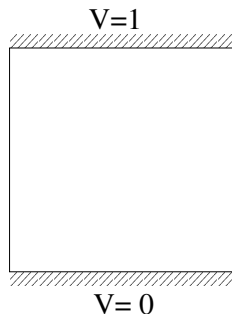


Etude de la conduction dans une plaque hétérogène



On applique une différence de potentiel entre les bords (hauts et bas sur la figure) d'une plaque carrée, les bords latéraux restant libres (pas de fuite de courant). Cette plaque est composée de deux matériaux, le rapport de résistivité étant de 1000. On prendra $\rho_0 = 1000 \Omega \cdot \text{cm}$ et $\rho = 1 \Omega \cdot \text{cm}$.

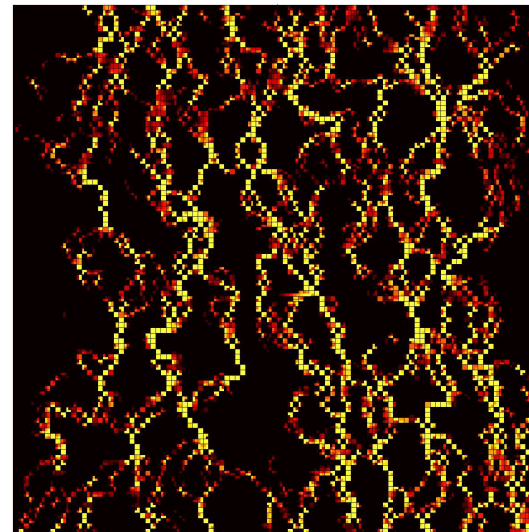
Lorsque les matériaux sont distribués de façon aléatoire, le courant suit des chemins préférentiels, comme le montre l'image ci-contre. Lorsqu'il n'y a qu'une faible fraction volumique de matériau de faible résistivité, celui-ci est entouré par le matériau à forte résistivité, et la résistance reste élevée. En considérant des fractions surfaciques de plus en plus élevées de matériau à faible résistivité, il arrive un moment où se créent les chemins en question. La fraction correspondante est le *seuil de percolation*. L'image ci-contre illustre le résultat de la résolution de ce problème de conduction. Elle montre la distribution de l'intensité du courant dans le matériau

pour une répartition 50%–50% de chaque phase.

Dans ce mini-projet, on se propose de chercher la valeur de la résistance en fonction de la fraction surfacique de phase à faible résistivité, que l'on note f , et de comparer les valeurs obtenues avec quelques modèles classiques de matériau hétérogène.

Code utilisé : ZéBuLoN

Mots-clés : conduction, homogénéisation, milieux aléatoires, prévision de la taille d'un calcul



Présentation

Analogie conduction thermique – conduction électrique

On dispose pour résoudre le problème d'un code de thermique. Ecrire les équivalences entre les deux types de problèmes physiques (température \equiv potentiel électrique, ...).

Les fichiers disponibles

Le fichier géométrie, `squ100.geof` : il contient les définitions des nœuds, des éléments, ainsi que des groupes de nœuds et d'éléments.

Le fichier de données du calcul, `squ100.inp` : il contient à la fois le calcul et un post-traitement.

Les fichiers représentant le matériau. Il y a deux fichiers pour lesquels le matériau est uniforme (`c1.mat` et `c1000.mat`, et un troisième, `condu.mat`, qui permet de définir une distribution aléatoire du matériau.

Les fichiers de données de distributions aléatoires, `random.datai`, pour lesquels $f = i\%$.

Un fichier de commande, `RUN`, qui permet de lancer les calculs en adressant un fichier de distribution aléatoire donné.

Les bornes élémentaires

Donner les valeurs des bornes de la résistance en fonction de f , en considérant successivement que les matériaux sont disposés en série et en parallèle.

Travail proposé

Examen des fichiers

Editer le fichier `squ100.geof`, et vérifier la mise en données Les noms des groupes indiquent de façon évidente la localisation (groupes de

nœuds, `nset`, et groupes d'éléments, `elset`). En utilisant la commande `Zmaster squ100.geof`, vérifier que le fichier correspond au maillage 100 x 100 d'un carré compris entre -1 et +1 en x et en y , et qu'il est composé d'éléments linéaires à 4 nœuds.

