

# Intégration temporelle: La méthode par éléments finis

*Stéphanie Basseville*

*Centre des Matériaux  
Ecole des Mines de Paris*

*Novembre 2005*

# Objectif du cours

- *Etendre la méthode par éléments finis à des problèmes linéaires dépendant du temps*
- *Montrer que ces problèmes se formulent de manière identique:*

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F\} = 0$$

- *Présenter divers types de résolution:*
  - *les méthodes analytiques*  
*(méthodes complexes mais permettent un aperçu utile à l'ingénieur)*
  - *les méthodes par récurrence*

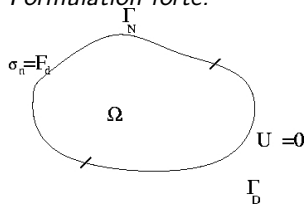
- 1 Quelques exemples
  - Exemple mécanique
  - Exemple conduction de chaleur
  - Les équations “quasi-harmoniques”
- 2 Méthodes analytiques de résolution
  - Réponse libre
  - Réponse périodique
  - Réponse transitoire
- 3 Méthodes par récurrence
  - La méthode des trapèzes généralisée
  - La méthode de Newmark
- 4 En conclusion

# Plan

- 1 Quelques exemples
  - Exemple mécanique
  - Exemple conduction de chaleur
  - Les équations “quasi-harmoniques”
- 2 Méthodes analytiques de résolution
  - Réponse libre
  - Réponse périodique
  - Réponse transitoire
- 3 Méthodes par récurrence
  - La méthode des trapèzes généralisée
  - La méthode de Newmark
- 4 En conclusion

# Comportement dynamique d'une structure élastique avec amortissement linéaire

- Formulation forte:



Trouver  $\underline{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \ddot{\underline{u}} + \mu \dot{\underline{u}} = \operatorname{div} \underline{\tilde{\sigma}} + \underline{f}_d & \text{dans } \Omega \\ \underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\Lambda} : \underline{\tilde{\varepsilon}} & \text{dans } \Omega \\ \underline{\tilde{u}} = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \underline{\tilde{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F}_d & \text{sur } \Gamma_N \\ \underline{u}(0) = \underline{u}_0, \quad \dot{\underline{u}}(0) = \dot{\underline{U}}_0 & \end{array} \right.$$

# Comportement dynamique d'une structure élastique avec amortissement linéaire

- *Formulation variationnelle :*

Trouver  $\underline{u} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tel que  $\underline{u} = 0$  sur  $\Gamma_D$  satisfaisant:

$$\int_{\Omega} \delta \underline{u} \cdot \underline{\mu} \dot{\underline{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \underline{u} \cdot \underline{\rho} \ddot{\underline{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \underline{\varepsilon} : \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \underline{u} \cdot \underline{f}_d - \int_{\Gamma_N} \delta \underline{u} \cdot \underline{F}_d d\Gamma = 0,$$

pour tout  $\delta \underline{u}$  tel que  $\delta \underline{u} = 0$  sur  $\Gamma_D$ .

# Approximation par éléments finis

- *Approximation du champ de déplacement et des déformations:*

*Estimation du champ de déplacement  $\underline{u}(\underline{X}, t)$  à l'intérieur de  $\Omega^e$  et à chaque instant, à partir des valeurs du déplacement aux noeuds  $\{q^e\}$  au même instant:*

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = [N^e(\underline{X})] \{q^e(t)\}$$

$$\underline{\varepsilon}(\underline{X}, t) = [B^e(\underline{X})] \{q^e(t)\}$$

- *Approximation du champ des contraintes:*

$$\underline{\sigma} = \underline{\Lambda} : [B^e(\underline{X})] \{q^e(t)\}$$

- *Soit  $\{\delta q^e(t)\}$  un déplacement virtuel des noeuds:*

$$\delta \underline{u}(\underline{X}, t) = [N^e(\underline{X})] \{\delta q^e(t)\}$$

$$\delta \underline{\varepsilon}(\underline{X}, t) = [B^e(\underline{X})] \{\delta q^e(t)\}$$

