ENSMP 2ème/3ème année, Cours d'éléments finis, 26–30 novembre 2012

Écoulement d'un fluide non-newtonien dans une conduite

On considère l'écoulement d'un fluide non–newtonien dans une conduite rectiligne de section arbitraire. Les fluides non-newtonien interviennent dans de nombreuses applications, en particulier l'écoulement de polymères visqueux, et l'extrusion d'un métal.

Pour un fluide newtonien, la viscosité est constante, et en conséquence la relation entre le gradient de vitesse et les contraintes est linéaire. Il existe un grand nombre de modèles de fluides non–newtonien, et nous nous bornerons au cas le plus simple des fluides newtoniens généralisé, où la viscosité n'est fonction que de la quantité $\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathrm{trace}(\varepsilon)}$. Nous prendrons $\mu = \mu_0 \dot{\gamma}^{n-1}$, où n est un paramètre entre 0 et 1.

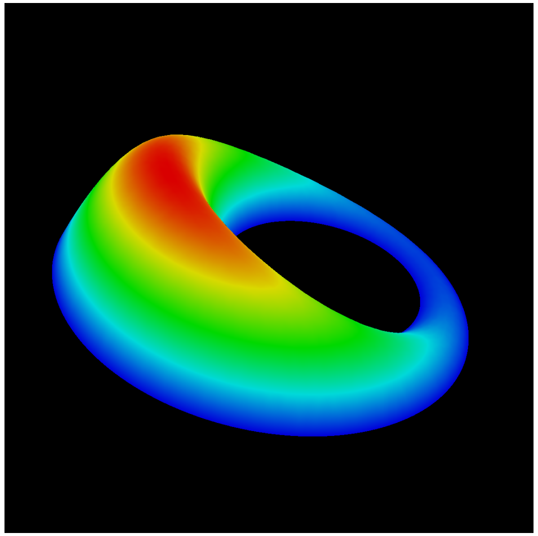
Nous verrons que l'hypothèse de conduite rectiligne entraîne une simplification considérable du problème, qui se ramène à une équation elliptique non–linéaire, selon la loi de viscosité choisie.

Nous terminerons en envisageant le cas où la viscosité dépend de la température. On doit alors résoudre un problème couplé.

Dans ce mini-projet, on se propose de calculer les profils de vitesse dans le cas où la conduite est le domaine compris entre deux disques non–concentriques, et d'examiner comment ce profil dépend de la loi de viscosité retenue.

Code utilisé : *FreeFem++*

Mots-clés : *Mécanique des fluides, fluide non–newtonien, équation non-linéaire, problème couplé*



Présentation

Dans le cas d'un écoulement permanent dans une conduite rectiligne, les équations de la mécanique des fluides se simplifient, puisque la vitesse n'a de composantes que selon la direction de la conduite, et ne dépend que des variables transverses. En notant w cette composante, β la différence de pression entre les extrémités de la conduite, w est solution de l'équation

$$-\nabla.(\mu\nabla w) = \beta, \tag{1}$$

où μ est la viscosité du fluide. Nous considérons ici un fluide non-newtonien (μ n'est pas constante), mais dans le cas simplifié où μ ne dépend que de $|\nabla w|$, par l'intermédiaire d'une loi de puissance :

$$\mu = \mu_T|\nabla w|^{n-1} = \mu_T(|\nabla w|^2)^{\frac{n-1}{2}} \tag{2}$$

n étant un paramètre entre 0 et 1 (le fluide devient newtonien si $n=1$), et μ_T une fonction de la température, par exemple

$$\mu_T(T) = \mu_0 \exp(-\alpha(T-T_0)). \tag{3}$$

La température elle même est solution d'une équation

$$-k\Delta T = \mu|\nabla w|^2, \tag{4}$$

où k est la conductivité thermique du fluide.

Dans le cas où $\alpha = 0$, l'équation de la température est découplée de celle de la vitesse, et la température se calcule par la résolution d'un problème de Poisson dont le second membre est connu. Dans le cas général, les deux problèmes sont couplés, et tous deux sont non–linéaires.

Les conditions aux limites pour la vitesse peuvent être de type w imposé (Dirichlet), où $\frac{\partial w}{\partial n}$ imposé (Neumann), et il en est de même de la température.

Géométrie, et données physiques

On considère l'écoulement entre deux disques non–concentriques représentés sur la figure page 1. Le disque extérieur (centré à l'origine) a un rayon de 1m, et le disque intérieur est centré en $(0.3\text{m}, 0)$, et a un rayon de 0.5m.

