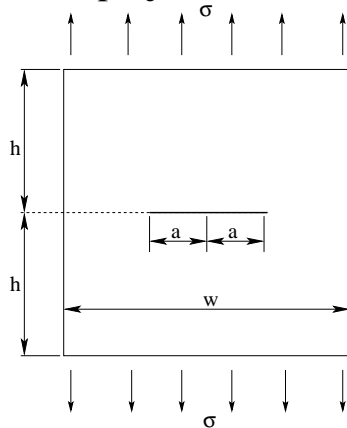


## ENSMP 2ème/3ème année, Cours d'éléments finis, 22–26 novembre 2004

### Etude du champ de déformation en pointe de fissure dans une plaque

Des fissures peuvent apparaître dans les structures lors de leur vie en service. La géométrie de la fissure doit donc être prise explicitement en compte dans la structure. Nous traiterons ici, grâce à la méthode des éléments finis, le cas d'une fissure de longueur  $2a$  dans une plaque soumise à un chargement  $\sigma_\infty$  (Mode I). Les résultats obtenus lors de ce projet seront confrontés aux solutions analytiques.



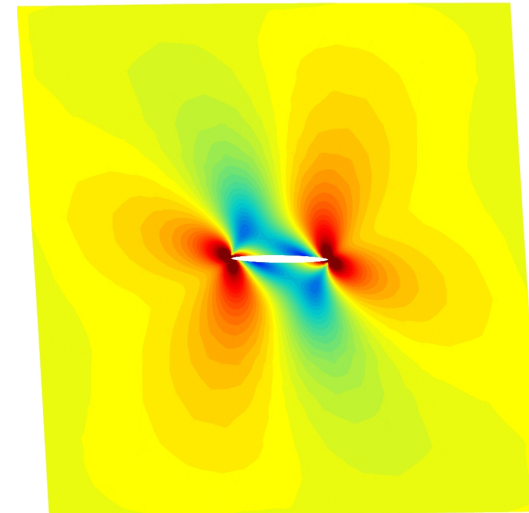
La plaque a pour dimensions  $h=1\text{mm}$  ;  $W=2\text{mm}$ , elle comporte en son centre une fissure horizontale de longueur  $2a$  ( $a=.1\text{mm}$ ).

*Dans ce mini-projet, on comparera tout d'abord le calcul par éléments finis à la solution analytique en contraintes planes. Pour cela plusieurs maillages seront*

*étudiés (types de maillages et finesse du maillage). Ensuite deux hypothèses de calcul seront étudiées : état de contraintes planes et état de déformation plane. Enfin la sollicitation sera modifiée pour étudier le cas d'une fissure sollicitée en mode mixte (I+II).*

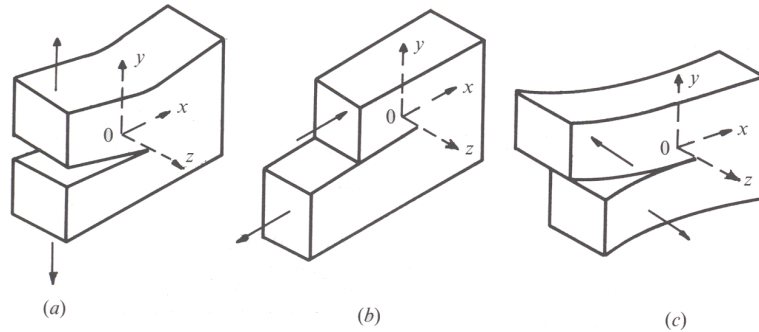
*Code utilisé : ZéBuLoN*

*Mots-clés : Mécanique linéaire de la rupture, facteur d'intensité des contraintes*



## Présentation

En mécanique de la rupture, plusieurs modes de rupture sont possibles : Mode I (a) , II (b), III (c). On peut aussi avoir une combinaison de ces différents modes. Le mode I correspond à une ouverture des lèvres de la fissure tandis que les modes II et III prennent en compte le glissement d'une lèvre sur l'autre.



Dans le cas d'une fissure horizontale dans une plaque de dimensions infinies, on connaît la solution exacte pour le Mode I (Solution exacte de Muskhelishvili) en supposant un état de contraintes planes :

- Pour  $x \geq a$  :

$$\sigma_{22}(y=0) = \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

- Pour  $0 \leq x \leq a$  :

$$u_2 = \frac{4\sigma_{22}^{\infty}a}{E} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

*Quelle remarque pouvez vous faire sur la contrainte  $\sigma_{22}$  lorsque  $x$  tend vers*

*a ?*

La solution précédente peut être abordée en introduisant le facteur d'intensité des contraintes en mode I :  $K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{22} \sqrt{2\pi r})$ . On obtient alors la solution asymptotique de Westergaard :

- mode I

$$\sigma = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} & 0 \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

- En contraintes planes :

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= 0 \\ u_2 &= \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} [3 - \nu - (1 + \nu) \cos \theta] \\ u_1 &= \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} [3 - \nu - (1 + \nu) \cos \theta] \end{aligned}$$

Sur le ligament, on trouve donc :

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

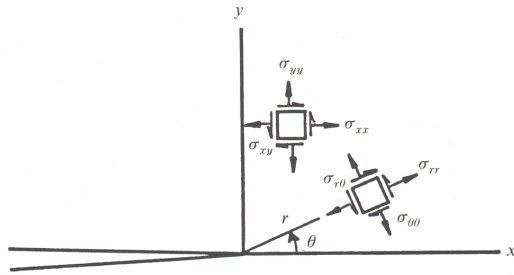
Et pour l'ouverture de la fissure, on a :

$$u_2 = \frac{8K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

où  $r$  et  $\theta$  sont respectivement la distance et l'angle séparant le point (où l'on calcule la contrainte et le déplacement) et le bord de la fissure  $K_I$  est le facteur d'intensité des contraintes.