# Discrétisation partielle

*Approximation + Formulation variationnelle:*



$$\underbrace{\left( \int_{\Omega^e} [N^e]^T \rho [N^e] d\Omega \right)}_{[M^e]} \frac{d^2 \{q^e\}}{dt^2} + \underbrace{\left( \int_{\Omega^e} [N^e]^T \mu [N^e] d\Omega \right)}_{[C^e]} \frac{d \{q^e\}}{dt} + \underbrace{\left( \int_{\Omega^e} [B] \underline{\Lambda} : [B] d\Omega \right)}_{[K^e]} \{q^e\} - \underbrace{\left( \int_{\Omega^e} [N^e]^T \underline{f}_d d\Omega + \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_N} [N^e]^T \underline{F}_d d\Gamma \right)}_{\{F^e\}} = 0.$$

*Assemblage*



*Formulation matricielle d'un système d'équations différentielles:*

$$\underbrace{[M]}_{\text{Masse}} \{\ddot{q}\} + \underbrace{[C]}_{\text{Amortissement}} \{\dot{q}\} + \underbrace{[K]}_{\text{Rigidité}} \{q\} + \underbrace{\{F\}}_{\text{Force}} = 0$$

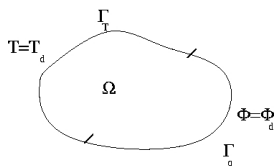


# Plan

- 1 Quelques exemples
  - Exemple mécanique
  - Exemple conduction de chaleur
  - Les équations “quasi-harmoniques”
- 2 Méthodes analytiques de résolution
  - Réponse libre
  - Réponse périodique
  - Réponse transitoire
- 3 Méthodes par récurrence
  - La méthode des trapèzes généralisée
  - La méthode de Newmark
- 4 En conclusion

# Conduction de chaleur

- *Formulation forte:*



Trouver  $T : \Omega \implies \mathbb{R}$  vérifiant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\lambda \underline{\nabla} T) + r - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ dans } \Omega \\ (\lambda \underline{\nabla} T) \cdot \underline{n} = \phi_d \text{ sur } \Gamma_q \\ T = T_d \text{ sur } \Gamma_T \\ T(0) = T_0 \end{array} \right.$$

*Equation constitutive de Fourier:*

$$\underline{\Phi} = \lambda \underline{\nabla} T$$

# Conduction de chaleur

- *Formulation variationnelle:*

*Trouver  $T$  tel que  $T = T_d$  sur  $\Gamma_T$  satisfaisant:*

$$\int_{\Omega} \delta T \left( r - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_q} \delta T \phi_d d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \delta T^T \cdot \lambda \nabla T d\Omega = 0,$$

*pour toute fonction  $\delta T$  telle que  $\delta T = 0$  sur  $\Gamma_T$ .*

# Approximation par éléments finis

- *Approximation du champ de température:*

*Estimation du champ de température  $T$  à l'intérieur de  $\Omega^e$  et à chaque instant, à partir des valeurs de la température aux noeuds  $\{T^e\}$  au même instant:*

$$T(\underline{X}, t) = \{N^e(\underline{X})\} \cdot \{T^e(t)\}$$
$$\dot{T}(\underline{X}, t) = \{N^e(\underline{X})\} \cdot \{\dot{T}^e(t)\}$$

- *Soit  $\delta T^e$  une température virtuelle aux noeuds:*

$$\delta T(\underline{X}, t) = \{N^e(\underline{X})\} \cdot \{\delta T^e(t)\}$$

# Discrétisation partielle

*Approximation + Formulation variationnelle:*



$$\underbrace{\left( \int_{\Omega^e} \rho c \{N^e\}^T \{N^e\} d\Omega \right)}_{[C^e]} \frac{d\{T^e\}}{dt} + \underbrace{\int_{\Omega^e} \{\nabla N^e\}^T \cdot \lambda \cdot \{\nabla N^e\} d\Omega}_{[K^e]} \{T^e\} + \underbrace{\int_{\Omega^e} \{N^e\} r d\Omega + \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_q} \{N^e\} \Phi_d d\Gamma}_{\{F^e\}} = 0.$$

*Assemblage*



*Formulation matricielle d'un système d'équations différentielles:*

$$\underbrace{[C]}_{\text{Capacité calorifique}} \{\dot{T}\} + \underbrace{[K]}_{\text{Conductivité}} \{T\} + \underbrace{\{F\}}_{\text{Force}} = 0$$

