

Optimisation de l'épaisseur d'une structure tridimensionnelle

dichotomie : on maintient un encadrement de l'épaisseur, et on met à jour cet encadrement pour s'approcher du déplacement cherché.

Code utilisé : FreeFem++

Mots-clés : élasticité, déplacements plans, méthode dichotomie, précision d'un calcul

On cherche à calculer l'épaisseur d'un pont, sous un chargement donné, de façon à ce que le déplacement maximal ne dépasse pas une valeur fixée.

La structure est fixée aux deux extrémités inférieures, et un chargement uniforme est appliqué sur la partie horizontale supérieure.

Dans ce mini-projet, on se propose de chercher la valeur minimale de l'épaisseur qui donne un déplacement au centre de la structure ne dépassant pas un critère fixé à l'avance. On utilisera pour cela une méthode de

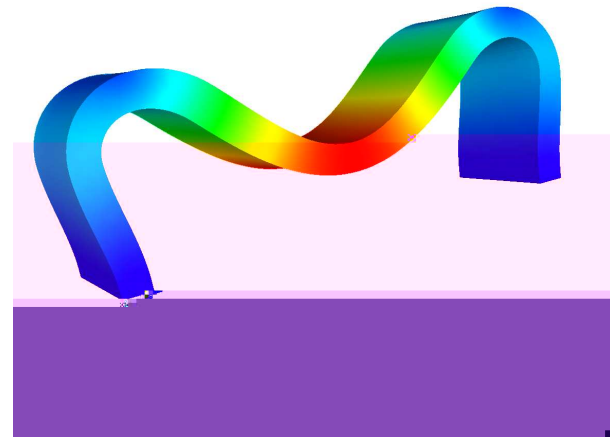


FIGURE 1 – Géométrie de la structure

Présentation

Description du problème

La structure considérée est tridimensionnelle. La géométrie d'une coupe verticale est présentée sur la figure 1. L'épaisseur de la pièce est $p = 0.5m$.

On supposera que la structure est homogène, ses caractéristiques physiques sont les suivantes :

Module d'Young $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$;

Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$;

Masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$.

La force imposée sur le bord supérieur est $f = 5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$.

Travail proposé

Formulation

Établir *soigneusement* la formulation variationnelle de ce problème. Préciser en particulier le traitement des conditions aux limites.

Résolution à e fixé

Dans ce paragraphe seulement, on fixe $e = 0.1m$. Écrire un programme utilisant le langage FreeFem++ pour résoudre le problème.

On commencera par mailler la coupe verticale 2D de la figure 1 en considérant qu'elle se situe dans le plan xy , et on utilisera la fonction `buildlayers` de FreeFem++ pour obtenir le maillage 3D (penser à faire

tourner la structure pour la remettre dans son orientation naturelle).

Étudier la précision du résultat en faisant varier le maillage, et en utilisant l'option d'adaptation de FreeFem++.

Comparer les solutions calculées sur la moitié de la structure et sur la structure entière.

Optimisation de l'épaisseur

On veut maintenant chercher l'épaisseur minimale du pont pour que le déplacement vertical au point situé au milieu de la face inférieure (noté P sur la figure 1) soit inférieur (en valeur absolue) à $d_0 = 10\text{cm}$. Pour cela, on suggère de procéder comme suit :

Approximation graphique

Commencer par chercher un encadrement de l'épaisseur cherchée $]e_{\min}^0, e_{\max}^0[$. Procéder graphiquement, en traçant la fonction $e \mapsto d$ sur un

intervalle approprié.

Examiner comment varie le déplacement en fonction de l'épaisseur.

Raffinement de la solution

On définit ensuite trois suites e_{\min}^n, e_{\max}^n et d^n de la façon suivante (méthode de dichotomie) :

- Poser $e^{n+1} = (e_{\min}^n + e_{\max}^n)/2$ et calculer le déplacement d^n correspondant.
- Si $|d^n - d_0| < \epsilon$, poser $e_{\max}^{n+1} = e^n, e_{\min}^{n+1} = e_{\min}^n$;
- Sinon poser $e_{\min}^{n+1} = e^n, e_{\max}^{n+1} = e_{\max}^n$.

On considère que le bord extérieur est fixe, c'est le bord intérieur qui change à chaque itération. Noter que l'on doit recalculer le maillage à chaque itération.

Écrire le programme correspondant.