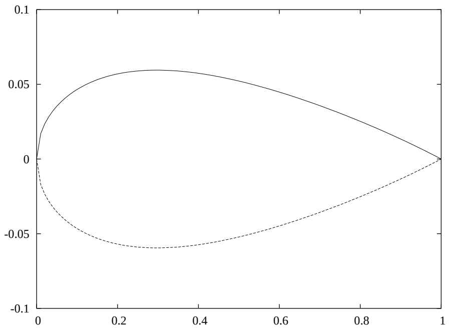
ENSMP 2ème/3ème année, Cours d'éléments finis, 22–26 novembre 2004

Calcul de l'écoulement autour d'une aile d'avion

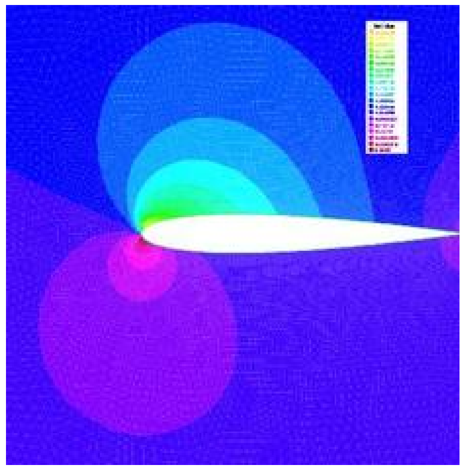


Un des modèles les plus simples d'écoulements fluides est fourni par un écoulement irrotationnel compressible, dans le cas du gaz parfait. La vitesse du fluide dérive d'un potentiel, et la conservation de la masse conduit à une équation elliptique. Comme le fluide est compressible, la densité dépend de la vitesse, ce qui conduit à une équation non–linéaire. Le cas considéré ici est l'écoulement autour d'un profil d'aile d'avion classique, le NACA 0012 (voir figure ci-contre).

Dans ce mini-projet, on cherche à résoudre les équations de l'écoulement potentiel. Comme ce problème est non-linéaire, on utilisera une méthode de point fixe. Pour simplifier, on considérera d'abord le cas non-portant, puis en régime portant. Dans ce dernier cas, on résoudra d'abord le cas incompressible, puis le cas général compressible.

Code utilisé : *FreeFem++*

Mots-clés : *mécanique des fluides, écoulements potentiels, profil d'aile, méthode de point fixe*



Présentation

Dans le cas d'un fluide non–visqueux, et irrotationnel, la vitesse dérive d'un potentiel $\varphi(x,y)$, et la conservation de la masse conduit à l'équation :

$$\mathrm{div}(\rho\nabla\varphi) = 0 \tag{1}$$

On montre (voir les références) que la densité ρ est reliée à la vitesse par

$$\rho = \left(1 - \frac{|\nabla\varphi|^2}{2H_0}\right)^{1/\gamma-1} \tag{2}$$

où H_0 est l'enthalpie du fluide, et γ est le rapport des chaleurs massiques (pour un gaz parfait, $\gamma = 7/5$).

Suivant Landau et Lifchitz [3], il est commode d'introduire la vitesse critique c_* :

$$c_*^2 = 2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}H_0 \tag{3}$$

et l'équation (2) prend alors la forme

$$\rho = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{|\nabla\varphi|^2}{c_*^2}\right)^{1/\gamma-1}. \tag{4}$$

La quantité $M_* = \dfrac{|\nabla\varphi|}{c_*}$ s'appelle le nombre de Mach (critique). L'écoulement est dit *subsonique* si $M_* < 1$, hypersonique dans le cas contraire. Nous nous bornerons ici au cas subsonique. L'introduction de c_* permet de rendre le problème adimensionnel (pourquoi ?), et donc on prendra $c_* = 1$.

Description du problème

La cas considéré ici est l'écoulement autour d'un profil d'aile d'avion classique, le NACA 0012 (voir figure page précédente). Il s'agit d'un profil symétrique, dont la partie supérieure a pour équation (avec $x \in]0,1[$)

$$y = 0.17735\sqrt{x} - 0.075597x - 0.212836x^2 + 0.17363x^3 - 0.06254x^4 \tag{5}$$

Il s'agit donc d'un problème posé dans *l'extérieur* d'un domaine borné. On introduira donc une frontière fictive «assez loin», sur laquelle on considère que l'écoulement est connu. En pratique, le cercle de rayon 5 convient (on peut aussi prendre une ellipse). On notera Ω le domaine compris entre le cercle et le profil d'aile.

La condition à la limite sur le profil est que la vitesse est nulle, c'est-à-dire $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}_{|\Gamma_0} = 0$. Sur la frontière artificielle extérieure, on suppose la vitesse connue, égale à U_∞, soit $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}_{|\Gamma_\infty} = U_\infty.n$, où n est la normale.

Travail proposé

Algorithme de point fixe

Le système constitué des équations (1) et (4) (plus les conditions aux limites) est un système non–linéaire. Pour le résoudre, on pourra utiliser la méthode itérative suivante.

- On se donne une densité initiale quelconque $\rho^0(x,y) > 0$ (par exemple $\rho^0 = 1$) ;
- Pour $n = 1, \ldots$, étant donné une densité ρ^{n-1}, on calcule un potentiel φ^n en résolvant le problème (linéaire) :

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\rho^{n-1}\nabla\varphi^n) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi^n}{\partial n} = 0 & \text{sur}\Gamma_0 \\ \dfrac{\partial\varphi^n}{\partial n} = U_\infty.n & \text{sur } \Gamma_\infty, \end{cases} \tag{6}$$

puis on calcule $\rho^n = \left(1 - \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}|\nabla\varphi^n|^2\right)^{1/\gamma-1}$.

Vérifier que si cet algorithme converge, sa limite est bien solution du système original.

Donner une formulation variationnelle du problème (6).

Résolution numérique

Écrire un programme FreeFem++ pour résoudre ce problème. Comparer les solutions obtenues avec des approximations P^1 et P^2.

Plutôt que le potentiel lui-même, on représentera plutôt la pression qui, à une constante près, est égale à $-|\nabla\varphi|^2$.

On prendra tout d'abord un nombre de Mach $M_\infty = U_\infty / c_* = 0.3$. On pourra ensuite faire varier le nombre de Mach, en s'approchant de 1. Comparer les pressions obtenues, ainsi que la difficulté du problème quand M_∞ augmente.

Références

[1] Charles Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows – Fundamentals of Numerical Discretization*, volume 1. Wiley, 4 eme edition, 1992.

[2] Charles Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows – Computational methods for inviscid and viscous flows*, volume 2. Wiley, 2 eme edition, 1992.

[3] Lev D. Landau and Evgenij M. Lifchitz. *Physique théorique – Mécanique des fluides*, volume 6. Mir, 2 eme edition, 1989.