# Plan

- 1 Quelques exemples
  - Exemple mécanique
  - Exemple conduction de chaleur
  - Les équations “quasi-harmoniques”
- 2 Méthodes analytiques de résolution
  - Réponse libre
  - Réponse périodique
  - Réponse transitoire
- 3 Méthodes par récurrence
  - La méthode des trapèzes généralisée
  - La méthode de Newmark
- 4 En conclusion

# Les équations “quasi-harmoniques”

$$\underline{\nabla}^T \cdot (\underline{k} \underline{\nabla} \Phi) + r - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \text{avec } q = -\underline{k} \underline{\nabla} \Phi.$$

*Méthode par éléments finis:*

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F\} = 0$$

$$\text{avec } [M] = \int_{\Omega} \rho \{N\}^T \{N\} d\Omega \quad [C] = \int_{\Omega} \mu \{N\}^T \{N\} d\Omega$$

*Si  $\rho \neq \mu \neq 0$ , Equation des ondes non amorties*

*Si  $\rho = 0$ , Equation classique de la chaleur en régime transitoire*

*Si  $\mu = 0$ , Equation d'Helmholtz*

# Plan

- 1 Quelques exemples
  - Exemple mécanique
  - Exemple conduction de chaleur
  - Les équations “quasi-harmoniques”
- 2 Méthodes analytiques de résolution
  - Réponse libre
  - Réponse périodique
  - Réponse transitoire
- 3 Méthodes par récurrence
  - La méthode des trapèzes généralisée
  - La méthode de Newmark
- 4 En conclusion



# Les vibrations libres non amorties

- *Formulation du problème:*

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0$$

- *Recherche de la solution sous la forme*

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{i\omega t}.$$

- *Problème aux valeurs propres*

$$([K] - \omega^2[M])\{\bar{q}\} = 0$$

*Déterminer  $\omega$  tel que*

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0$$

*$n$  valeurs propres !*

# Calcul des valeurs propres et modes propres

- **Point de départ:** *problème restreint de valeurs propres:*

$$[H] \{X\} = \lambda \{X\} \quad \text{avec } [H] \text{ symétrique définie positive}$$

- **Première idée:**

$$[K]^{-1} [M] \{\bar{q}\} = \frac{1}{\omega^2} \{\bar{q}\}$$

$[K]^{-1} [M]$  pas toujours symétrique définie positive.

- *Décomposition de  $[K]$  par la méthode de Cholesky:  $[K] = [L]^T [L]$   
Ecriture équivalente du problème*

$$[L]^{-1} [M] [L]^{-T} [L]^T \{\bar{q}\} = \frac{1}{\omega^2} [L]^T \{\bar{q}\}$$

On pose :

$$\begin{aligned} [H] &= [L]^{-1} [M] [L]^{-T} \quad \text{matrice symétrique définie positive} \\ \{X\} &= [L]^T \{\bar{q}\} \end{aligned}$$

# Vibration libre: Conduction de chaleur

- *Formulation du problème:*

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = 0$$

- *Recherche de la solution sous la forme*

$$\{T\} = \{\bar{T}\}e^{-\omega t}$$

- *Problème aux valeurs propres*

$$([K] - \omega^2[C])\{\bar{T}\} = 0$$

# Vibrations libres amorties

- *Formulation du problème:*

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = 0$$

- *Recherche de la solution sous la forme*

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{-\alpha t} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

- *Equation caractéristique*

$$(\alpha^2[M] - \alpha[C] + [K])\{\bar{q}\} = 0$$

*Problème difficile à résoudre*

## Remarque

*Dans le cas général, le calcul des valeurs propres est difficile*

*Mais souvent,  $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$*

*Similaire aux vibrations non amorties!!!*

# Plan

- 1 Quelques exemples
  - Exemple mécanique
  - Exemple conduction de chaleur
  - Les équations “quasi-harmoniques”
- 2 Méthodes analytiques de résolution
  - Réponse libre
  - **Réponse périodique**
  - Réponse transitoire
- 3 Méthodes par récurrence
  - La méthode des trapèzes généralisée
  - La méthode de Newmark
- 4 En conclusion

# Vibrations périodiques forcées

- *Formulation du problème:*

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{\bar{F}\} e^{\alpha t} = 0 \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

- *Recherche de la solution sous la forme*

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{\alpha t}$$

- *Equation caractéristique*

$$\underbrace{(\alpha^2[M] + \alpha[C] + [K])}_{[D] \text{ complexe!}} \{\bar{q}\} = -\{\bar{F}\}$$