- En déformations planes :

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ u_2 &= \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} [3 - 4\nu - \cos \theta] \\ u_1 &= \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} [3 - 4\nu - \cos \theta] \end{aligned}$$



– mode II

$$\sigma = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) & \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) & 0 \\ \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 - \nu) \sin \frac{\theta}{2} (C_1 + 2 + \cos \theta)$$

$$u_2 = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 - \nu) \cos \frac{\theta}{2} (C_1 + 2 + \cos \theta)$$

avec  $C_1 = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$  en contraintes planes et  $C_1 = 3 - 4\nu$  en déformations planes.

Sur le ligament, on trouve donc :

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

Et pour l'ouverture de la fissure, on a en contraintes planes :

$$u_2 = \frac{8K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

## Travail proposé

### Examen des fichiers

**Editer le fichier de mise en données du calcul** fissure5.inp . La partie analyse (après la commande `****calcul`) permet de spécifier successivement :

- le maillage (`***mesh`) : le fichier et le type de maillage :
  - `plane_stress` : option permettant d'imposer un état de contraintes planes
  - `plane_strain` : option permettant d'imposer un état de déformations planes
- le schéma de résolution
- la définition des conditions aux limites : ici des conditions de symétrie sont imposées sur le ligament et le bord gauche `xsym`. Une traction  $\sigma_\infty = 100MPa$  est imposée sur le haut de l'éprouvette.
- la loi de comportement du matériau est donnée par le fichier `elastique.mat`
- en plus des résultats traditionnels sur les nœuds et points de gauss, la spécification `*liset_var` de l'option `**curve` dans `***output` permet d'obtenir le long des nœuds de la fissure (resp. du ligament) le déplacement (resp. l'état de contraintes). Les résultats sont stockés dans le fichier `fissure5_ouverture.tab-1.00` (resp. `fissure5_ligament.tab-1.00`)
- le mot-clé `****return` termine l'analyse mécanique
- au delà se trouve la définition d'un post-traitement (`****post_processing`) qui permet de calculer le travail appliquée à la structure.

**Calcul du champ de contraintes et du facteur d'intensité des contraintes** Lancer le calcul à l'aide de la commande `Zrun fissure5`. On comparera les résultats obtenus à la solution exacte de Muskhelishvili en lançant la commande : `gnuplot fissure5.gnu`. Cette procédure permet de tracer l'ouverture de fissure et la contrainte  $\sigma_{22}$  le long du

ligament, mais aussi d'identifier le facteur d'intensité des contraintes, tout d'abord en comparant la solution analytique de la contrainte  $\sigma_{22}$  à proximité de la pointe de fissure aux valeurs obtenues par le calcul par éléments finis. Puis nous identifierons le facteur d'intensité des contraintes à l'aide de l'ouverture de fissure.

*Comparer cette valeur à la valeur théorique donnée par  $K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$ .*

*Commentaire ?*

*Recommencer les mêmes opérations avec les fichiers de mises en données :*

- fissure10.inp
- fissure20.inp
- fissure50.inp

Commentaires ? *Examiner le maillage* fissure\_nquart.geof.

*Ecrire un fichier de mises en données pour effectuer un calcul mécanique sur ce maillage. Déterminer le facteur d'intensité des contraintes.*

**Méthodes de perturbation** On introduit ici la notion de *taux de restitution d'énergie*  $G = \frac{1}{2} \frac{\delta W_x}{\delta a}$  avec  $\delta a$  l'accroissement de fissure et  $W_x$  le travail des forces extérieures. Cette quantité est l'énergie disponible lors d'un accroissement de fissure. De plus, on a :

$$\text{-en contraintes planes } G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E}$$

$$\text{-en déformations planes } G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2)$$

*Calculer le travail des forces extérieures appliquées à la structure entière (n'oubliez pas que l'on n'a modélisé qu'un seul quart de la structure). Pour cela on sommerá le produit des Forces nodales par le déplacements des noeuds correspondants en exécutant le Post-traitement*

(Zrun -pp fissure5). Editez le fichier fissure5.geof, et modifier l'abscisse de la pointe de fissure d'une valeur  $\delta a$ . Relancer le calcul et calculer à nouveau le travail des forces extérieures. On calculera alors le taux de restitution d'énergie  $G = \frac{1}{2} \frac{\delta W_x}{\delta a}$ . On pourra effectuer le même calcul pour les différents maillages. Quel commentaire pouvez vous faire.

**Estimation de la zone plastique** *Reprendre le maillage de votre choix et effectuer un calcul en déformation plane. On compara la zone plastique en utilisant le critère de Von Misès.*

**Calcul en mode mixte I+II** On se propose de modifier la sollicitation. Le chargement choisi est une traction simple à  $30^\circ$ . *Réaliser le maillage qui*

*vous semble le plus adéquate pour caractériser le champ de contraintes (deux modélisations sont possibles). Pour imposer des conditions de cisaillement le long d'un contour, utiliser l'option \*shear (on vérifiera au préalable l'orientation du contour). calculer les facteurs d'intensité des*

*contraintes par la méthode de votre choix.* Pour information, dans le cas d'une fissure inclinée dans un milieu infini les facteurs d'intensité des contraintes sont :

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \cos^2 \alpha$$

$$K_{II} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \cos \alpha \sin \alpha$$