On impose des conditions aux limites nulles sur les deux cercles pour la vitesse. Pour la température, le cylindre intérieur (Γ_1) est maintenu à $T_i = 100°$C, la moitié supérieure du cylindre extérieur (Γ_2) est maintenue à 0°C, alors que la moitié inférieure (Γ_3) est isolée ($\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ sur Γ_3).

Les autres constantes physiques du modèle sont données dans la table ci-dessous

Coefficient	Valeur	Unité
β	200	$\text{kg}(\text{ms})^{-2}$
μ_0	50	$\text{kgm}^{-1}\text{s}^{2-n}$
T_0	50	°C
k	1	$\text{J}(\text{msK})^{-1}$

Les valeurs de n et de α sont variables. Une valeur « cible » pour n est $n = 0.1$. Pour α, on prendra d'abord $\alpha = 0$ (pas de dépendance de μ par rapport à la température), puis $\alpha = 0.2$.

Calcul de la vitesse

Pour résoudre le problème (1), qui est non–linéaire, on utilisera soit un algorithme de point fixe, soit la méthode de Newton.

Point fixe

Étant donné un itéré initial w^0, on calcule une suite w^k par l'algorithme suivant :

- Calculer $\mu^{k+1} = \mu(\nabla w^k)$;

– résoudre le problème (linéaire)

$$-\nabla \cdot (\mu^k \nabla w^{k+1}) = \beta \quad \text{dans } \Omega, \tag{5}$$

avec les conditions aux limites appropriées.

Newton

Il est commode de formuler une itération de la méthode de Newton directement à partir de la forme faible du problème (1)- (2). On notera $\mu(|\nabla w|^2)$ la fonction définie en (2).

Vërifier que si $w^{k+1} = w^k + h$ est le nouvel itéré, la correction h est solution du problème variationnel suivant :

$$\int_\Omega \mu(\left|\nabla w^k\right|^2)\nabla h \cdot \nabla \varphi + 2\mu'(\left|\nabla w^k\right|^2)(\nabla w^k \cdot \nabla \varphi)\nabla w^k \cdot \nabla h$$
$$= \beta \int_\Omega \varphi - \int_\Omega \mu(\left|\nabla w^k\right|^2)\nabla w^k \cdot \nabla \varphi, \qquad \forall \varphi \in H^1_D(\Omega) \tag{6}$$

(où $H^1_D(\Omega)$ est un espace de fonctions approprié).

Vérifier que (6) s'interprète comme la formulation faible du problème aux limite

$$-\nabla \cdot (M(\nabla w^k)\nabla h) = -\nabla. \left(\mu \nabla w^k\right) + \beta, \quad \text{dans } \Omega \tag{7}$$

où $M(\xi)$ est la matrice $M(\xi) = \mu(|\xi|^2)I + 2\mu'(|\xi|^2)\xi \otimes \xi$

Pour accélérer la convergence de l'algorithme, il pourra être utile de procéder par continuation : on résout d'abord le problème avec $n = 1$ (dans ce cas, il est linéaire), puis on diminue progressivement n jusqu'à atteindre la valeur fixée (ici $n = 0.1$). Il suffit de prendre 4 ou 5 valeurs de n.

Le problème couplé

On utilisera ici aussi une méthode itérative simple. Partant de w^0, T^0 donnés, on calcule deux suites w^l et T^l par l'algorithme suivant :

– résoudre l'équation en vitesse (1), avec $T = T^l$, ce qui donne w^{l+1}. On utilisera pour cela l'algorithme itératif du paragraphe précédent ;
– résoudre l'équation de température avec $w = w^l$, ce qui donne T^{l+1}. Ce problème est linéaire.

Travail proposé

Formulation

Écrire les formulations des différents problèmes (linéaires) à résoudre effectivement.

Étude sans dépendance de la température

On se place d'abord dans le cas $\alpha = 0$, où il n'y a pas de couplage entre l'équation en vitesse et l'équation en température. On doit dans ce cas résoudre simplement l'équation (1), puis l'équation (4), avec un second membre connu.

Écrire un programme pour résoudre ce problème, d'abord par la méthode du point fixe, puis par la méthode de Newton. Étudier la dépendance de la solution par rapport au paramètre n.

Étude du problème couplé

On se place maintenant dans le cas général, avec $\alpha = 0.2$.

Reprendre les questions précédentes.