*Soit de façon formelle  $\{\bar{q}\} = -[D]^{-1} \{\bar{F}\}$ .*

*$\implies$  Décomposition en parties réelles et imaginaires.*

# Décomposition en parties réelles et imaginaires

- On pose:

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} &= e^{\alpha_1 t} (\cos(\alpha_2 t) + i \sin(\alpha_2 t)) \quad , \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2 \\ \{\overline{F}\} &= \{\overline{F}_1\} + i \{\overline{F}_2\} \quad , \{\overline{F}_i\} \in \mathbb{R}, \\ \{\overline{q}\} &= \{\overline{q}_1\} + i \{\overline{q}_2\} \quad , \{\overline{q}_i\} \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

- On obtient:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)[M] + \alpha_1[C] + [K] & -2\alpha_1\alpha_2[M] - \alpha_2[C] \\ 2\alpha_1\alpha_2[M] + \alpha_2[C] & (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)[M] + \alpha_1[C] + [K] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\overline{q}_1\} \\ \{\overline{q}_2\} \end{pmatrix} \\ = - \begin{pmatrix} \{\overline{F}_1\} \\ \{\overline{F}_2\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



# Plan

- 1 Quelques exemples
  - Exemple mécanique
  - Exemple conduction de chaleur
  - Les équations “quasi-harmoniques”
- 2 Méthodes analytiques de résolution
  - Réponse libre
  - Réponse périodique
  - Réponse transitoire
- 3 Méthodes par récurrence
  - La méthode des trapèzes généralisée
  - La méthode de Newmark
- 4 En conclusion

# Réponse transitoire : Décomposition modale

- *Résolution du problème:*

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F\} = 0$$

- Si  $\{F\} = 0$  alors  $\{q\} = \{\bar{q}\} e^{\alpha t}$
- **Idée:** Chercher  $\{q\}$  sous la forme d'une combinaison linéaire des modes propres:

$$\{q\} = \sum_{i=1}^n \{\bar{q}_i\} y_i(t)$$

$y_i(t)$  contribution de chaque mode.

# Décomposition modale

*n équations scalaires indépendantes*

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i + F_i = 0$$

$$m_i = \{\bar{q}_i\}^T [M] \{\bar{q}_i\}$$

$$c_i = \{\bar{q}_i\}^T [C] \{\bar{q}_i\} \quad \text{orthogonalité des modes}$$

$$k_i = \{\bar{q}_i\}^T [K] \{\bar{q}_i\}$$

$$F_i = \{\bar{q}_i\}^T \{F\}.$$

*Résolution des équations de manière indépendante.*

*Nécessite la recherche de toutes les valeurs propres*

*Mais dans la pratique, on cherche un nombre limité de valeur propre.*

*En général, les modes hautes fréquences sont amortis.*

*Méthode valable pour  $[M] = 0$ :*

$$c_i \dot{y}_i + k_i y_i + F_i = 0$$

# Réponse transitoire: la méthode par récurrence

- *Méthode pas à pas ou par récurrence*

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

- *Obtention des relations de récurrence grâce au problème:*

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} + \{F\} = 0$$

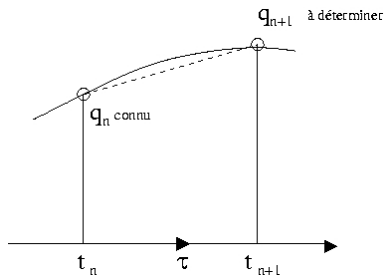
- *Obtention des résultats de stabilité grâce au problème:*

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i + F_i = 0$$

# Plan

- 1 Quelques exemples
  - Exemple mécanique
  - Exemple conduction de chaleur
  - Les équations “quasi-harmoniques”
- 2 Méthodes analytiques de résolution
  - Réponse libre
  - Réponse périodique
  - Réponse transitoire
- 3 Méthodes par récurrence
  - La méthode des trapèzes généralisée
  - La méthode de Newmark
- 4 En conclusion

# La méthode des trapèzes généralisée



- *Problème étudié:*

$$[C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} + \{F\} = 0$$

- **Objectif:** *On se place sur l'intervalle  $\Delta t$ .  
Déterminer  $\{q_{n+1}\}$  connaissant  $\{q_n\}$ ,  $\{\dot{q}_n\}$  et  $\{F\}$ .*

