtuels
- ③ Théorème de l'énergie potentielle**
- ④ Théorème de l'énergie complémentaire
- ⑤ Encadrement de la solution
- ⑥ Cas de l'élasticité linéarisée
- ⑦ Consignes pour l'examen

Problème aux limites



- déplacements imposés $\underline{u} = \underline{u}^d$ sur $\partial\Omega_u$
- efforts surfaciques imposés $\underline{t} = \underline{t}^d$ sur $\partial\Omega_t$

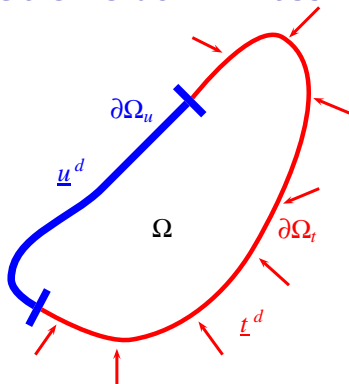
$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t = \partial\Omega$$

$$\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_t = \emptyset$$

Un champ $\underline{u}^*(\underline{x})$ sur Ω est **cinématiquement admissible** (C.A.) ssi $\underline{u}^* = \underline{u}^d, \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u$.

Un champ $\underline{\sigma}^\dagger(\underline{x})$ sur Ω est **statiquement admissible** (S.A.) ssi $\text{div } \underline{\sigma}^\dagger + \rho \underline{f} = 0$ et $\underline{t} = \underline{\sigma}^\dagger \cdot \underline{n} = \underline{t}^d, \forall \underline{x} \in \partial\Omega_t$.

Problème aux limites



- déplacements imposés $\underline{u} = \underline{u}^d$ sur $\partial\Omega_u$
- efforts surfaciques imposés $\underline{t} = \underline{t}^d$ sur $\partial\Omega_t$

$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t = \partial\Omega$$

$$\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_t = \emptyset$$

Un champ \underline{u}^* C.A. et un champ $\underline{\sigma}^\dagger$ S.A. remplissent les conditions du théorème des travaux virtuels

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\sigma}^\dagger : \underline{\varepsilon}^* dS = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega} (\underline{\sigma}^\dagger \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^* dV$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{\mathbf{u}}^*$, pour des efforts $\rho \underline{\mathbf{f}}$ et $\underline{\mathbf{t}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*) = \int_{\Omega} W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dS$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{\mathbf{u}}^*$, pour des efforts $\rho \underline{\mathbf{f}}$ et $\underline{\mathbf{t}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*) = \int_{\Omega} W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{\mathbf{u}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*) - \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) &= \int_{\Omega} (W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) - W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})) dV \\ &- \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dS \end{aligned}$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{\mathbf{u}}^*$, pour des efforts $\rho \underline{\mathbf{f}}$ et $\underline{\mathbf{t}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*) = \int_{\Omega} W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{\mathbf{u}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*) - \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) &= \int_{\Omega} (W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) - W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})) dV \\ &- \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dS \\ &\geq \int_{\Omega} W'(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) : (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV \\ &- \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dS \end{aligned}$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{\mathbf{u}}^*$, pour des efforts $\rho \underline{\mathbf{f}}$ et $\underline{\mathbf{t}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*) = \int_{\Omega} W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{\mathbf{u}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*) - \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) &= \int_{\Omega} (W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) - W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})) dV \\ &- \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dS \\ &\geq \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV \\ &- \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dS \end{aligned}$$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{\mathbf{u}}^*$, pour des efforts $\underline{\rho\mathbf{f}}$ et $\underline{\mathbf{t}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*) = \int_{\Omega} W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV - \int_{\Omega} \underline{\rho\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{\mathbf{u}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*) - \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) &= \int_{\Omega} (W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) - W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})) dV \\ &- \int_{\Omega} \underline{\rho\mathbf{f}} \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dS \\ &\geq \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV \\ &- \int_{\Omega} \underline{\rho\mathbf{f}} \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dS = 0 \end{aligned}$$

par application du TTV pour $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}$

Energie potentielle

On définit l'énergie potentielle d'un corps élastique Ω associée au champ C.A. $\underline{\mathbf{u}}^*$, pour des efforts $\rho \underline{\mathbf{f}}$ et $\underline{\mathbf{t}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*) = \int_{\Omega} W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dS$$

Soit $\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}})$ l'énergie potentielle du corps Ω pour le champ solution $\underline{\mathbf{u}}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*) - \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) &= \int_{\Omega} (W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) - W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})) dV \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dS \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