Editer le fichier de données du calcul, `squ100.inp`. La partie analyse (après la commande `****calcul`) permet de spécifier successivement :

- le nom du fichier de maillage (`***mesh`);
- le schéma de résolution (`***resolution` : cette partie n'est vraiment utile que pour spécifier des problèmes d'évolution. Elle est donc réduite à sa plus simple expression dans ce cas ;
- les conditions aux limites : ici, la «température» est imposée, à une valeur de 0 sur les nœuds du bord inférieur et de 1 sur les nœuds du bord supérieur ;
- la définition d'une distribution aléatoire : celle-ci couvre le domaine du carré tout entier (points extrêmes définis par `start` et `*end`), la taille de la cellule est de 0.02 dans les deux directions – QuestionA quoi correspond cette dimension? – les données sont prises dans le fichier `random.data` ;
- diverses possibilités pour rentrer les matériaux : les fichiers `c1.mat` et `c1000.mat` correspondent respectivement à une «conductivité» k de 1 et de 1000. Le fichier `condu.mat` renvoie sur la distribution définie par le fichier `random.data`. On note que k est sauvée dans les fichiers résultats, ce qui permet d'obtenir son tracé sur le maillage ;
- en plus des résultats traditionnels sur les nœuds et les points de Gauss, la spécification `*nset_var` de l'option `**curve` dans `***output` permet d'obtenir, sur l'ensemble des nœuds du bord supérieur, la valeur du «flux» sortant. Le résultat se trouvera dans le fichier `squ100.test` ;
- le mot-clé `****return` termine la partie analyse. Au delà du mot-clé `****post_processing`, se trouvent les instructions nécessaires pour calculer, lors d'un post-traitement, la valeur du flux (intensité électrique) sur les points de Gauss : la nouvelle variable, q , sera accessible lors du dépouillement.

Examiner les fichiers `RANDOM/random.data1` – *Vérifier que les fractions volumiques visées sont correctes.* On utilisera les commandes `grep` et `wc`.

Examiner le fichier `RUN` . Il lance successivement l'exécution de l'analyse et du post-processeur. Observer le moyen par lequel la commande `RUN 30` permet d'utiliser le fichier `RANDOM/random.data30`.

Calcul des résistances pour des distributions spatiales déterministes

Faire tourner les calculs en utilisant le matériau de `c1.mat`, et vérifier qu'il donne le bon résultat.

En utilisant différents arrangements dans l'espace des fichiers `c1.mat` et `c1000.mat`, valider également les valeurs obtenues en série et en parallèle pour une fraction volumique $f = 50\%$.

Calcul des résistances pour des distributions aléatoires

En utilisant la commande `RUN`, faire les calculs pour chacune des fractions surfaciques proposées. Pour chaque problème traité :

- calculer la résistance équivalente à l'ensemble ;
- tracer la carte de la distribution spatiale de chaque matériau ;
- tracer les cartes du potentiel et de la densité de courant.

Placer ensuite les valeurs de résistance R évaluées sur un diagramme $f-R$. Comment se placent les résultats par rapport aux estimations série et parallèle ? ¹

Recommencer les calculs précédents pour le cas de $f = 50\%$, en utilisant d'autres distributions des deux matériaux. Pour cela, on utilisera

les lignes 10001–20000, puis 20001–30000 et 30001–40000 du fichier `random.data50` (justifier pourquoi on n'a besoin que de 10000 valeurs pour effectuer le calcul). Quelle est la dispersion observée sur R ? Comparer les nouvelles images du potentiel et de la densité de courant avec les précédentes.

Etudier la variation de la dispersion lorsqu'on choisit des tailles de cellule différentes. Pour cela, modifier les valeurs des deux réels du mot-clé `*cell`. Observer l'effet sur la distribution de k . Utiliser différentes parties du fichier `random.data50` afin de caractériser encore une dispersion. Commentaire ?

Faire un nouveau maillage, de même dimension que le précédent, mais avec un découpage de 10×10 seulement. Comparer alors, pour différentes réalisations empruntées au fichier `random.data50`, le résultat du calcul pour une taille de cellule de `*cell (0.2 0.2)`. Ce résultat permet de faire un commentaire sur la notion de *volume élémentaire représentatif*, quantité de matériau nécessaire pour que les propriétés soient invariantes d'une réalisation à l'autre (donc d'un «point» à l'autre du matériau, lorsqu'on translate une fenêtre de taille correspondante sur la matière).

Examen de la taille du problème

Noter les caractéristiques importantes pour chaque type de calcul réalisé jusqu'à présent (le calcul 100×100 , et le calcul 10×10), soit :

- le nombre de nœuds et d'éléments ;
- le temps calcul ;
- la place mémoire au moment du calcul ;
- la place nécessaire pour stocker les résultats sur disque.

Afin d'avoir une idée plus précise de l'évolution de ces paramètres, réaliser encore un calcul en 30×30 , puis un calcul 200×200 . *Ces calculs peuvent être réalisés avec n'importe quelle fraction surfacique ; on choisira celle qui donne...les plus belles images !*

¹De bien meilleures estimations sont disponibles grâce à la théorie de l'homogénéisation. Pour plus d'information, on ne manquera pas de suivre le cours de Dominique Jeulin sur le sujet