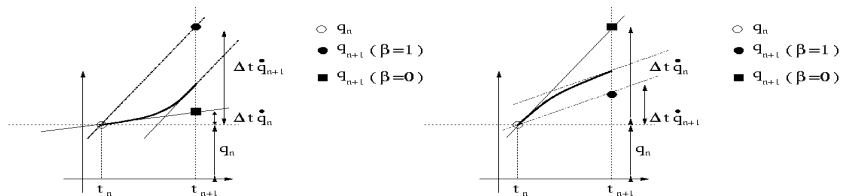
# Approximation de $\{q_{n+1}\}$

- *Développement en série de Taylor tronquée:*

$$\{q_{n+1}\} \approx \{q_n\} + \Delta t \{\dot{q}_n\} + \beta \Delta t (\{\dot{q}_{n+1}\} - \{\dot{q}_n\}), \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

- $\beta = 0$  *méthode explicite*  
 $\beta = 1/2$  *méthode de Crank-Nicholson*  
 $\beta = 1$  *méthode implicite*

# Approximation de $\{q_{n+1}\}$



*Dépendant de la concavité de la courbe.*



## Relation par récurrence

- *L'équation d'évolution est satisfaite en fin de pas de temps:*

$$[C] \{\dot{q}_{n+1}\} + [K] \{q_{n+1}\} + \{F_{n+1}\} = 0$$

- *L'approximation de  $\{q_{n+1}\}$  permet de déterminer la valeur de  $\{\dot{q}_{n+1}\}$ :*

$$\{\dot{q}_{n+1}\} = -([C] + \beta \Delta t [K])^{-1} [[K] (\{q_n\} + (1 - \beta) \Delta t \{\dot{q}_n\}) + \{F_{n+1}\}].$$

- *Puis la détermination de  $\{q_{n+1}\}$*

## Stabilité: $\{F\} = 0$

- **Définition:**

*Capacité d'un algorithme à amortir ou à amplifier les erreurs au cours des pas de temps successifs.*

- *Le schéma s'écrit:*

$$\{q_{n+1}\} = [A] \{q_n\}$$

$[A]$  est la matrice d'amplification.

$$\begin{cases} \{q_{n+1}\} \approx \{q_n\} + \Delta t \{\dot{q}_n\} + \beta \Delta t (\{\dot{q}_{n+1}\} - \{\dot{q}_n\}) \\ \forall j \in \mathbb{N}, \quad \{\dot{q}_j\} = -[C]^{-1}[K] \{q_j\}. \end{cases}$$

$$\{q_{n+1}\} = \underbrace{([C] + \beta \Delta t [K])^{-1} [[C] - (1 - \beta) \Delta t [K]]}_{[A]} \{q_n\}$$

Stabilité:  $\{F\} = 0$

*La stabilité dépend des valeurs propres de la matrice  $[A]$ :*

- *si il existe  $i \in [1, n]$  tel que  $|\lambda_i| > 1 \implies$  INSTABLE*
- *si pour tout  $i \in [1, n]$  tel que  $|\lambda_i| < 1 \implies$  STABLE*

**Problème:** Déterminer **TOUTES** les valeurs propres de  $[A]$ .

**Solution:** Utilisation des équations scalaires découplées.

## Stabilité: $F_i = 0$

- Ensemble des équations scalaires pour le système du premier ordre:

$$c_i \dot{y}_i + k_i y_i = 0$$

- Relation de récurrence

$$(1 - \beta \omega_i \Delta t)(y_i)_{n+1} = (1 - \Delta t \omega_i (1 - \beta))(y_i)_n \quad \text{avec} \quad \omega_i = \frac{k_i}{c_i} \text{ mode propre.}$$

- Equation caractéristique:  
On pose  $(y_i)_{n+1} = A(y_i)_n$ .

$$A = \frac{1 - \Delta t \omega_i (1 - \beta)}{1 + \Delta t \omega_i \beta}$$

- Condition:

$$|A| < 1?$$

## Stabilité: $F_j = 0$

- Si  $A > 1$ , la solution n'est pas bornée  $\implies$  Schéma *INSTABLE*

- Pour  $|A| < 1$ ,  $\frac{1 - \Delta t \omega_i (1 - \beta)}{1 + \Delta t \omega_i \beta} > -1$