La solution $\underline{\mathbf{u}}$ minimise l'énergie potentielle \mathcal{E}

Unicité du minimum de l'énergie potentielle

Soient $\underline{\mathbf{u}}$ le champ solution du problème et $\underline{\mathbf{u}}^*$ un champ C.A. tel que

$$\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*) - \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) = 0$$

Cela implique que

$$\int_{\Omega} (W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) - W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})) dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}) dS = 0$$

$$\int_{\Omega} (W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) - W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})) dV = \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

d'après le TTV pour le couple $(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}})$.

$$\int_{\Omega} (W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) - W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) - W'(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) : (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}})) dV = 0$$

La stricte convexité de W permet de conclure que $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Elle assure également l'existence du minimum (l'ensemble des champs C.A. est un espace affine convexe). Il s'agit de la *Formulation variationnelle du problème aux limites d'élasticité non linéaire*.

Plan

- ① Potentiel d'élasticité
- ② Théorème des travaux virtuels
- ③ Théorème de l'énergie potentielle
- ④ Théorème de l'énergie complémentaire**
- ⑤ Encadrement de la solution
- ⑥ Cas de l'élasticité linéarisée
- ⑦ Consignes pour l'examen

Energie complémentaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underline{\sigma}^\dagger$, pour des déplacements \underline{u}^d donnés :

$$\mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) = \int_{\Omega} W^*(\underline{\sigma}^\dagger) dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}^\dagger \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS$$

Energie complémentaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underline{\sigma}^\dagger$, pour des déplacements \underline{u}^d donnés :

$$\mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) = \int_{\Omega} W^*(\underline{\sigma}^\dagger) dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}^\dagger \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS$$

Soit $\mathcal{E}^*(\underline{\sigma})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underline{\sigma}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) - \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}) &= \int_{\Omega} (W^*(\underline{\sigma}^\dagger) - W^*(\underline{\sigma})) dV \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_u} ((\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS \end{aligned}$$

Energie complémentaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underline{\sigma}^\dagger$, pour des déplacements \underline{u}^d donnés :

$$\mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) = \int_{\Omega} W^*(\underline{\sigma}^\dagger) dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}^\dagger \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS$$

Soit $\mathcal{E}^*(\underline{\sigma})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underline{\sigma}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) - \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}) &= \int_{\Omega} (W^*(\underline{\sigma}^\dagger) - W^*(\underline{\sigma})) dV \\ &- \int_{\partial\Omega_u} ((\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS \\ &\geq \int_{\Omega} W^{*'}(\underline{\sigma}) : (\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) dV \\ &- \int_{\partial\Omega_u} ((\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS \end{aligned}$$

Energie complémentaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underline{\sigma}^\dagger$, pour des déplacements $\underline{\mathbf{u}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) = \int_{\Omega} W^*(\underline{\sigma}^\dagger) dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}^\dagger \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^d dS$$

Soit $\mathcal{E}^*(\underline{\sigma})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underline{\sigma}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) - \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}) &= \int_{\Omega} (W^*(\underline{\sigma}^\dagger) - W^*(\underline{\sigma})) dV \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_u} ((\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^d dS \\ &\geq \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} : (\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) dV \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_u} ((\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^d dS \end{aligned}$$

Energie complémentaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underline{\sigma}^\dagger$, pour des déplacements $\underline{\mathbf{u}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) = \int_{\Omega} W^*(\underline{\sigma}^\dagger) dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}^\dagger \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^d dS$$

Soit $\mathcal{E}^*(\underline{\sigma})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underline{\sigma}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) - \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}) &= \int_{\Omega} (W^*(\underline{\sigma}^\dagger) - W^*(\underline{\sigma})) dV \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_u} ((\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^d dS \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

par application successive du TTV pour $(\underline{\sigma}^\dagger, \underline{\mathbf{u}})$ et $(\underline{\sigma}, \underline{\mathbf{u}})$ et différence entre ces deux équations

Energie complémentaire

On définit l'énergie complémentaire d'un corps élastique Ω associée au champ S.A. $\underline{\sigma}^\dagger$, pour des déplacements $\underline{\mathbf{u}}^d$ donnés :

$$\mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) = \int_{\Omega} W^*(\underline{\sigma}^\dagger) dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}^\dagger \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^d dS$$

Soit $\mathcal{E}^*(\underline{\sigma})$ l'énergie complémentaire du corps Ω pour le champ solution $\underline{\sigma}$. On considère la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) - \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}) &= \int_{\Omega} (W^*(\underline{\sigma}^\dagger) - W^*(\underline{\sigma})) dV \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_u} ((\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^d dS \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Le champ de contraintes solution $\underline{\sigma}$ minimise l'énergie complémentaire \mathcal{E}^* .

