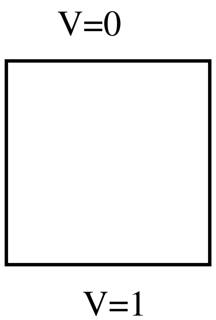
ENSMP 2ème/3ème année, ES éléments finis, novembre 2011

Conduction dans une plaque hétérogène (version FreeFem++)



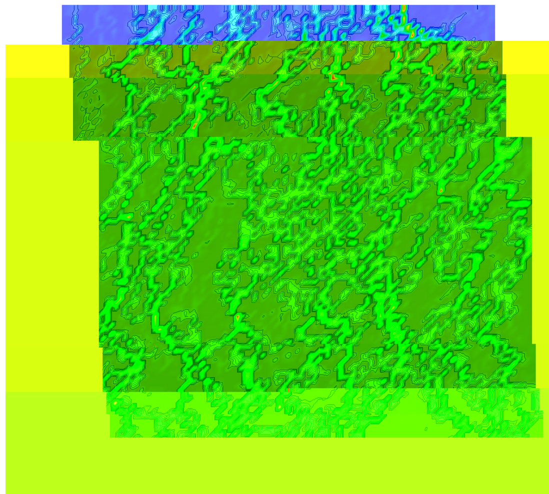
On applique une différence de potentiel entre les bords (hauts et bas sur la figure) d'une plaque carrée, les bords latéraux restant libres (pas de fuite de courant). Cette plaque est composée de deux matériaux, le rapport de résistivité étant de 1000. On prendra $\rho_0 = 1000\ \Omega$cmet $\rho_1 = 1\ \Omega$cm.

Lorsque les matériaux sont distribués de façon aléatoire, le courant suit des chemins préférentiels, comme le montre l'image ci-contre. Lorsqu'il n'y a qu'une faible fraction volumique de matériau de faible résistivité, celui-ci est entouré par le matériau à forte résisitivité, et la résistance reste élevée. En considérant des fractions surfaciques de plus en plus élevées de matériau à faible résistivité, il arrive un moment où se créent les chemins en question. La fraction correspondante est le *seuil de percolation*. L'image ci-contre illustre le résultat de la résolution de ce problème de conduction. Elle montre la distribution de l'intensité du courant dans le matériau pour une répartition 50%–50% de chaque phase.

Dans ce mini-projet, on se propose de chercher la valeur de la résistance en fonction de la fraction surfacique de phase à faible résistivité, que l'on note f, et de comparer les valeurs obtenues avec quelques modèles classiques de matériau hétérogène.

Code utilisé : *FreeFem++*

Mots-clés : *conduction, homogénéisation, milieux aléatoires, prévision de la taille d'un calcul*



Présentation du modèle

Le potentiel électrique dans une plaque carrée notée $\Omega = [-L,L] \times [-L,L]$ de conductivité variable k est régie par l'équation de diffusion

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad} u) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ u &= 1 && \text{sur le bord } y = L \\ u &= 0 && \text{sur le bord } y = -L \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{sur les bords } x = \pm L \end{aligned} \tag{1}$$

Le flux du champ électrique traversant la plaque est donné par

$$J = \int_{y=-L} k \frac{\partial u}{\partial n}\, d\gamma$$

On définit la conductivité équivalente comme la constante de proportionnalité entre le flux moyen et la différence de potentiel : $J/L = k_{\mathrm{equ}}/L$, soit

$$k_{\mathrm{equ}} = \int_{y=-L} k \frac{\partial u}{\partial n}\, d\gamma$$

On suppose que le milieu est constitué de cellules carrées de taille δ (on prendra $\delta = 2/100$ et que la conductivité de chaque cellule vaut, de manière aléatoire $\rho_0 \gg 1$ (on prendra $\rho_0 = 10^3$) ou $\rho_1 = 1$, la distribution de conductivité suit une loi uniforme, de manière que la fraction de cellules conductrices $f \in [0,1]$ soit fixée.

La conductivité équivalente dépend naturellement de la fraction de cellules conductrices. On constate (et on peut le démontrer rigoureusement) que cette fraction passe en dessous d'un certain seuil (*le seuil de percolation* la conductivité équivalente prend une valeur très faible, et que le milieu cesse d'être conducteur.

Travail demandé

Formulation, prise en main

Écrire la formulation variationnelle du problème. Écrire le programme FreeFem++ correspondant, d'abord dans le cas où la conductivité k est constante. Valider les résultats dans ce cas.

On abandonne temporairement la répartition aléatoire. Simuler des répartitions « en série » et « en parallèle », et vérifier que les valeurs trouvées correspondent à ce que donne un calcul exact pour ces deux situations.

Variation de la conductivité équivalente

Montrer que la conductivité équivalente k_{equ} s'exprime comme une intégrale sur le domaine Ω.

Faire varier la fraction de cellules conductrices f (on pourra prendre une dizaine de valeurs), et étudier la dépendance de la conductivité équivalente k_{equ} en fonction de f. Étudier la sensibilité de k_{equ} aux nombres de réalisations utilisées. Étudier également la sensibilité de k_{equ} au maillage.

Détermination du seuil de percolation

Calculer une approximation du seuil de percolation, en étudiant également sa dépendance aux nombres de réalisations et au maillage.

Bonus

Reprendre l'étude pour $\delta = 1/100$.