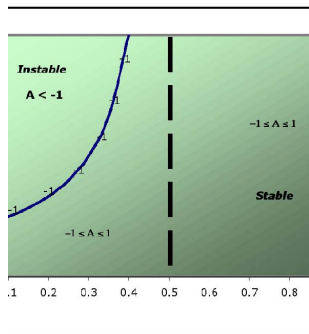
Soit

$$\omega_i \Delta t (2\beta - 1) > -2$$

i). Si  $\beta > \frac{1}{2}$  alors  $|A| < 1 \implies$  *STABILITE INCONDITIONNELLE*

ii.) Si  $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$  alors  $|A| < 1$  si  $\Delta t < \frac{2}{(1 - 2\beta)\omega_{\max}}$   
 $\implies$  *STABILITE CONDITIONNELLE*

Stabilité:  $\{F\} = 0$



Si  $\beta \in [0, 1/2]$

STABILITE CONDITIONNELLE

Si  $\beta > 1/2$

STABILITE INCONDITIONNELLE

# Pas de temps critique

- *Stabilité conditionnelle : Pas de temps critique:*

$$\Delta t < \frac{2}{(1 - 2\beta)\omega_{max}} = \Delta t_{crit}$$

- *Si  $A > 0$  solution oscillante*

$$\Delta t < \frac{1}{(1 - \beta)\omega_{max}} = \Delta t_{osc}$$

*Recherche de toutes les valeurs propres*

- *Application du théorème de IRONS et THREHANE:*

$$\begin{aligned} \min_j \omega^2 &\geq \min_e \omega_e^2 \\ \max_j \omega^2 &\leq \max_e \omega_e^2 \end{aligned}$$

$\implies$  *Bonne estimation du pas de temps critique.*

# Conclusion

*Importance du choix du pas de temps  $\Delta t$  lors de simulation numérique*

- *Dépendance de  $\beta$*
- *Dépendance du matériau*
- *Dépendance du maillage (taille  $h$  de l'élément)*



# Pas de temps critique en thermique

*Etude du problème de conduction thermique à un degré de liberté avec un comportement uniaxial*

- *élément linéaire:*

$$N = \frac{h - x}{h}$$

- *Calcul de C et K*

$$C = c \int_0^h N^2 dx = \frac{ch}{3} \quad K = k \int_0^h \left( \frac{dN}{dx} \right)^2 dx = \frac{k}{h} \quad w = \frac{K}{C} = \frac{3k}{ch^2},$$

- *Pas de temps critique*

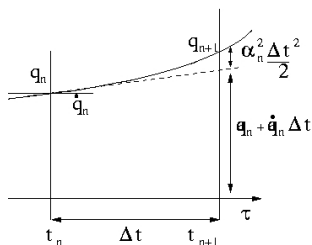
$$\Delta t_{crit} = \frac{2}{1 - 2\beta} \frac{c}{3k} h^2$$

*Diminue rapidement avec la taille de l'élément  
⇒ Difficulté pour les calculs*

# Plan

- 1 Quelques exemples
  - Exemple mécanique
  - Exemple conduction de chaleur
  - Les équations “quasi-harmoniques”
- 2 Méthodes analytiques de résolution
  - Réponse libre
  - Réponse périodique
  - Réponse transitoire
- 3 Méthodes par récurrence
  - La méthode des trapèzes généralisée
  - La méthode de Newmark
- 4 En conclusion

# La méthode de Newmark



- Les équations gouvernant le problème sont satisfaites en fin de pas

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F\} = 0.$$

- **Objectif:** Déterminer  $\{q_{n+1}\}$  et  $\{\dot{q}_{n+1}\}$  connaissant  $\{q_n\}$   $\{\dot{q}_n\}$   $\{\ddot{q}_n\}$  et  $\{F\}$

# Approximation de $\{q_{n+1}\}$ et $\{\dot{q}_{n+1}\}$

*Développement en série de Taylor tronquée*

$$\{q_{n+1}\} = \underbrace{\{q_n\} + \Delta t \{\dot{q}_n\} + (1 - \beta_2) \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{q}_n\} + \beta_2 \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{q}_{n+1}\}}_{\{q_{n+1}^*\}}$$

$$\{\dot{q}_{n+1}\} = \underbrace{\{\dot{q}_n\} + (1 - \beta_1) \Delta t \{\ddot{q}_n\} + \beta_1 \Delta t \{\ddot{q}_{n+1}\}}_{\{\dot{q}_{n+1}^*\}}$$