La solution en contraintes du problème d'élasticité est le minimum de l'énergie complémentaire.

Plan

- ① Potentiel d'élasticité
- ② Théorème des travaux virtuels
- ③ Théorème de l'énergie potentielle
- ④ Théorème de l'énergie complémentaire
- ⑤ Encadrement de la solution**
- ⑥ Cas de l'élasticité linéarisée
- ⑦ Consignes pour l'examen

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) + \mathcal{E}^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_{\Omega} W(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) dV \\ &- \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} dV - \int_{\partial\Omega} (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} dS\end{aligned}$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) + \mathcal{E}^*(\underline{\underline{\sigma}}) &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV \\ &- \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} dV - \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} dS\end{aligned}$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) + \mathcal{E}^*(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} dV \\ &- \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} dV - \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} dS \\ &= 0\end{aligned}$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) + \mathcal{E}^*(\underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}) &= \int_{\Omega} \underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} dV \\ &- \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} dV - \int_{\partial\Omega} (\underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} dS \\ &= 0\end{aligned}$$

On obtient un encadrement de la solution de la manière suivante :

$$\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) \leq \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*), \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \text{ C.A.}$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) + \mathcal{E}^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \\ &- \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} dV - \int_{\partial\Omega} (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} dS \\ &= 0\end{aligned}$$

On obtient un encadrement de la solution de la manière suivante :

$$-\mathcal{E}^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) \leq \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*), \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \text{ C.A.}$$

Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) + \mathcal{E}^*(\underline{\underline{\sigma}}) &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV \\ &- \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} dV - \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} dS \\ &= 0\end{aligned}$$

On obtient un encadrement de la solution de la manière suivante :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^\dagger \text{ S.A.}, \quad -\mathcal{E}^*(\underline{\underline{\sigma}}^\dagger) \leq -\mathcal{E}^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}) \leq \mathcal{E}(\underline{\mathbf{u}}^*), \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \text{ C.A.}$$

Plan

- ① Potentiel d'élasticité
- ② Théorème des travaux virtuels
- ③ Théorème de l'énergie potentielle
- ④ Théorème de l'énergie complémentaire
- ⑤ Encadrement de la solution
- ⑥ **Cas de l'élasticité linéarisée**
- ⑦ Consignes pour l'examen

Théorèmes de l'énergie en élasticité linéarisée

Pour tout champ de déplacements $\underline{\mathbf{u}}^*$ C.A.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} : \underline{\mathbf{C}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot \underline{\mathbf{u}} dS \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}' : \underline{\mathbf{C}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}' dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dS \end{aligned}$$

Théorèmes de l'énergie en élasticité linéarisée

Pour tout champ de déplacements $\underline{\mathbf{u}}^*$ C.A.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} : \underline{\mathbf{C}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot \underline{\mathbf{u}} dS \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}' : \underline{\mathbf{C}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}' dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dV - \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dS \end{aligned}$$

Pour tout champ de contraintes $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger$ S.A.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{S}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}} dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^d dV \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger : \underline{\mathbf{S}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^d dV \end{aligned}$$

Formule de Clapeyron

Benoît Paul Emile Clapeyron (1799–1864), études à l'Ecole des Mines (1818–1820)

$$\int_{\Omega} W(\underline{\varepsilon}) dV = \int_{\Omega} W^*(\underline{\sigma}) dV =$$

Formule de Clapeyron

Benoît Paul Emile Clapeyron (1799–1864), études à l'Ecole des Mines (1818–1820)

$$\int_{\Omega} W(\underline{\varepsilon}) dV = \int_{\Omega} W^*(\underline{\sigma}) dV = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial\Omega} (\underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} dV \right)$$

L'énergie élastique stockée dans le corps matériel est égale à la moitié du travail de tous les efforts appliqués.

Plan

- ① Potentiel d'élasticité
- ② Théorème des travaux virtuels
- ③ Théorème de l'énergie potentielle
- ④ Théorème de l'énergie complémentaire
- ⑤ Encadrement de la solution
- ⑥ Cas de l'élasticité linéarisée
- ⑦ Consignes pour l'examen**

Consignes pour l'examen

- TOUS documents autorisés!
- Calculatrice
- Etudier spécifiquement :
 - les exercices de PC en profondeur
 - les annales sur le site du cours:
http://mms2.ensmp.fr/mmc_paris/mmc_paris.php
 - le théorème de superposition en élasticité linéarisée
 - les problèmes du trou dans une plaque jusqu'à la notion de fissure (comprise)

Le problème sera passionnant et assez incroyable, vous verrez...