# Relation de récurrence

- L'équation d'évolution est satisfaite en fin de pas de temps:

$$[M] \{\ddot{q}_{n+1}\} + [C] \{\dot{q}_{n+1}\} + [K] \{q_{n+1}\} + \{F_{n+1}\} = 0.$$

- L'approximation de  $\{q_{n+1}\}$  et  $\{\dot{q}_{n+1}\}$  permet d'obtenir:

$$\begin{aligned} \{\ddot{q}_{n+1}\} &= \underbrace{-([M] + \beta_1 \Delta t [C] + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 [K])^{-1}}_{[D]} \{[C] \{\dot{q}_{n+1}^*\}\} \\ &+ [K] \{q_{n+1}^*\} + \{F_{n+1}\} \end{aligned}$$

# Résumé

Choix de  $\beta_1$  et  $\beta_2$

A chaque pas de temps  $\Delta t$

- calcul initiaux (prédiction)

$$\{q_{n+1}^*\} = \{q_n\} + \Delta t \{\dot{q}_n\} + (1 - \beta_2) \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{q}_n\}$$

$$\{\dot{q}_{n+1}^*\} = \{\dot{q}_n\} + (1 - \beta_1) \Delta t \{\ddot{q}_n\}$$

- calcul de  $\{\ddot{q}_{n+1}\}$

$$\{\ddot{q}_{n+1}\} = [D] \{ [C] \{\dot{q}_{n+1}^*\} + [K] \{q_{n+1}^*\} + \{F_{n+1}\} \}$$

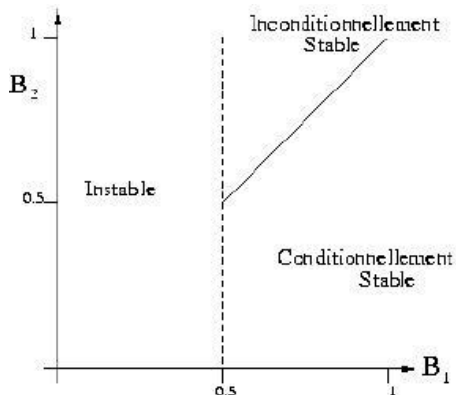
- calcul de  $\{q_{n+1}\}$  et  $\{\dot{q}_{n+1}\}$

$$\{q_{n+1}\} = \{q_{n+1}^*\} + \frac{\Delta t^2}{2} \beta_2 \{\ddot{q}_{n+1}\}$$

$$\{\dot{q}_{n+1}\} = \{\dot{q}_{n+1}^*\} + \Delta t \beta_1 \{\ddot{q}_{n+1}\}$$

# Stabilité de la méthode $\{F\} = 0$

*Etude à partir de l'ensemble des équations découplées*



# Pas de temps critique

Supposons  $\beta_2 = 0$ .

- Pour  $\beta_1 = 1/2$ :

$$\Delta t^2 \leq \frac{4m}{k} = (\Delta t_{crit})^2.$$

- Pour  $\beta_1 > 1/2$ :

$$\Delta t < \frac{2\theta_1 - 1}{\theta_1} \frac{c}{k} = \Delta t_{crit}.$$



## Exemple de pas de temps critique

Etude d'un problème dynamique élastique à un degré de liberté avec un comportement uniaxial. On suppose  $\beta_2 = 0$  et  $\beta_1 = 1/2$ :

- élément linéaire:

$$N = \frac{h-x}{h}$$

- Calcul de  $m$  et  $k$

$$m = \int_0^h \rho N^2 dx = \rho \frac{h}{3} \quad k = E \int_0^h \left( \frac{dN}{dx} \right)^2 dx = \frac{E}{h}.$$

- Pas de temps critique

$$\Delta t_{crit} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{h}{C}, \quad C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Stabilité gouvernée par le rapport entre la taille de l'élément  $h$  et la vitesse de propagation élastique  $C$ .

# En conclusion

- *L'extension de la méthode par éléments finis pour les problèmes dépendant du temps permet d'obtenir une forme matricielle:*

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F\} = 0$$

- *Deux types de résolution:  
les méthodes analytiques : réponse libre et périodique  
les méthodes par récurrence : réponse transitoire*
- *Attention des précautions sont à prendre lorsqu'on utilise les méthodes par récurrence...*